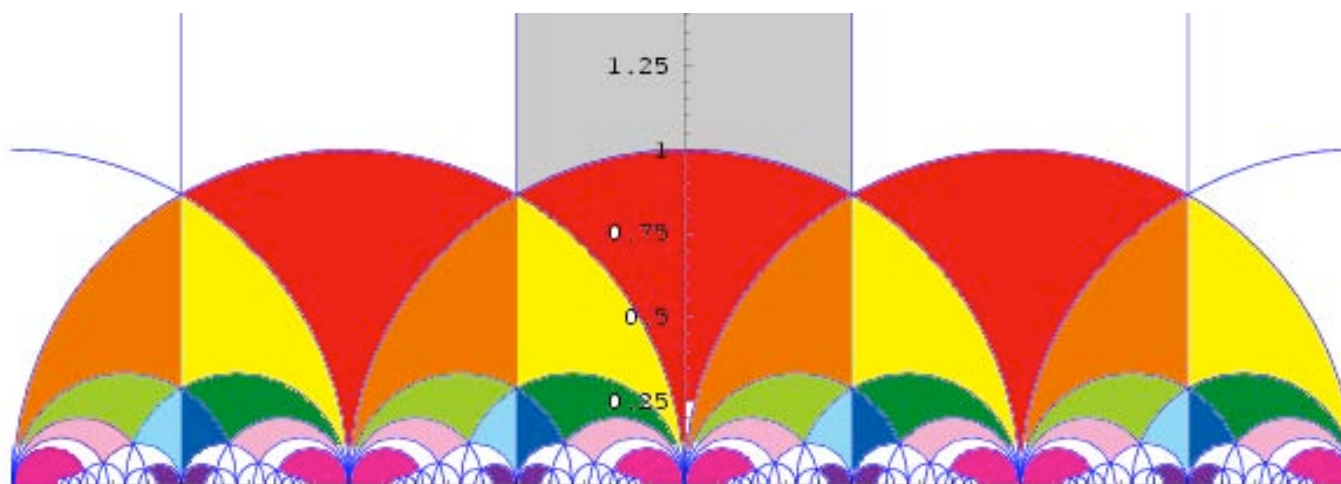


モジュラスの花園

—巨人の肩の上で—

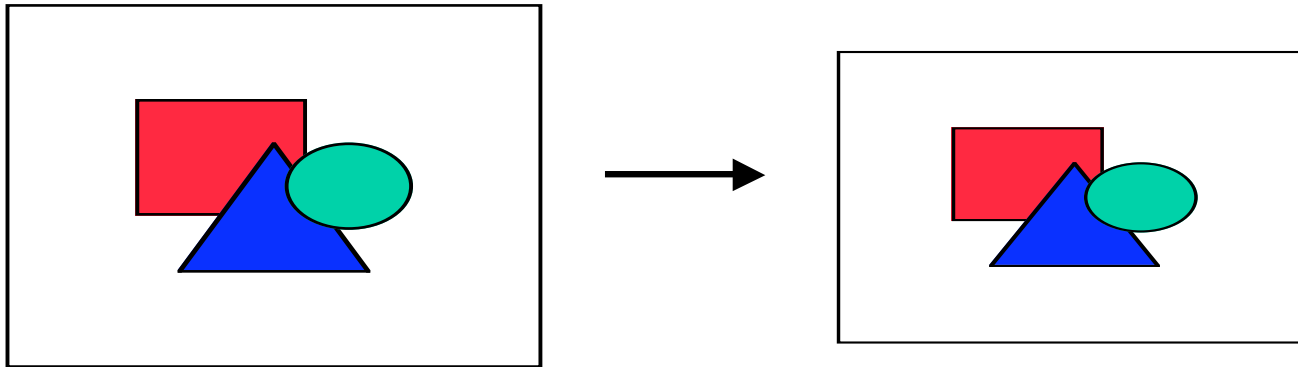


浪川 幸彦

2008年3月14日 名古屋大学

1. 楕円曲線のモジュラス

楕円曲線



$$C \longrightarrow E_\tau = C / Z\tau + Z$$

$$C \longrightarrow C^* = C / Z \longrightarrow E_\tau$$

$$w = \exp(2\pi iz)$$

1. 楕円曲線のモジュラス

楕円曲線のモジュラス空間

$$H = \{\tau \in \mathbb{C}; \text{Im}\tau > 0\} \quad \text{複素上半平面}$$

$$H^* = H / SL(2, \mathbb{Z}) = \{\text{isom. classes of } E_\tau\}$$

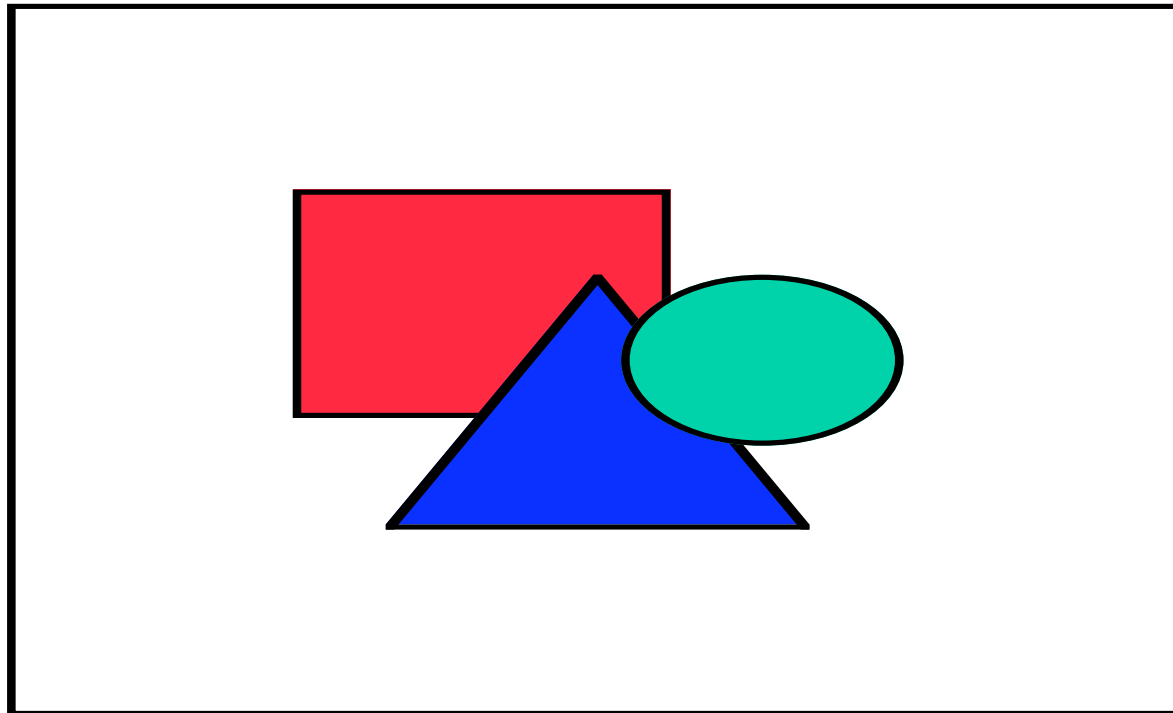
楕円曲線のモジュラス空間

実は複素数平面である (j 関数)

$$\begin{array}{ccc} j: & H & \rightarrow \mathbb{C} \\ & \downarrow & = \\ & H^* & \cong \mathbb{C} \end{array}$$

1. 楕円曲線のモジュラス

楕円曲線のモジュラス空間



2.楕円曲面論 (小平邦彦)

楕円曲面

$$\begin{array}{l} \pi: X \rightarrow S \quad \text{楕円曲線の族} \\ \cup \quad \cup \\ \pi_o: X_o \rightarrow S_o \quad \{E_s = \pi^{-1}(s), s \in S\} \end{array}$$

滑らか (ファイバーは楕円曲線)

この族の性質を調べることで、

X 自身の性質を知ることができる

2.楕円面論 (小平邦彦)

楕円曲面をどう調べるか？

1) 滑らかな部分 X_0 を調べる

$\Phi: \hat{S}_0 \rightarrow H$ 周期写像 (*functional invariant*)

$M: \pi_1(S_0) \rightarrow SL(2, Z)$

モノドロミー (*homological invariant*)

