

プラズマ理工学 第 7 回

エネルギー理工学科 3 年秋学期

日時: 月曜日 午前 10 時 30 分～12 時 00 分、場所: 522 講義室

教員: 藤田隆明(ふじたたかあき) 工学部 8 号館南棟4階

5. 電磁流体力学とプラズマの流体としての運動

5-1. 二流体電磁流体力学(MHD)方程式(続き)

<エネルギーの保存(エネルギー輸送方程式)>

粒子種 j の単位体積あたりのエネルギー密度 W_j の保存式を考えると、運動量の場合と同様に

$$\frac{\partial W_j}{\partial t} + \nabla \cdot (W_j \vec{V}_j) = P_j$$

となる (P_j は加熱源)。 W_j は流体としての運動エネルギーと熱エネルギー (個々の粒子の速度のランダム成分に対応する運動エネルギー) の和であり

$$W_j = \frac{1}{2} m_j n_j V^2 + \frac{3}{2} n_j k_B T_j$$

と書くことができる。

短い時間スケールでは、加熱源 P_j は無視できて断熱的な状態とみなすことができる。その場合は通常 of 気体と同様、状態方程式

$$p_j n_j^{-\gamma} = \text{const.} \quad (5-3)$$

が用いられる。ここで粒子運動の自由度を f とすると、 $\gamma = (f+2)/f$ である。3 自由度の場合、 $\gamma = 5/3$ となる。

5-2. 反磁性ドリフト

二流体運動方程式

$$m_j n_j \left(\frac{\partial \vec{V}_j}{\partial t} + (\vec{V}_j \cdot \nabla) \vec{V}_j \right) = n_j q_j (\vec{E} + \vec{V}_j \times \vec{B}) - \nabla p_j + \vec{R}_j$$

を考える。

定常状態で、かつ左辺第2項も無視できる状態を想定する。イオン流体と電子流体との摩擦 R も無視すると

$$\mathbf{0} = n_j q_j (\mathbf{E} + \mathbf{V}_j \times \mathbf{B}) - \nabla p_j \quad (5-4)$$

となる。

B との外積を取ると

$$\mathbf{0} = n_j q_j (\mathbf{E} \times \mathbf{B} + (\mathbf{V}_j \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) - \nabla p_j \times \mathbf{B}$$

ここで、 $\vec{V}_j$ を磁場に平行な成分と垂直な成分に分けて

$\vec{V}_j = V_{j\parallel}(\vec{B}/B) + \vec{V}_{j\perp}$ と書き、ベクトル公式

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$$

を用いると

$$(\vec{V}_j \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{V}_{j\perp} \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{V}_{j\perp})\vec{B} - B^2 \vec{V}_{j\perp} = -B^2 \vec{V}_{j\perp}$$

となるので

$$\begin{aligned} \vec{0} &= n_j q_j (\vec{E} \times \vec{B} - B^2 \vec{V}_{j\perp}) - \nabla p_j \times \vec{B} \\ \rightarrow \vec{E} \times \vec{B} - B^2 \vec{V}_{j\perp} &= \frac{\nabla p_j \times \vec{B}}{n_j q_j} \rightarrow \vec{V}_{j\perp} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \frac{\nabla p_j \times \vec{B}}{n_j q_j B^2} \end{aligned} \quad (5-5)$$

