

プラズマ理工学 第 9 回

エネルギー理工学科 3 年秋学期

日時: 月曜日 午前 10 時 30 分～12 時 00 分、場所: 522 講義室

教員: 藤田隆明(ふじたたかあき) 工学部 8 号館南棟4階

6. プラズマの波動(続き)

6-3. 変動磁場を伴わないプラズマ波(静電波)

6-3-1. 外部磁場がない場合

6-3-1-1. 電子プラズマ波

磁場がなくイオンが一様分布で固定されている状態で x 方向へ伝播する電子の波動を考える。電子密度の疎密に伴って電場や圧力勾配ができて波動となる。

電子流体の連続の式と運動方程式(イオンと電子との衝突は無視) およびガウスの法則は

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\nabla \cdot (n_e \vec{V}_e)$$

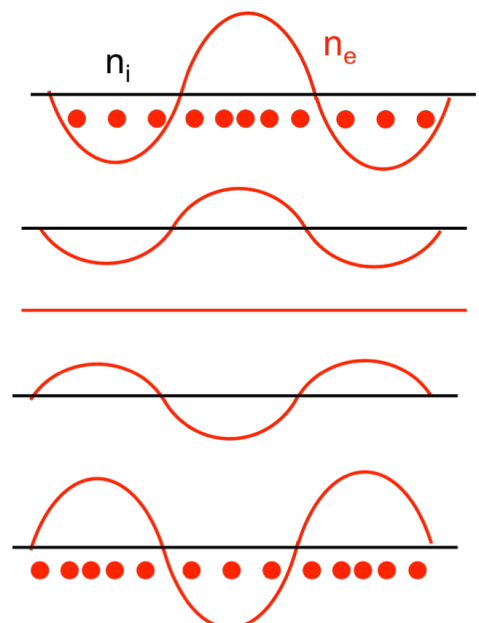
$$m_e n_e \left(\frac{\partial \vec{V}_e}{\partial t} + (\vec{V}_e \cdot \nabla) \vec{V}_e \right) = -n_e e \vec{E} - \nabla p_e$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_i - n_e)$$

振動の振幅が小さく高次の項を無視できるとする。つまり振動の 1 次の項までを残す(これを「線形化」と言う。時間平均量あるいは振動が発生する前の状態の量に添字 0、摂動量に添字 1 を付けて表す。仮定により、 $n_{i0} = n_{e0} = n_0$, $V_{e0} = 0$, $E_0 = 0$, $B = 0$ であり

$$n_i = n_0, \quad n_e = n_0 + n_1, \quad V_e = V_1, \quad E = E_1$$

と書けるので、連続の式は



$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\nabla \cdot (n_0 \vec{V}_1) = -n_0 \nabla \cdot \vec{V}_1,$$

$$\text{運動方程式は } m_e n_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -n_0 e \vec{E}_1 - \nabla p_e = -n_0 e \vec{E}_1 - \gamma k_B T_e \nabla n_1$$

(ここで $p_e = C n_e^\gamma = n_e k_B T_e$ より $\nabla p_e = C \nabla n_e^\gamma = \gamma C n_e^{\gamma-1} \nabla n_e = \gamma k_B T_e \nabla n_e$ となることを用いた。 k_B はボルツマン定数)、

$$\text{ガウスの法則は } \nabla \cdot \vec{E}_1 = -\frac{e}{\epsilon_0} n_1 \text{ となる。つまり解くべき式は}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -n_0 \nabla \cdot \vec{V}_1 \quad (6-1a)$$

$$m_e n_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -n_0 e \vec{E}_1 - \gamma k_B T_e \nabla n_1 \quad (6-1b)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = -\frac{e}{\epsilon_0} n_1 \quad (6-1c)$$

である。波数ベクトル k を x 軸方向にとり $k = k e_x$ とする。摂動量は $\exp\{i(kx - \omega t)\}$ の形で振動するとし

$$V_1 = V_1 e_x, \quad E_1 = E_1 e_x$$

とすると、 $\nabla \cdot V_1 = ikV_1$, $\partial V_1 / \partial t = -i\omega V_1 e_x$, $\nabla n_1 = ikn_1 e_x$, $\nabla \cdot E_1 = ikE_1$ より(6.1)式は