プラスアルファ

モジュラス理論が方法を与える

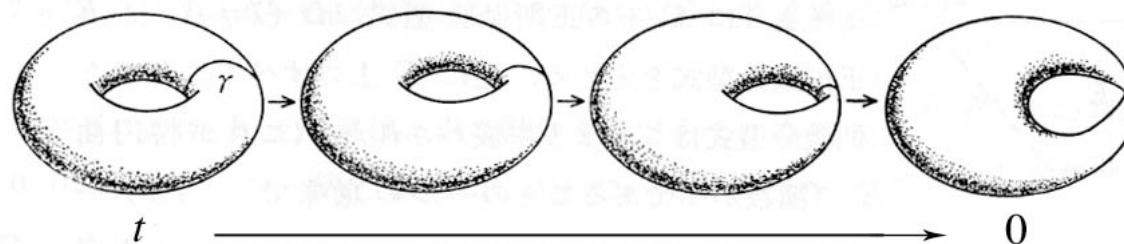
2. 楕円曲面論 (小平邦彦)

楕円曲面をどう調べるか？

II) 滑らかでない部分 (特異ファイバー) を調べる (退化の理論)


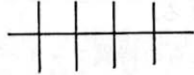

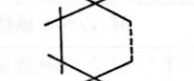
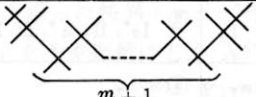

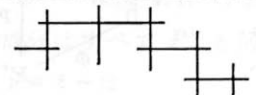
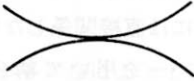
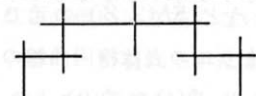
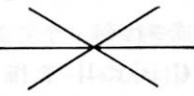
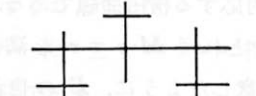
- ・ 特異ファイバー自身の形
- ・ 特異ファイバーの周りの楕円曲線の挙動

$$y^2 = x^3 + x^2 + t \quad (t \rightarrow 0)$$



2. 楕円曲面論 (小平邦彦)

特異ファイバーの分類と特徴付け (1963)

型	ファイバー	$\Phi(0)$	M の代表元	M のベキ 単位数 ¹⁾
I_0	 非特異楕円曲線	\mathcal{H}^* 内 ²⁾	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	1
I_0^*	 既約成分は すべて P^1	\mathcal{H}^* 内	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	2
I_m	$m=1$  2重点を一つ もった有理曲線	∞	$\begin{bmatrix} 1 & m/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	1
	$m \geq 2$  m 個の非特異 有理曲線の輪			
I_m^* $m > 0$	 既約成分は すべて P^1	∞	$\begin{bmatrix} -1 & -m \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	2
II	 尖点を一つ もった有理曲線	$\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)^*$ ³⁾	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	6
II*	 成分はすべて P^1	$\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)^*$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	6
III	 1点で接した 2つの P^1	$\sqrt{-1}^*$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	4
III*	 成分はすべて P^1	$\sqrt{-1}^*$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	4
IV	 1点で交わった 3本の P^1	$\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)^*$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$	3
IV	 成分はすべて P^1	$\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)^*$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	3

2.楕円曲面論 (小平邦彦)

II) 特異ファイバーを調べる (続)

簡単のため次を仮定

- ・パラメータは1次元
- ・原点で特異ファイバー (基本群は無限巡回群)

基本的事実：モノドロミーがquasi-unipotent

$$(M^n - I)^m = 0$$

基本的構成法：べき単の場合をまず構成して他はその有限群による商として作る

べき単の場合： $I_0, I_m (m > 0)$

2.楕円曲面論 (小平邦彦)

II) 特異ファイバーを調べる (続)

I_m ($m > 0$) の場合

特異ファイバー：特異点 (二重点) をもつ有理曲線

周期： $\Phi(0) = \infty$

モノドロミー： $M = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

モジュラス空間から「はみ出した点に対応」

→ モジュラス空間のコンパクト化

問題：この理論の進展？

3. 曲線（閉リーマン面）の場合

種数 $g > 1$ の閉リーマン面（代数曲線）

モジュラス理論、周期理論は古典的に確立されている

特にモジュラス空間 M_g が代数多様体として存在

その「よい」コンパクト化として、「よい」退化モデル（安定曲線）のモジュラス空間 S_g が存在
(Deligne-Mumford 1969)

