2023 年 11 月 13 日

プラズマ理工学　第 6 回

エネルギー理工学科　３年秋学期
日時:　月曜日　午前10時30分～12時00分、場所:522 講義室
教員:藤田隆明(ふじたたかあき)　工学部 8 号館南棟4階

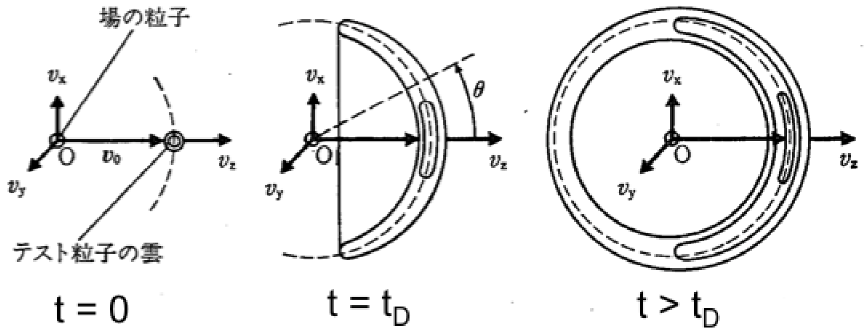
4-3. 緩和過程

　ある一定の初期速度を持ったテスト粒子の速度は、場の粒子とのクーロン衝突により速度空間内で広がっていく。これを緩和過程という。広がる速さを次のような時定数で表す。

減速時間τ_s: $\dfrac{dV}{dt}=-\dfrac{V}{\tau_s}$　初期の速度方向の速度が減少する時定数

等方化時間τ_D: $\dfrac{dV_\perp^2}{dt}=\dfrac{V^2}{\tau_D}$　速度の方向が変わる(広がる)時定数

エネルギー損失時間τ_E: $\dfrac{dW}{dt}=-\dfrac{W}{\tau_E}$　エネルギーが減少する時定数



出典[1]

　減速時間は、運動量伝達周波数ν_mの逆数に等しい。テスト粒子の速度が場の粒子の熱速度より十分大きいとき、τ_s、τ_D、τ_E はいずれもテスト粒子の速度V_iの３乗に比例して長くなる。つまり、定常状態に落ち着く(「熱化する」)のに、高速(高エネルギー)の粒子ほど時間がかかる。

　温度の異なる粒子種を混合するとクーロン衝突により温度は等しくなっていく。粒子種i, jの温度をT_i, T_jとするとき、両者の温度が近づく時定数(温度緩和時間)τ_T は

$$\frac{dT_i}{dt}=-\frac{T_i-T_j}{\tau_T}$$

で定義される。

マクスウェル分布をしていない電子とイオンがあったとすると

(i)　まず電子がマクスウェル分布になる。

(ii)　次にイオンがマクスウェル分布になる。

(iii)　最後に電子の温度とイオンの温度が等しくなる。

プラズマにおいて、電子とイオンの温度が異なることは珍しくはない。電子とイオンとの温度緩和時間が長いのは、質量が大きく異なる粒子間のクーロン衝突では、エネルギーのやりとりがほとんど起こらないからである(弾性衝突の場合に類似)。また、電子とイオンとの温度緩和時間はイオン温度にほとんど依存せず、電子温度でほぼ決まる(相対速度が電子温度で決まるから)。

4-4. プラズマの電気抵抗

電流は荷電粒子の運動により生じる。簡単のため、1価の正イオンと電子のみからなるプラズマを考える。電子密度(＝イオン密度)をn_{e}とすると、電流密度は

$$\vec{j} = n_e e\vec{\mathrm{v}}_i + n_e(-e)\vec{\mathrm{v}}_e = n_e e(\vec{\mathrm{v}}_i - \vec{\mathrm{v}}_e)。$$

