

プラズマ理工学 第 8 回

エネルギー理工学科 3 年秋学期

日時: 月曜日 午前 10 時 30 分～12 時 00 分、場所: 522 講義室

教員: 藤田隆明(ふじたたかあき) 工学部 8 号館南棟4階

5. 電磁流体力学とプラズマの流体としての運動

5-5. 磁力線を横切るプラズマ流体の運動

一流体の(簡単化した)一般化オーム則(5-12)とマクスウェル方程式(5-14b), (5-14d)から

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times (\eta \vec{j} - \vec{V} \times \vec{B}) = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\eta \nabla \times \vec{B}) \quad (5-15)$$

を得る。最後の式の第1項は磁場 $\vec{B}$ がプラズマとともに流速 $\vec{V}$ で動く様子を、第2項は磁場 $\vec{B}$ が拡散する様子を示す。それぞれに分けて考える。

5-5-1. 磁力線の凍り付き

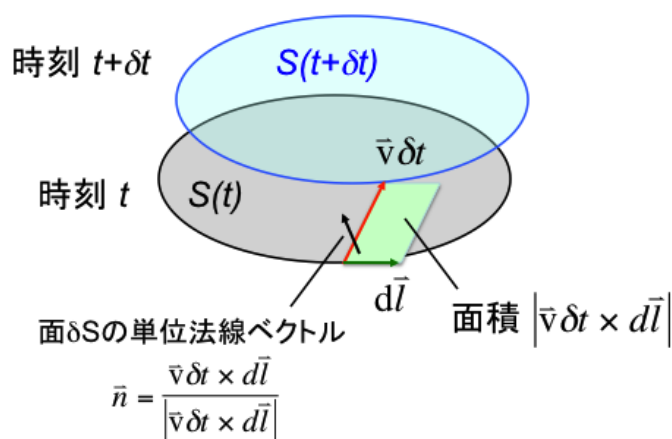
抵抗率 η が無視できる ($\eta=0$) とすると(5-15)式は

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) \quad (5-16)$$

となる。プラズマ流体とともに動く閉曲線 C を貫く磁束 Φ の時間変化を考える。 C で囲まれた面を S とすれば

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

$$\delta \Phi = \int_S \delta \vec{B} \cdot \vec{n} dS + \int_{\delta S} \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$



第1項は S 内における磁場の変化を表す。 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ を用いて

$$\int_S \delta \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_S \delta t \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS = -\delta t \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

第2項は C の運動に伴う変化を表す。面 δS において $\vec{n}dS = \vec{v}\delta t \times d\vec{l}$ を利用すると

$$\int_{\delta S} \vec{B} \cdot \vec{n}dS = \int_C \vec{B} \cdot \vec{v}\delta t \times d\vec{l} = \int_C d\vec{l} \cdot \vec{B} \times \vec{v}\delta t = \delta t \int_S \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot \vec{n}dS$$

(最後の等式はストークスの定理による)。よって、

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= -\delta t \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{n}dS - \delta t \int_S \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{n}dS \\ &= -\delta t \int_S \nabla \times (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{n}dS = 0 \end{aligned}$$

つまり、**プラズマの電気抵抗がなければ、磁束 Φ の時間変化はなく (C を横切って出入りしない)、磁場はプラズマ流体とともに運動している**と見なすことができる。これを磁場がプラズマに凍り付いている (frozen in) と言うことがある。

5-5-2. 磁力線の拡散

プラズマの流速 $\vec{V}$ が無視できる場合を考える。(5-15)式より

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\eta \nabla \times \vec{B}) \quad (5-17)$$

簡単のため、抵抗率 η が一様の場合を考えると、ベクトル公式

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad \text{と} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{を用いて}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B} \quad (5-18)$$

となり磁場は拡散係数 η/μ_0 で拡散していくことが分かる。典型的な長さのスケール (物理量が変化するスケール) を L とする (L の意味は

$\left| \frac{\partial X}{\partial x} \right| \sim \left| \frac{\partial X}{\partial y} \right| \sim \left| \frac{\partial X}{\partial z} \right| \sim \frac{|X|}{L}$ と考えればよい) と $\left| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right| = \frac{\eta}{\mu_0 L^2} B$ となるので、**拡散の時定数 τ は**

$$\tau = \frac{\mu_0 L^2}{\eta} \quad (5-19)$$

で与えられ抵抗率が小さいほど長くなる。

5-5-3. 一般的な場合

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\eta \nabla \times \vec{B})$$