イオン流体(電荷数 Z_i)、電子流体に対しては、それぞれ

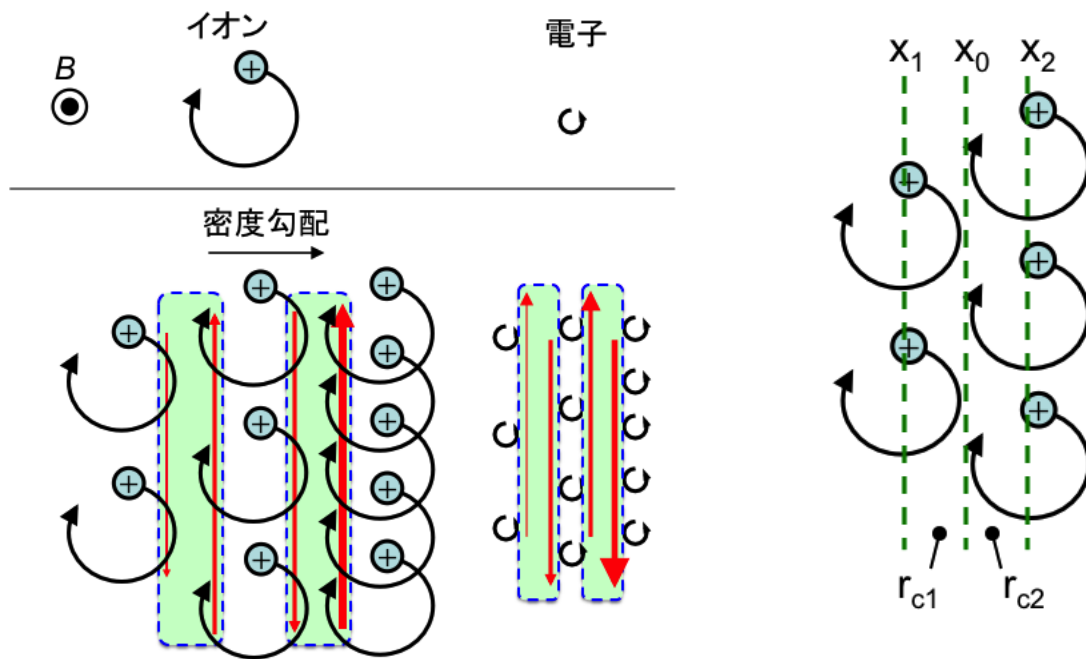
$$\vec{V}_{i\perp} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \frac{\nabla p_i \times \vec{B}}{Z_i n_i e B^2}, \quad \vec{V}_{e\perp} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{\nabla p_e \times \vec{B}}{n_e e B^2}$$

となる。

第1項は、荷電粒子の(旋回中心の)ドリフトで扱った $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトである。第2項は、流体圧力の勾配によって生じるドリフトで、旋回中心のドリフトを伴わない(反磁性ドリフトと言う)：

$$\mathbf{v}_{Dj} = - \frac{\nabla p_j \times \mathbf{B}}{q_j n_j B^2} \quad (5-6)$$

例えば、温度が一様で密度が勾配を持っている場合、下図(左)のよ



うに密度の違いによって正味の流れが生じることが分かる。

では、密度 n が一様で温度が勾配を持っている場合はどうか？ 温度は旋回速度 $V_{\perp}$ の自乗。一見すると、反磁性ドリフト速度 v_D は温度の勾配ではなく $V_{\perp}$ の勾配に比例するように思える。 v_D を決めているのは勾配ではなく「差」であることに注意。つまり、圧力勾配方向を x 軸にとると、 $x = x_0$ における v_D は、 x_0 から旋回半径 r_c だけ離れた $x = x_2$ と $x = x_1$ における $nV_{\perp}$ の差で決まる(上図(右))。 r_c は $V_{\perp}$ に比例する。よって

$$v_D \propto (v_{\perp})_{x=x_2} - (v_{\perp})_{x=x_1} = \frac{dv_{\perp}}{dx} \times (r_{c2} + r_{c1}) = \frac{dv_{\perp}}{dx} \times 2 \times \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

$$= \frac{m}{qB} \times 2v_{\perp} \frac{dv_{\perp}}{dx} = \frac{m}{qB} \times \frac{dv_{\perp}^2}{dx} \propto \frac{1}{qB} \frac{dT}{dx}$$

旋回半径が $1/B$ に比例することから、**反磁性ドリフト速度が $1/B$ に比例する**ことも分かる。

＜旋回中心のドリフト速度と流体としてのドリフト速度が一致しないのはなぜか？＞

流体としての速度を考えると、ある微小体積 ΔV 中に含まれる粒子の速度の平均値を求める

$$\vec{V}_j(\vec{r}, t) = \frac{1}{N_j} \int_{\Delta V} \vec{v} f_j(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v}$$