その結果により、原理的に理論は拡張される

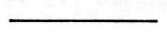
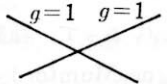
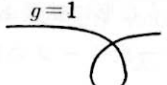

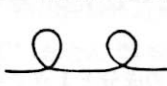

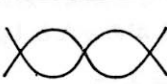
$g = 2$ の場合：飯高、上野-浪川(1972-73)

一般の場合： Viehweg (1975)

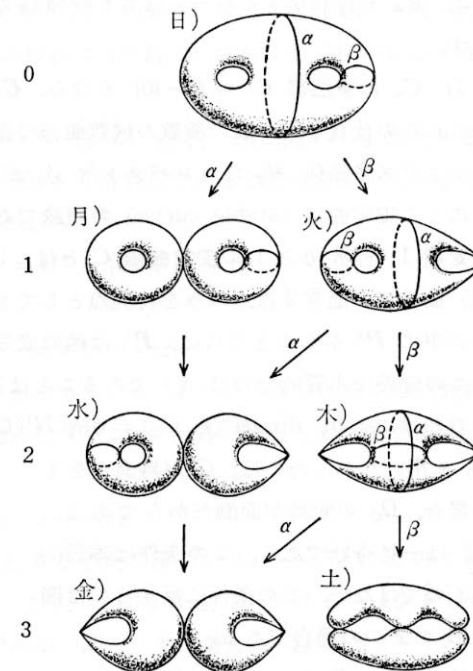
3. 曲線（閉リーマン面）の場合

種数 $g > 1$ の閉リーマン面（代数曲線）

$g = 2$ の場合

日)		種数 2 の非特異曲線
月)		1 点で交わった 2 本の非特異楕円曲線
火)		2 重点を 1 個もった楕円曲線
水)		1 点で交わった非特異楕円曲線と 2 重点を 1 個もった有理曲線
木)		2 個の 2 重点をもった有理曲線
金)		1 点で交わった 2 本の 2 重点を 1 個もった有理曲線
土)		3 点で交わった非特異有理曲線

注：後に物理で「パンツ分解」と言われるものに対応



4. 偏極アーベル多様体の場合

次元 $g > 1$ の偏極アーベル多様体

モジュラス理論、周期理論は古典的に確立されている
特にモジュラス空間も代数多様体として存在

問題：コンパクト化で付け加える点に対応する退化アーベル多様体は何か？

$g = 2$ の場合：上野のメモ (1972?)

アイデア：

テータ関数を使った射影空間への埋め込みの極限を調べる

ポイント：

各成分は0に収束するが、比なので一番収束の遅い項が残る

4. 偏極アーベル多様体の場合

次元 $g > 1$ の偏極アーベル多様体

考え方： $\Phi(t) = \frac{M}{2\pi i} \log t + S(t)$

(主) 偏極 $\Rightarrow M$ 対称、非負

α を止めたとき、次式の最小値を取る η の分布

$$\phi_\alpha(\eta) = {}^t \eta M \eta + 2 {}^t \alpha \eta, \alpha \in R^g, \eta \in Z^g$$

$\Leftrightarrow M$ で「距離」を入れたときに、 α に一番「近い」 η の分布

(Voronoi図)

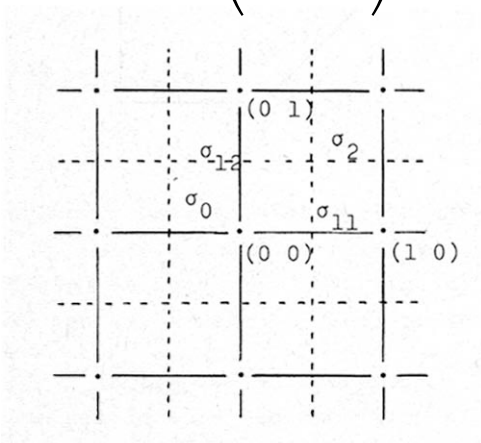
\Rightarrow Delony分解の形の特異ファイバーが極限に現れる(中村郁)