第1項(対流項、移流項)と第2項(拡散項、散逸項)の大きさを比較する。典型的なプラズマの流体速度を V_0 とし、典型的な長さのスケールを L とすると上の式は

$$\text{第1項の大きさ} = \left| \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) \right| = \frac{1}{L} \times V_0 \times B_0$$

$$\text{第2項の大きさ} = \left| \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\eta \nabla \times \vec{B}) \right| = \frac{\eta}{\mu_0} \times \frac{B_0}{L^2}$$

第2項に対する第1項の大きさの比を**磁気レイノルズ数 R_m** と呼ぶ。

$$R_m = \frac{V_0 B_0}{L} \times \frac{\mu_0 L^2}{\eta B_0} = \frac{\mu_0 V_0 L}{\eta} \quad (5-20)$$

これは通常の流体におけるレイノルズ数 $Re = V_0 L / \nu$ に相当するパラメータである(ν は動粘性係数)。プラズマの場合は電気抵抗による散逸を考える(**電気抵抗率が小さいほど R_m は大きくなる**) が、通常の流体では、粘性による散逸となる。

通常の流体と同様、 **R_m が大きいとプラズマの流れは乱流的になる**。高温プラズマでは抵抗率 η が小さいので、 R_m が大きく乱流的になる。そのため、時間発展方程式を解く数値計算は困難となり、直接計算では膨大な計算時間を要する。

しばしば、流体速度 V_0 としてプラズマ中を伝わるアルベン波と呼ばれる波の速度 V_A が取られる。その場合の磁気レイノルズ数をルンドクイスト数 S と呼ぶことがある。

$$S = \frac{\mu_0 V_A L}{\eta} \quad (5-21)$$

5-5-4. プラズマ抵抗と圧力勾配に伴う磁場を横切る流れ(拡散)

定常状態において、

$$\text{磁力線に垂直な方向の力の釣り合いの式} \quad \vec{j} \times \vec{B} = \nabla p$$

(運動方程式(5.11)で左辺=0とした式)

$$\text{マクスウェル方程式} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

(簡単化した)一般化オーム則 $E + V \times B = \eta j$
 の3つを考える。一般化オーム則と B との外積を取ると

$$E \times B + (V \times B) \times B = \eta j \times B = \eta \nabla p$$

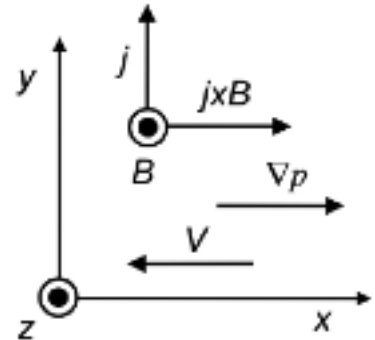
$$(V \times B) \times B = -B^2 V_{\perp} \text{なので}$$

$$E \times B - B^2 V_{\perp} = \eta \nabla p$$

すなわち

$$V_{\perp} = \frac{E \times B}{B^2} - \frac{\eta \nabla p}{B^2} \quad (5-22)$$

第1項は $E \times B$ ドリフトの項、第2項 $V_{\eta} = -\frac{\eta \nabla p}{B^2}$ はプラズマ抵抗に伴い圧力勾配方向へ(圧力が低くなる向きへ)生じる流れを示す。



<物理的解釈>

圧力勾配があると、 $j \times B = \nabla p$ (圧力勾配方向の力の釣り合い)を満足するように反磁性電流 j_D が流れるが、プラズマ抵抗があると、 j_D を維持するには電場が必要である。電場がなければ j_D は減衰し、力の釣り合いが崩れて圧力が低くなる向きへの流れ V_{η} が生じる(加速される)であろう。 V_{η} と磁場とで $V \times B$ 電場ができそれにより磁力線に垂直方向の電流が駆動される。それが反磁性電流と等しくなったときに力の釣り合いが保たれ、流れの大きさも一定に保たれると考えることができる。

この流れは微視的には、クーロン衝突による粒子の拡散ととらえることもできる。いずれにせよ、この V_{η} が必然的な(最低限の)プラズマの損失をもたらす。

(参考)

(5-22)式には反磁性ドリフトに対応するものがない。一般化オーム則として

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \eta \vec{j} + \frac{1}{en_e} (\vec{j} \times \vec{B} - \nabla p_e)$$

を使って、同様のことをやってみる。 $\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p$ を用いて

$\vec{j} \times \vec{B} - \nabla p_e = \nabla p - \nabla p_e = \nabla p_i$ となることに注意すると

$$\vec{E} \times \vec{B} + (\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \eta \vec{j} \times \vec{B} + \frac{1}{en_e} \nabla p_i \times \vec{B}$$

$$\rightarrow \vec{E} \times \vec{B} - B^2 \vec{V}_\perp = \eta \nabla p + \frac{1}{en_e} \nabla p_i \times \vec{B}$$