が、「ある瞬間に ΔV に含まれる粒子」と「 ΔV 内に旋回中心を持つ粒子」は一致しないことに注意。

反磁性ドリフトは質量に依存しない。一方、電荷により向きが異なるので電流 j_D が生じることになる（「**反磁性電流**」と言う）。イオンの電荷数が1でイオンの密度 n_i 、圧力 p_i が電子の密度 n_e 、圧力 p_e に等しいとする（ $n_i = n_e$, $p_i = p_e$ ）と

$$\vec{j}_D = en_e(\vec{V}_{Di} - \vec{V}_{De}) = en_e \left(-\frac{\nabla p_e \times \vec{B}}{n_e e B^2} - \frac{\nabla p_e \times \vec{B}}{n_e e B^2} \right) = -\frac{2\nabla p_e \times \vec{B}}{B^2} = -\frac{\nabla p \times \vec{B}}{B^2}$$

（ $p = p_i + p_e$ ）となる。

5-3. 磁力線方向の力の釣り合い

簡単化した二流体運動方程式(5-4)の磁力線に平行な方向を考える。静電場 $\vec{E}$ を静電ポテンシャル ϕ で表し $E = -\nabla\phi$ とすると式(5-4)は

$$0 = n_j q_j (-\nabla\phi + \vec{V}_j \times \vec{B}) - \nabla p_j$$

となる。これと磁場 $\vec{B}$ との内積を取ると

$$0 = -n_j q_j \vec{B} \cdot \nabla\phi - \vec{B} \cdot \nabla p_j$$

となる。電子を考えると磁力線方向の熱速度が大きいいため温度は磁力線に沿って一様と考えられるので、 $\nabla p_e = \nabla(n_e k_B T_e) = k_B T_e \nabla n_e$ となる。つまり

$$\begin{aligned} 0 &= en_e \vec{B} \cdot \nabla\phi - k_B T_e \vec{B} \cdot \nabla n_e \\ \rightarrow \frac{1}{n_e} \vec{B} \cdot \nabla n_e &= \frac{e}{k_B T_e} \vec{B} \cdot \nabla\phi \end{aligned} \quad (5-7)$$

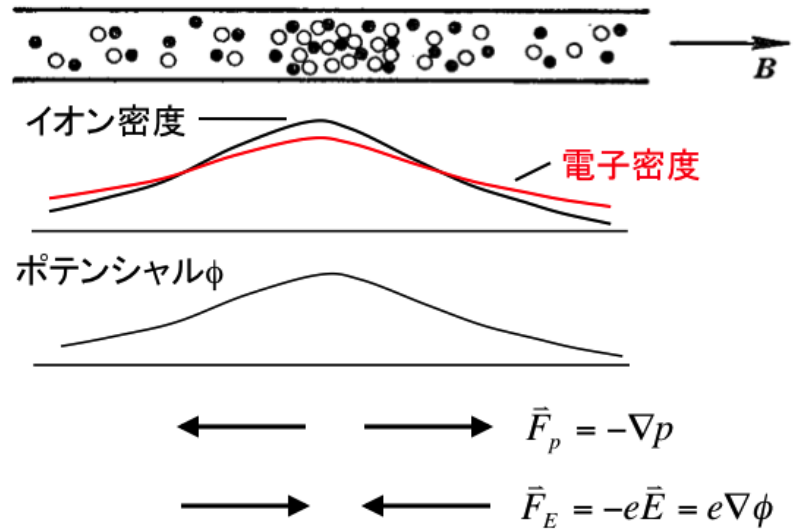
磁力線方向をz軸とすると

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dz} &= \frac{e}{kT_e} \frac{d\phi}{dz} \rightarrow \ln(n_e(z)) - \ln(n_e(0)) = \frac{e}{kT_e} (\phi(z) - \phi(0)) \\ \rightarrow n_e(z) &= n_e(0) \exp \left\{ \frac{e}{kT_e} (\phi(z) - \phi(0)) \right\} \rightarrow n_e(z) = n_{e0} \exp \left\{ \frac{e\phi(z)}{kT_e} \right\} \end{aligned}$$

$$\rightarrow n_e = n_{e0} \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) \quad (5-8)$$