4. 偏極アーベル多様体の場合

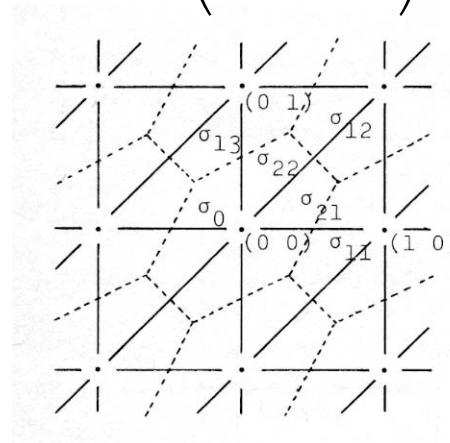
次元 $g > 1$ の偏極アーベル多様体

例： $\Phi(t) = \frac{M}{2\pi i} \log t + S(t)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$



4. 偏極アーベル多様体の場合

トーラス埋め込み

●1973頃Mumford達がトーラス埋め込みというものを調べていて面白そうという噂

⇒小田忠雄、三宅克也氏らが独自に理論を作る

●一方Mumford達はさらにその応用として、対称空間の算術的部分群による商空間のコンパクト化理論を作った(トロイダルコンパクト化 1974)。偏極アーベル多様体のモジュラス空間もその例になっている。

4. 偏極アーベル多様体の場合

モジュラス空間のトロイダルコンパクト化

コンパクト化は二次形式の還元理論に対応

- 1) perfect cone decomposition (1st Voronoi)
- 2) central cone decomposition (Koecher)
- 3) 2nd Voronoi decomposition

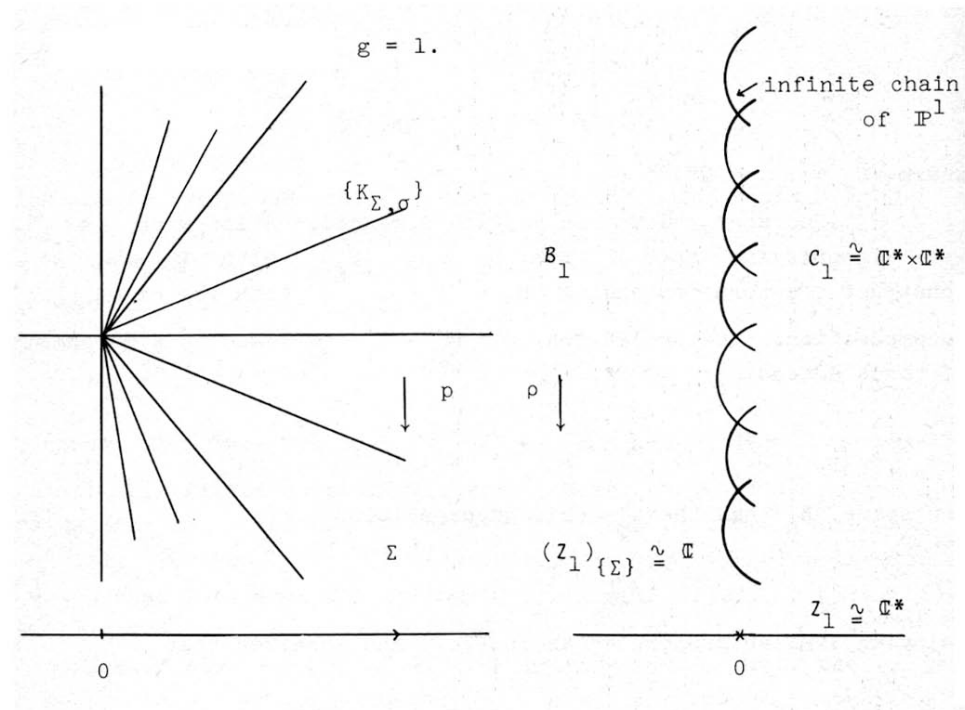
先のモデルは明らかに3)のコンパクト化に対応している。

さらにVoronoi分解を用いると、トロイダルコンパクト化の手法を拡張して、コンパクト化の上に退化アーベル多様体(SQAV)の族を大域的に構成できる(1976)。