$$-i\omega n_1 = -ikn_0 V_1 \rightarrow \omega n_1 = kn_0 V_1 \quad (6.1a')$$

$$\begin{aligned} -i\omega m_e n_0 V_1 &= -n_0 e E_1 - ik\gamma k_B T_e n_1 \\ &\rightarrow i\omega m_e n_0 V_1 = n_0 e E_1 + ik\gamma k_B T_e n_1 \end{aligned} \quad (6.1b')$$

$$ikE_1 = -\frac{e}{\epsilon_0} n_1 \quad (6.1c')$$

となる。変数は複素振幅とみなすことができる。これらから 2 つの変数例えば V_1 , E_1 を消去する。(6.1a'), (6.1c')より

$$V_1 = \frac{\omega}{kn_0} n_1, \quad E_1 = i \frac{e}{k\epsilon_0} n_1$$

これらを(6.1b')に代入して

$$i\omega m_e n_0 \left(\frac{\omega}{kn_0} n_1 \right) = en_0 \left(i \frac{e}{k\epsilon_0} n_1 \right) + ik\gamma k_B T_e n_1$$

$$\left(\frac{m_e \omega^2}{k} - \frac{e^2 n_0}{k \epsilon_0} - k \gamma k_B T_e \right) n_1 = 0$$

これが n_1 について自明でない(0でない)解を持つためには

$$\frac{m_e \omega^2}{k} = \frac{e^2 n_0}{k \epsilon_0} + k \gamma k_B T_e$$

すなわち

$$\omega^2 = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_e} + k^2 \frac{\gamma k_B T_e}{m_e} \rightarrow \omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3}{2} k^2 v_{th}^2 \quad (6-2)$$

ここで、 $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}$ は電子プラズマ角周波数、 $v_{th} = \sqrt{\frac{2 k_B T_e}{m_e}}$ は電子の熱速度。また、一次元運動より $f = 1$, $\gamma = (2 + f)/f = 3$ とした。

群速度 V_g は(6-2)を k で微分して

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = 3k v_{th}^2 \rightarrow V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \frac{k}{\omega} v_{th}^2 = \frac{3}{2} \frac{v_{th}^2}{V_\phi}$$

長波長の極限($k \rightarrow 0$)あるいは電子温度ゼロの極限($T_e \rightarrow 0$, $v_{th} \rightarrow 0$)では、 $\omega = \omega_{pe}$, $V_g = 0$ となりプラズマ振動となる。短波長の極限では $\omega^2 = (3/2)k^2 v_{th}^2$ より $\omega = \sqrt{3/2} k v_{th}$ となり $V_g = V_\phi = \sqrt{3/2} v_{th}$ となる。

<変動磁場はないのか？>

電流 $\mathbf{j} = -n_e e \mathbf{V}_e$

摂動成分 $\mathbf{j}_1 = -n_0 e \mathbf{V}_1 = (j_1, 0, 0)$,

$$\begin{aligned} j_1 &= -n_0 e V_1 = -n_0 e \left(\frac{\omega}{k n_0} n_1 \right) = -\frac{\omega}{k} e n_1 = -\frac{\omega}{k} (-i k \epsilon_0 E_1) \\ &= i \omega \epsilon_0 E_1 \end{aligned}$$

マクスウェル方程式 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ の摂動成分

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_1 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}_1 - i \omega \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$$

つまり電子による電流と変位電流がキャンセルし磁場は発生しない。

6-3-1-2. イオン音波

6-3-1-1 では波動の周波数が高くイオンは静止しているとみなした。波動の周波数が低い場合、イオンの振動を伴う波動がある。電子の慣性は無視でき(電子に作用する力が釣り合っていて)、電子はボルツマン分布に従う。

イオン流体の連続の式と運動方程式およびボルツマン分布の式

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_i}{\partial t} &= -\nabla \cdot (n_i \vec{V}_i) \\ m_i n_i \left(\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial t} + (\vec{V}_i \cdot \nabla) \vec{V}_i \right) &= n_i e \vec{E} - \nabla p_i = -n_i e \nabla \phi - \gamma_i k_B T_i \nabla n_i \\ n_e &= n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right), \quad n_i = n_e\end{aligned}$$

を考える。

線形化すると

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} = -\nabla \cdot (n_0 \vec{V}_{i1}) \quad (6-3a)$$

$$m_i n_0 \frac{\partial \vec{V}_{i1}}{\partial t} = -n_0 e \nabla \phi_1 - \gamma_i k_B T_i \nabla n_{i1} \quad (6-3b)$$

$$n_{i1} = n_{e1} = n_0 \frac{e\phi_1}{k_B T_e} \rightarrow \phi_1 = \frac{k_B T_e}{en_0} n_{i1} \quad (6-3c)$$