これは**ボルツマン分布**を表す。磁力線が曲がっていても、同じ磁力線上では(5-8)が成り立つ(Appendix A)。

例えば、磁力線方向に(電場を伴わず)圧力勾配ができて電子が逃げ出したとき、電子の逃げた分で電場ができて**電場による力 F_E** と**圧力勾配による力 F_p** が釣り合ったところでこのボルツマン分布が実現される。その後は、イオンが逃げていく速度で電子も逃げていくことになる。つまり、電場ができることで電子の急速な損失が防がれている(両極性拡散として後日取り上げる予定)。



参考文献[1]の図 3.7 を使用し作成

5-4. 一流体電磁流体力学(MHD)方程式

5-1 ではイオン流体、電子流体それぞれに対する方程式を導出したが、多くの場合、興味があるのはイオン、電子それぞれの運動ではなく一流体プラズマとしての流速 $\vec{V}$ や電流密度 $\vec{j}$ である。また、多くの場合準中性条件(正味電荷はいたるところでゼロ)が成り立ち $n_i = n_e$ を仮定してよく(1価イオンの場合)、それを拘束条件として定式化するのが便利である。 $m_e \ll m_i$ より

$$\text{質量密度 } \rho_m = m_i n_i + m_e n_e = (m_i + m_e) n_e \sim m_i n_e$$

$$\text{電荷密度 } \rho_e = e n_i + (-e) n_e = e(n_i - n_e) = 0$$

$$\text{圧力 } p = p_i + p_e$$

$$\text{流速 } \vec{V} = \frac{n_i m_i \vec{V}_i + n_e m_e \vec{V}_e}{n_i m_i + n_e m_e} = \frac{m_i \vec{V}_i + m_e \vec{V}_e}{m_i + m_e} \sim \vec{V}_i$$

$$\text{電流密度 } \vec{j} = e n_i \vec{V}_i + (-e) n_e \vec{V}_e = e n_e (\vec{V}_i - \vec{V}_e)$$

である。

一流体プラズマの質量保存の考察から

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_m \vec{V}) + (m_i + m_e) S$$

一流体プラズマの電荷保存の考察から

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

一流体プラズマの運動量保存の考察から

$$\rho_m \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p$$

がそれぞれ得られる。

電流密度を決める式は、電子に対する運動方程式

$$m_e n_e \left(\frac{\partial \vec{V}_e}{\partial t} + (\vec{V}_e \cdot \nabla) \vec{V}_e \right) = -en_e (\vec{E} + \vec{V}_e \times \vec{B}) - \nabla p_e + \vec{R}_e$$

から求める。電子の慣性が無視できる程度の時間スケールを考えると左辺は無視できて

$$\vec{E} + \vec{V}_e \times \vec{B} = -\frac{\nabla p_e}{en_e} + \frac{1}{en_e} \vec{R}_e$$

となる。これに、以下の2つの式

$$\vec{V}_e = \vec{V}_i - (\vec{V}_i - \vec{V}_e) = \vec{V}_i - \frac{\vec{j}}{en_e} \cong \vec{V} - \frac{\vec{j}}{en_e}$$

$$\vec{R}_e = -m_e n_e \nu_{ei} (\vec{V}_e - \vec{V}_i) = \eta e^2 n_e^2 (\vec{V}_i - \vec{V}_e) = \eta en_e \vec{j} \quad \because \quad \eta = \frac{m_e \nu_{ei}}{e^2 n_e}$$