4. 偏極アーベル多様体の場合

モジュラス空間のトロイダルコンパクト化

$g = 1$ の場合：下の部分的コンパクト化の
無限巡回群による商空間



4. 偏極アーベル多様体の場合

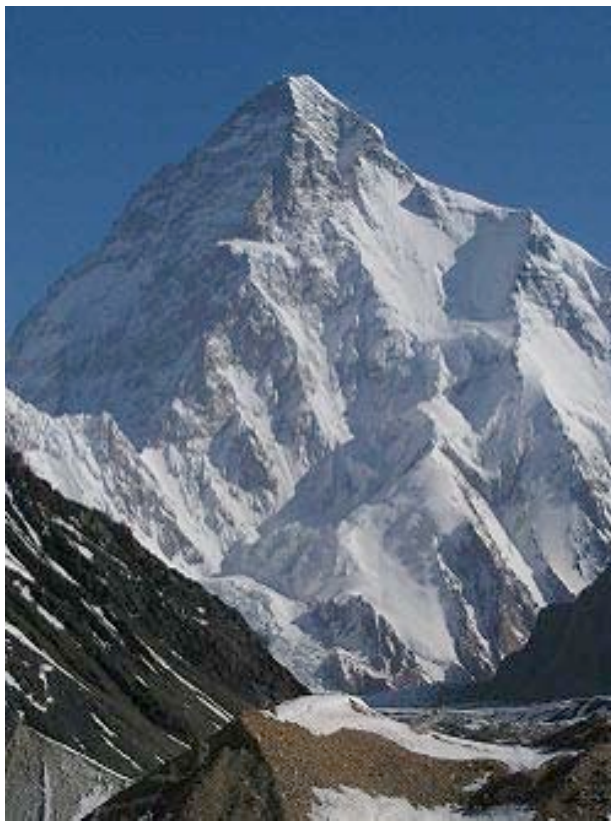
当時の未解決問題のその後

- 1) 射影多様体か? Yes Alexeev(2002)
- 2) 「モジュラス空間」か? Z 上定義されるか? Yes Alexeev(2002)
- 3) 1st Voronoi分解によるコンパクト化の意味? (相対) 標準モデル Shepherd-Barron(2006)