ここで $\exp(e\phi/k_B T_e) = 1 + e\phi_1/k_B T_e$ と線形化した。

摂動量が $\exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\}$ の形で振動するとして複素振幅についての式を導く。(6-3a),(6-3b)式は

$$\begin{aligned}-i\omega n_{i1} &= -in_0 \vec{k} \cdot \vec{V}_{i1} \\ -i\omega m_i n_0 \vec{V}_{i1} &= -in_0 e \phi_1 \vec{k} - i\gamma_i k_B T_i n_{i1} \vec{k}\end{aligned}$$

第 2 式より V は k 方向の成分しか持たないので、 $V_{i1} = |\vec{V}_{i1}|$, $k = |\vec{k}|$ を用いると $\vec{k} \cdot \vec{V}_{i1} = kV_{i1}$ であり

$$n_{i1} = \frac{n_0 k}{\omega} V_{i1}$$

$\omega m_i n_0 V_{il} = (n_0 e \phi_1 + \gamma_i k_B T_i n_{il}) k = (k_B T_e n_{il} + \gamma_i k_B T_i n_{il}) k = (k_B T_e + \gamma_i k_B T_i) n_{il} k$
 第2式において(6-3c)式を用いて ϕ_1 を消去した。第1式を第2式に代入して

$$\omega m_i n_0 V_{il} = (k_B T_e + \gamma_i k_B T_i) \frac{n_0 k^2}{\omega} V_{il} \rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{k_B T_e + \gamma_i k_B T_i}{m_i}$$

$$\rightarrow \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{k_B T_e + \gamma_i k_B T_i}{m_i}} = V_s \quad (6-4)$$

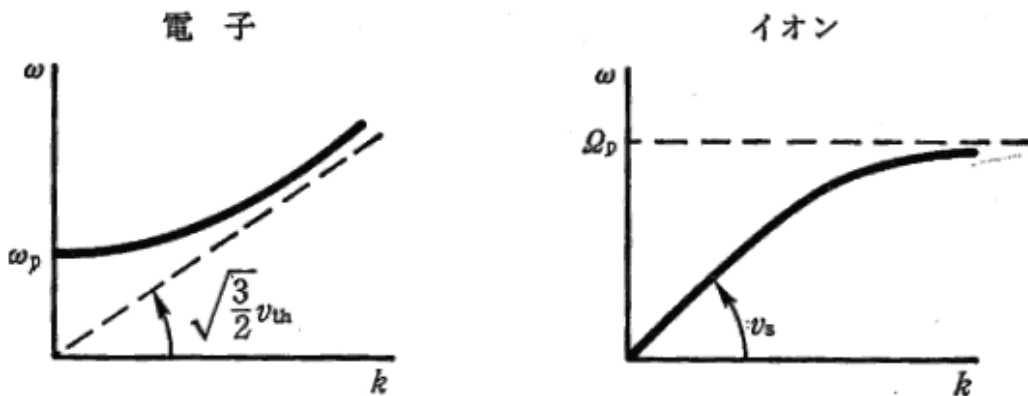
V_s を音速と言う。中性気体の音速 $c_s = \sqrt{\gamma p / \rho} = \sqrt{\gamma k_B T / m}$ に類似している。

(6-4)式は波長が充分長い(k が充分小さい)場合の式である。波長がデバイ長 $\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n e^2}}$ 程度まで短くなると $n_i = n_e$ の近似が成り立たなくなり(6-4)式の代わりに

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{1}{1 + k^2 \lambda_D^2} \frac{k_B T_e}{m_i} + \frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i}}$$

を使わねばならない。特に、 $k \rightarrow \infty$, $T_i / T_e \rightarrow 0$ の極限では $\omega = \sqrt{\frac{n e^2}{\epsilon_0 m_i}}$ となる。これはイオンプラズマ角周波数(プラズマ角周波数の式で電子質量の代わりにイオン質量を用いたもの)である。

なお、ランダウ減衰と呼ばれる機構により位相速度 ω/k がイオンの熱速度より充分大きくなければイオン音波は減衰してしまうことが知られている。従って、イオン音波が観測されるのは $T_i \ll T_e$ の場合に限られる。



(左)電子プラズマ波と(右)イオン音波の分散曲線

参考文献[1]の図 4.13

出典

[1] F.F. Chen 著(内田岱二郎訳)、プラズマ物理入門、丸善(1977)