を代入すると

$$\vec{E} + \left(\vec{V} - \frac{\vec{j}}{en_e} \right) \times \vec{B} = -\frac{\nabla p_e}{en_e} + \eta \vec{j}$$

となり

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{1}{en_e} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e)$$

が得られる。これを**一般化オーム則**という。多くの場合、右辺第2項および第3項は無視できて、

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}$$

となる。

以上をまとめると、一流体 MHD 方程式は以下のセットで表される。

$$\text{質量保存: } \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_m \vec{V}) + (m_i + m_e) S \quad (5-9)$$

$$\text{電荷保存: } \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (5-10)$$

$$\text{運動量保存: } \rho_m \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p \quad (5-11)$$

$$\text{一般化オーム則: } \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (5-12)$$

$$\text{状態方程式(エネルギー保存): } p_j n_j^\gamma = \text{const.} \quad (5-13)$$

これらとマクスウェルの方程式

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5-14a), (5-14b)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \left(+ \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (5-14c), (15-14d)$$

とを合わせて、プラズマの運動が決まることになる((5-14d)の変位電流の項は MHD 方程式で扱う現象に対しては通常無視してよい)。

<一般化オーム則の意味>

一般化オーム則の式と荷電粒子の運動方程式 $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ との類似性に気づくであろう。運動方程式では $q\vec{E}$ の項をクーロン力、 $q\vec{v} \times \vec{B}$ の項をローレンツ力と見なしたが、 $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ を電荷 q に作用する実効的な電場と考えることもできる。実際、磁場 $\vec{B}$ 中を速度 $\vec{v}$ で運動す

る系から観測する電場が $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ となることが知られている(「ローレンツ変換」)。速度 $\vec{v}$ で流れるプラズマは、 $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ を実効的な電場として「感じる」と考えてよい。

Appendix A.

磁力線の単位接線ベクトルを t とすると $B = Bt$ で

$$B \cdot \nabla n_e = Bt \cdot \nabla n_e$$

は磁力線方向の方向微分係数の B 倍である。すなわち、磁力線に沿う距離の座標を s とすると、 $t \cdot \nabla n_e = \frac{\partial}{\partial s} n_e$ 。同様に、 $B \cdot \nabla \phi = B \frac{\partial}{\partial s} \phi$ 。よって(5-7)式は

$$\begin{aligned} \frac{B}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial s} &= \frac{eB}{k_B T_e} \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial s} \ln(n_e) = \frac{e}{k_B T_e} \frac{\partial \phi}{\partial s} \\ \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \ln(n_e) - \frac{e\phi}{k_B T_e} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

となる。これは磁力線に沿って $\ln(n_e) - \frac{e\phi}{k_B T_e}$ が一定であることを示し、

$$\ln(n_e(s)) - \frac{e}{k_B T_e} \phi(s) = \ln(n_e(0)) - \frac{e}{k_B T_e} \phi(0)$$

が成り立つ。あとは同様。

来週 11 月 27 日は休講。次回講義は 12 月 4 日となる。

プラズマ理工学レポート(第3回)課題
12月4日(月)の講義開始時に提出すること。

問1 1回の衝突で90度以上散乱されるクーロン衝突断面積 σ は

$$\sigma = \pi b_0^2, \quad b_0 = \frac{|q_i q_j|}{4\pi\epsilon_0 m_r V_r^2}$$

で与えられる。ここで、 q_i 、 q_j はそれぞれ、テスト粒子、標的粒子の電荷、 m_r は換算質量、 V_r はテスト粒子と標的粒子の相対速度の大きさである。テスト粒子としてエネルギー100 eVの電子、標的粒子として電子、重水素イオン(D^+)、完全電離炭素イオン($^{12}C^{6+}$)を考える。