30年を経てほぼすべてが解決された

さらに双有理幾何学のよい研究材料

5.K3 曲面



K2



A. Weil



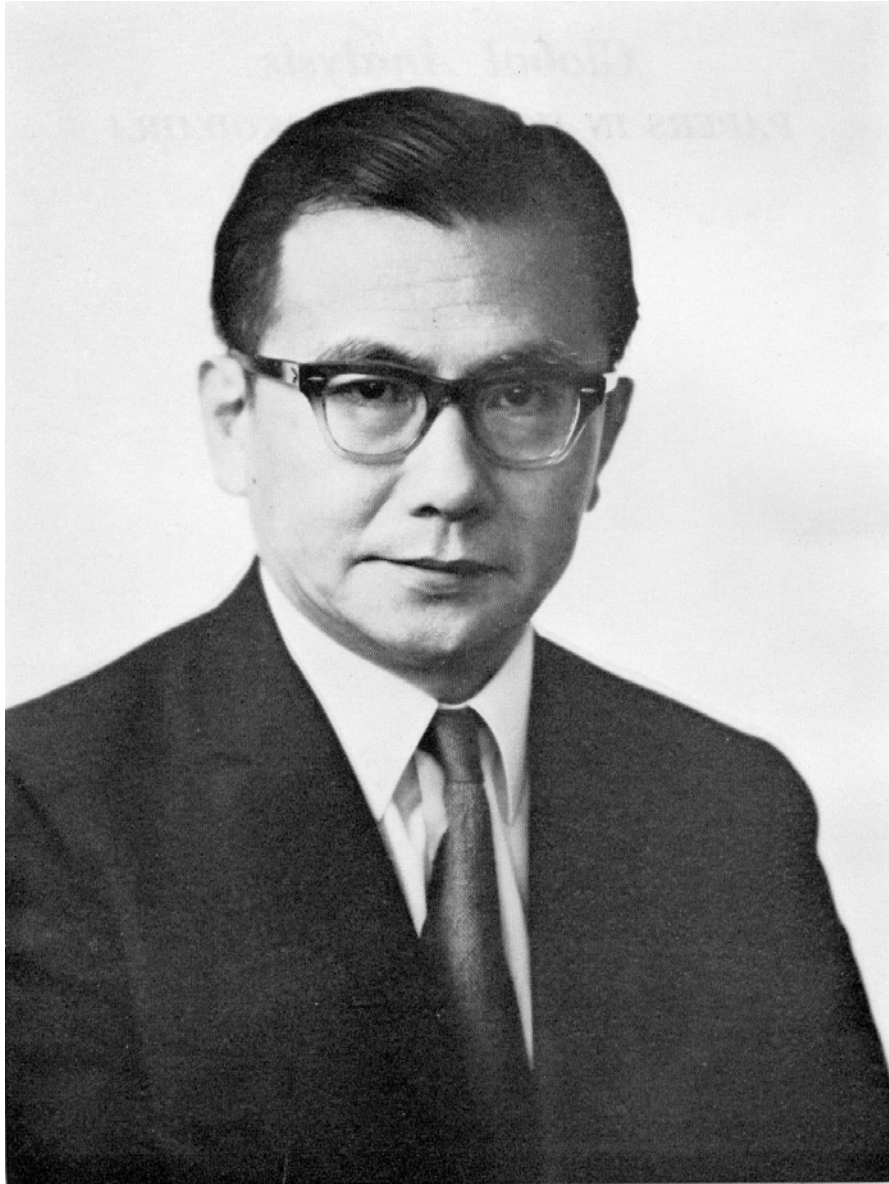
Kummer



Kaehler



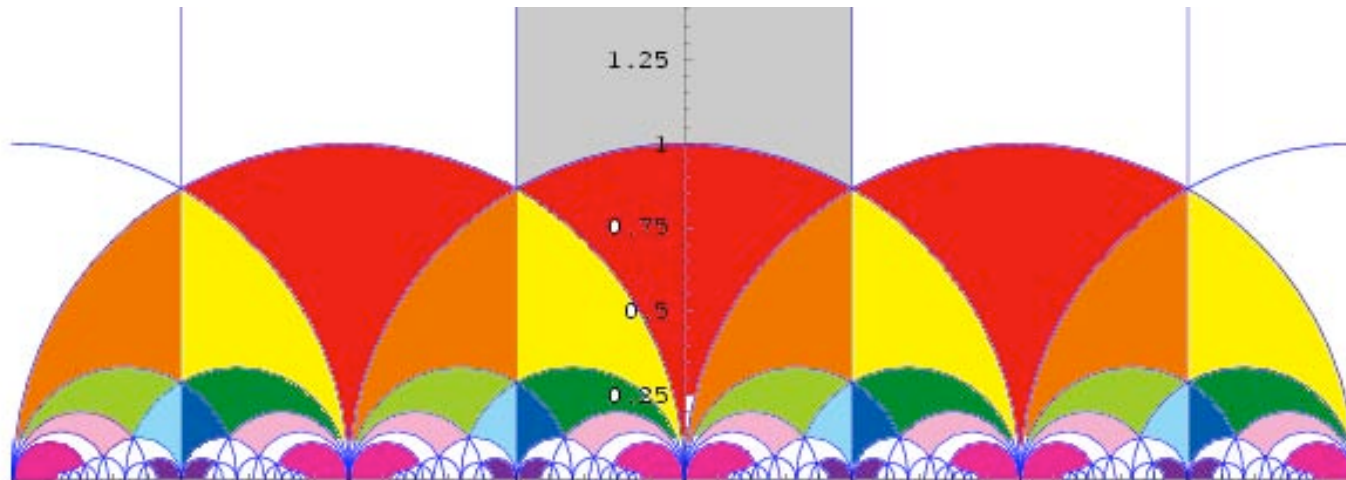
Kodaira



If I have seen a little
further it is by
standing on the
shoulders of Giants.
-Sir Isaac Newton-

みなさま

ありがとうございました



出典

ここで用いた図表は以下から引用しています

- 飯高・上野・浪川著「デカルトの精神と代数幾何」(日本評論社)
- Y.Namikawa “Toroidal Compactification of Siegel Space”, Springer Lecture Notes Vol.812
- <http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:K2-big.jpg>