電子の質量はイオンの質量よりずっと小さいので、通常は$\left|\vec{\mathrm{v}}_i\right| << \left|\vec{\mathrm{v}}_e\right|$であり、

$$\vec{j} = -n_e e\vec{\mathrm{v}}_e。$$

電流密度は電場に比例すると考えられるから

$$\vec{E} = \eta\vec{j},\quad \vec{j} = \sigma\vec{E}$$

と書いて、電気抵抗率η、電気伝導率σを定義。ただし、磁場 B があると、旋回運動の効果により B に垂直方向に流れる電流は平行方向に流れる電流とは性質が異なるので、平行成分と垂直成分を区別して

$$E_{//} = \eta_{//} j_{//},\quad \vec{E}_{\perp} = \eta_{\perp}\vec{j}_{\perp}\quad (\text{あるいは}\ \vec{E}_{\perp} = \overleftrightarrow{\eta}_{\perp} \bullet \vec{j}_{\perp})$$

$$j_{//} = \sigma_{//} E_{//},\quad \vec{j}_{\perp} = \sigma_{\perp}\vec{E}_{\perp}\quad (\text{あるいは}\ \vec{j}_{\perp} = \overleftrightarrow{\sigma}_{\perp} \bullet \vec{E}_{\perp})$$

と書く。

抵抗率は、電子がイオンあるいは中性原子との衝突により散乱される頻度で決まる。磁場方向について考えると、電子の運動方程式は

$$m_e \frac{d\mathrm{v}_{e//}}{dt} = -eE_{//} - F_{//} \qquad (4\text{-}16)$$

ここで、$F_{//}$は、衝突により電子が減速される力（単位時間あたりの運動量の損失量）を表わす。電子とイオンとの衝突（クーロン衝突）、電子と中性原子との衝突（剛体衝突）による電子の減速時間をそれぞれτ_{ei}, τ_{en}、衝突周波数をν_{ei}, ν_{en}とすると、(4−14)式より

$$F_{//} = \left(\frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{en}}\right) m_e \mathrm{v}_{e//} = \left(\nu_{ei} + \nu_{en}\right) m_e \mathrm{v}_{e//} \qquad (4\text{-}17)$$

電子はどれも同じ速度で動いているとみなして電子同士の衝突は考えない。定常状態では、(4−16), (4−17)より

$$0 = -eE_{//} - \left(\nu_{ei} + \nu_{en}\right) \bullet m_e \mathrm{v}_{e//}$$

$$\mathrm{v}_{e//} = -\frac{eE_{//}}{m_e\left(\nu_{ei} + \nu_{en}\right)}$$

$$j_{//} = -en_e \mathrm{v}_{e//} = \frac{e^2 n_e E_{//}}{m_e\left(\nu_{ei} + \nu_{en}\right)}$$

となるので

$$\eta_{//} = \frac{E_{//}}{j_{//}} = \frac{m_e\left(\nu_{ei} + \nu_{en}\right)}{e^2 n_e} = \frac{m_e}{e^2 n_e}\left(\frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{en}}\right)$$

弱電離プラズマでは、$\nu_{\mathrm{en}} \gg \nu_{\mathrm{ei}}$ （$\tau_{\mathrm{en}} \ll \tau_{\mathrm{ei}}$）であり$\nu_{\mathrm{en}}$は中性粒子の密度$n_{\mathrm{n}}$に比例する（(4−15)式）ので、抵抗率は$n_{\mathrm{n}}$に比例し電子密度$n_{\mathrm{e}}$に反比例する。

完全電離プラズマでは、$\nu_{\mathrm{ei}} \gg \nu_{\mathrm{en}}$ （$\tau_{\mathrm{ei}} \ll \tau_{\mathrm{en}}$）であり、$\nu_{\mathrm{ei}} = 1/\tau_{\mathrm{ei}}$はイオンの密度$n_{\mathrm{i}} = n_{\mathrm{e}}$に比例するので抵抗率は$n_{\mathrm{e}}$に依存しない。また、$\nu_{\mathrm{ei}}$は電子温度$T_e$の 3/2 乗に反比例するので

$$\eta_{//}[\Omega \bullet \mathrm{m}] = 1.65 \times 10^{-9} \times \frac{Z \ln \Lambda}{\left(k_B T_e[\mathrm{keV}]\right)^{3/2}} \qquad (4\text{-}18)$$

となる。ここで、Zはイオンの価数。T_{e}= 1 keV、Z=1 のとき$\eta_{//}$~$2\mathrm{x}10^{-8}\Omega$m となり、これは 20°C の銅の抵抗率 $2\mathrm{x}10^{-8}\Omega$m と同程度。磁場に垂直な方向の抵抗率 $\eta_{\perp}$については、$\eta_{//}$の 1.96 倍になるとの計算結果がある。