- (1) 標的粒子は静止しているものとする。電子、 D^+ 、 $^{12}C^{6+}$ を標的粒子としたときの電子の σ をそれぞれ σ_e 、 σ_D 、 σ_C とすると、 σ_D/σ_e 、 σ_C/σ_e を有効数字2桁で求めよ。
- (2) 標的粒子が100 eVのエネルギーを持つ電子の場合を考える。このとき、相対速度はテスト粒子の速度ベクトル V_i と標的粒子の速度ベクトル V_j とのなす角 θ に依存する。 $|V_i| = |V_j| = V_0$ とする。
 - (a) $V_r^2/V_0^2 = |V_i - V_j|^2/V_0^2$ を θ を用いて表せ。
 - (b) V_i に対する V_j の向きが等方的であるとして、 V_r^2 の平均値 $\langle V_r^2 \rangle = (1/4\pi) \int V_r^2 d\Omega$ の V_0^2 に対する比 $\langle V_r^2 \rangle/V_0^2$ を求めよ。 $\langle V_r^2 \rangle$ を上 b_0 の式の中の V_r^2 の代わりに用いて σ を求めると、標的粒子が静止している電子の場合と比べて σ は何倍になるか？

問2 一様な密度で電子とイオンが分布したプラズマ(中性粒子は存在しない)に一様な静電場 E が印加され、電子が電場に沿って一様かつ一定の速度 V_e で運動し、それによる電流密度 j が発生している。電子の質量を m_e 、密度を n_e 、電荷を $-e$ とし、イオンは静止しているものとする。 E の方向を x 軸正方向とし、 V_e 及び j は x 成分を表すとする。

- (1) イオンとのクーロン衝突による電子の減速時間の逆数(衝突周波数)を ν_{ei} として、電子に働く力(x 成分)の合計が0となることを示す式を書け。
- (2) 上の式を解いて、電子の速度 V_e を求めよ。それから電子による電流密度 j を求め、プラズマの電気抵抗率 η を m_e 、 n_e 、 ν_{ei} および e を用

いて表せ。

問 3 一様な磁場中に、水素イオンと電子からなるプラズマがある。水素イオンと電子の密度と温度は同じ場所では等しいが、密度も温度も x 軸正方向に向かって大きくなっている。磁場は z 軸正方向の向きである。

(1) 次の文の括弧の中から正しいものを選べ。

- (a) 水素イオンの反磁性ドリフトと電子の反磁性ドリフトは (同じ向き、逆向き) である。
- (b) 水素イオンの反磁性ドリフト速度は電子の反磁性ドリフト速度 (より大きい、と同じ、より小さい) 。
- (c) 水素イオンの反磁性ドリフトの向きは (x 軸、 y 軸、 z 軸) の (正方向、負方向) である。
- (d) 水素イオンの反磁性ドリフトの大きさは、磁場が強いほど (小さくなる、大きくなる) 。ただし、密度、温度は変わらないとする。

(2) 磁場の強さを $B = 0.50 \text{ T}$ 、プラズマ圧力(イオンの圧力と電子の圧力の和)の勾配を $dp/dx = 3.0 \text{ kPa/m}$ とする。反磁性電流密度の向きと大きさを求めよ。

問 4 プラズマをイオン流体と電子流体の2つの流体(流速ゼロの定常状態にある)からなると考える。電子密度を $n_e(x)$ 、電子温度を T_e (一様)、静電ポテンシャルを $\phi(x)$ とし、磁場はないものとする。電子の電荷を $-e$ 、ボルツマン定数を k_B とする。

- (1) 単位体積の電子流体に作用する電場による力の x 成分と圧力勾配による力の x 成分を示せ。変数は上で与えられたもののみを用いること。
- (2) 上記(1)の2つの力の和が 0 となることから、電子密度 n_e を ϕ の関数として求めよ。電子温度が $k_B T_e = 10 \text{ eV}$ のとき、 $\phi = -5 \text{ V}$ の点における電子密度 n_1 と $\phi = 15 \text{ V}$ の点における電子密度 n_2 との比 n_1/n_2 の値を有効数字2桁で求めよ。

出典

[1] F.F. Chen 著(内田岱二郎訳)、プラズマ物理入門、丸善(1977)