より

$$\vec{V}_\perp = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \frac{\eta \nabla p}{B^2} - \frac{\nabla p_i \times \vec{B}}{en_e B^2}$$

となる。第1項は $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトの項、第2項は V_η 、第3項はイオンの反磁性ドリフト速度である。プラズマ流体としての速度はほとんどイオンの速度で決まるので、一流体モデルではイオンの反磁性ドリフト速度のみが出てくることになる。

一方、二流体モデルでは、 $\vec{V}_\eta$ に相当するものが出てこなかった(5-2節の式(5-5)、下に再掲)。これは、二流体モデルにおいて、イオン流体と電子流体との摩擦 R_{ei} を無視した(式(5-4))ためであると考えられる。前回述べたようにこの項は抵抗率 η に比例する(5-4節)ので、この項を残せば V_η に相当するものが出てくる。

$$\vec{V}_\perp = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \frac{\nabla p_j \times \vec{B}}{n_j q_j B^2}$$

6. プラズマの波動

6-1. 波動の数学的表現(復習)

振幅 U 、波長 λ 、周期 T を有し x 方向に進行する物理量 u に関する波動は

$$u(x, t) = U \cos \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \delta \right]$$

と表すことができる。波数 k 、角周波数 ω (周波数 f)を用いると

$$u(x, t) = U \cos(kx - \omega t + \delta), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

波の位相が ϕ_0 である点を $x = x_0$ とすると

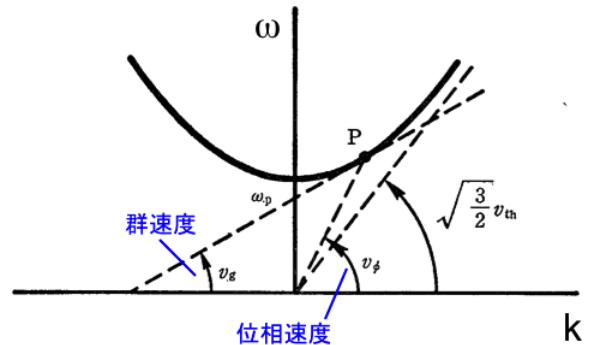
$$kx_0 - \omega t + \delta = \phi_0 \rightarrow x_0 = \frac{\omega t + \phi_0 - \delta}{k} \rightarrow \frac{dx_0}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

となるので、点 $x = x_0$ は速度 $\omega/k = \lambda/T$ で動く。これを**位相速度**と言う。

<分散関係>

一般に、 ω と k との間に成り立つ関係式(例えば、 $\omega = \omega(k)$)を「分散関係」と呼ぶ。位相速度 V_ϕ 、群速度 V_g を以下で定義する。群速度は波束が進む速度である。

$$V_\phi = \frac{\omega}{k}, \quad V_g = \frac{d\omega}{dk},$$



参考文献[1]の図 4.5 を使用し作成

参考

波束は、複数の ω, k を持つ波の重ね合わせとして表現できる(フーリエ変換)。分散関係 $\omega = \omega(k)$ を満たし、波数 k が $2\Delta k$ (ω は $2\Delta\omega$)だけ異なる2つの波 u_1, u_2 を考える。

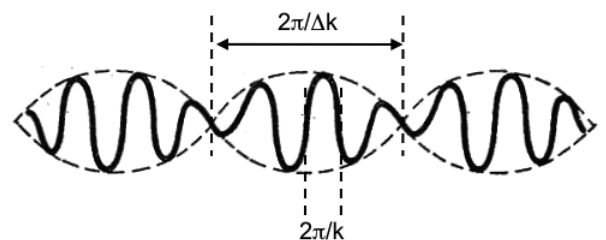
$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= U \cos\{(k + \Delta k)x - \omega(k + \Delta k)t + \delta\} \\ &= U \cos\{kx - \omega(k)t + \delta + (\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= U \cos\{(k - \Delta k)x - \omega(k - \Delta k)t + \delta\} \\ &= U \cos\{kx - \omega(k)t + \delta - (\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t)\} \end{aligned}$$

より、公式 $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$ を用いると

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) = 2U \cos\{\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t\} \cos\{kx - \omega(k)t + \delta\}$$

となる。これは振幅が変調された正弦波を表す。最初の $\cos$ が波束の振幅を表しており、この波束は $\Delta\omega/\Delta k$ の速度で進む。 $\Delta k \rightarrow 0$ の極限を取れば、 $d\omega/dk$ となる。



参考文献[1]の図 4.1

<波数ベクトル>

進行方向が一般的な向きの場合、進行方向の単位ベクトルを $\vec{n}$ とすれば、進行方向に沿う距離は $\vec{n} \cdot \vec{r} = n_x x + n_y y + n_z z$ となるので、 x の代わりにこれを用いて

$$u(\vec{r}, t) = U \cos(k\vec{n} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) = U \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

となる。 $\vec{k} = k\vec{n}$ は長さが k で向きが $\vec{n}$ のベクトルで波数ベクトル(伝播ベクトル)と言う。

<複素数表示>

上記の u の $\cos$ 部分を複素関数 $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ の実部とみなすと

$$u(\vec{r}, t) = U \operatorname{Re} \left[\exp \left\{ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) \right\} \right] = \operatorname{Re} \left[U_c \exp \left\{ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right\} \right]$$

$$U_c = U \exp(i\delta)$$

と書ける ($\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$ に注意)。 U_c は振幅と位相の情報を持っている**複素振幅**。

常に変数の実部が物理量を表すものとして、上を簡単に

$$u(\vec{r}, t) = U_c \exp \left\{ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right\}$$

と書く。さらに、ある k , ω 成分しか問題にしない場合、混乱の恐れがないときは、 U_c と u を区別せず $u(\vec{r}, t) = u \exp \left\{ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right\}$ と書くこともある。

このとき、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = U_c \frac{\partial}{\partial t} \exp \left\{ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right\} = -i\omega U_c \exp \left\{ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right\} = -i\omega u$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_c \frac{\partial}{\partial x} \exp \left\{ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right\} = ik_x U_c \exp \left\{ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right\} = ik_x u$$

など(ここで、 $\frac{\partial}{\partial x}(\vec{k} \cdot \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(k_x x + k_y y + k_z z) = k_x$) より

$\frac{\partial u}{\partial t} = -i\omega u$, $\nabla u = i\vec{k}u$ と書き換えることができる ($\nabla \cdot \vec{A} = i\vec{k} \cdot \vec{A}$, $\nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A}$)。

＜屈折率＞

光速とプラズマ中での位相速度の比を屈折率という(N で表す)。媒質における光の屈折率と同じ定義。

$$N = \frac{c}{V_\phi} = \frac{ck}{\omega}$$

位相速度は波長に比例する($V_\phi = \omega/k = \lambda/T$)から、 N は波長に反比例する。

$$N = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

ここで、 λ_0 は真空中での波長(真空中で伝搬する波(電磁波)の場合)

6-2. プラズマ波の分類

外部磁場の有無、電子の振動(高周波)かイオン・電子の振動(低周波)か、波の進行方向・振動電場・外部磁場の3者の向きの関係、イオン・電子の熱運動の有無などによって様々な波動が励起される。

イオンは電子より 1000 倍程度重いので、ある程度高い周波数では電子のみが振動しイオンは止まっているとみなすことができる。低い周波数ではイオンと電子がともに振動する。

変動磁場 B_1 を伴わない波動を「**静電波**」、変動磁場を伴う波動を「**電磁波**」と言う。

変動電場 E_1 が波の伝播方向 k に平行な波を「**縦波**」、 E_1 が k に垂直な波を「**横波**」という。

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \rightarrow i\vec{k} \times \vec{E}_1 = i\omega \vec{B}_1 \rightarrow \vec{k} \times \vec{E}_1 = \omega \vec{B}_1$$

より、縦波($k \times E_1 = 0$)は静電波($B_1 = 0$)である(静電波は縦波である)。横波は電磁波である。ただし、電磁波が横波とは限らない($k \times E_1 \neq 0$ のとき E_1 と k が垂直とは限らない)。

摂動 磁場 B_1	外部 磁場 B_0	伝播方向 k	高周波 (電子の振 動)	低周波 (イオン・ 電子の振動)
$B_1=0$ (静電波) ($k \times E_1=0$)	$B_0=0$			
	$B_0 \neq 0$	$k // B_0$ (磁場に平行)	電子プラズマ波 (プラズマ振動)	イオン音波
		$k \perp B_0$ (磁場に垂直)	高域混成振動	静電的イオンサ イクロトン波 低域混成振動
$B_1 \neq 0$ (電磁波) ($k \times E_1 \neq 0$)	$B_0=0$		光波	なし
	$B_0 \neq 0$	$k // B_0$ (磁場に平行)	R 波 (右回り円偏波) L 波 (左回り円偏波)	アルヴェン波
		$k \perp B_0$ (磁場に垂直)	O 波 (正常波) ($E_1 // B_0$) X 波 (異常波) ($E_1 \perp B_0$)	磁気音波

以下では、特に断りのない場合、1価の正イオンと電子から成るプラズマを考える。

出典

[1] F.F. Chen 著 (内田岱二郎訳)、プラズマ物理入門、丸善 (1977)