5. 電磁流体力学とプラズマの流体としての運動

5-1. 二流体電磁流体力学(MHD)方程式

基本的な方程式（ボルツマン方程式）から電磁流体力学方程式を導くやり方もあるが、ここでは、直感的な方法で導出する。

正イオン（電荷$q_i = +e$、質量m_i）と電子（電荷$q_e = -e$、質量m_e）からなるプラズマについて、正イオンからなる流体と電子からなる流体を考えそれぞれについての方程式を導く。

粒子数の保存、運動量の保存、エネルギーの保存、の3つの保存則を考える。時刻t、場所$\vec{r}$における、正イオン、電子の個数密度をそれぞれ$n_j(\vec{r},t)$（$j = i,e$）、流体速度を$\vec{V}_j(\vec{r},t)$（$j = i,e$）、圧力を$p_j(\vec{r},t)$（$j = i,e$）とする。ここで、$\vec{V}_j(\vec{r},t)$は個々の粒子の速度$\boldsymbol{v}$を平均したものであり、分布関数を$f_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$とすれば

$$\vec{V}_j(\vec{r},t)=\frac{\int_{\Delta V}\vec{v}f_j(\vec{r},\vec{v},t)d\vec{r}\,d\vec{v}}{\int_{\Delta V}f_j(\vec{r},\vec{v},t)d\vec{r}\,d\vec{v}}=\frac{1}{N_j}\int_{\Delta V}\vec{v}f_j(\vec{r},\vec{v},t)d\vec{r}\,d\vec{v}$$

で与えられる（ΔVは$\vec{r}$を含む微小体積、N_jはΔVに含まれる粒子の数）。

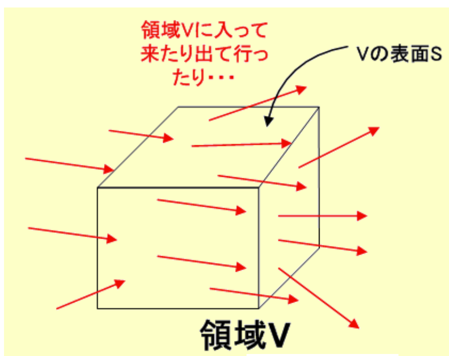
＜粒子数の保存＞

微小体積ΔVの表面をΔSとする。ΔSを通過してΔV内から流出する粒子数は単位時間単位面積あたり$n_j\vec{V}_j \bullet \vec{n}$である（$\vec{n}$は$\Delta S$の法線単位ベクトル）。$\Delta V$での粒子数の保存から

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Delta V} n_j dV = -\int_{\Delta S} n_j\vec{V}_j \bullet \vec{n}dS + \int_{\Delta V} S_j dV$$

ここで、S_jは粒子源（負のときはシンク）を表す（荷電交換などによる）。ガウスの発散定理を用いると右辺第一項は$-\mathrm{div}(n_j\vec{V}_j)$の体積積分になるから

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = -\nabla \bullet (n_j\vec{V}_j) + S_j \qquad (5\text{-}1)$$



出典[2]

＜運動量の保存（運動方程式）＞

例えば、単位体積あたりの運動量のx方向成分$n_j m_j V_{j,x}$を考える。上と同様に微小体積ΔVから流出する運動量のx方向成分は$-\mathrm{div}(n_j m_j V_{j,x}\vec{V}_j)$の体積積分で与えられるから、その微小体積中へ働く単位体積あたりの外力のx成分を$F_{j,x}$とすれば、運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Delta V} n_j m_j V_{j,x} dV = -\int_{\Delta V} \nabla \bullet \left(n_j m_j V_{j,x}\vec{V}_j\right) dV + \int_{\Delta V} F_{j,x} dV$$

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n_j m_j V_{j,x}\right) + \nabla \bullet \left(n_j m_j V_{j,x}\vec{V}_j\right) = F_{j,x}$$

左辺は

$$LHS = m_j \frac{\partial n_j}{\partial t} V_{j,x} + m_j n_j \frac{\partial V_{j,x}}{\partial t} + m_j V_{j,x} \nabla\cdot\left(n_j \boldsymbol{V}_j\right) + m_j \nabla V_{j,x}\cdot\left(n_j \boldsymbol{V}_j\right)$$

$$= m_j V_{j,x}\left(\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla\cdot\left(n_j \boldsymbol{V}_j\right)\right) + m_j n_j \left(\frac{\partial V_{j,x}}{\partial t} + \nabla V_{j,x}\cdot \boldsymbol{V}_j\right)$$

$$= m_j n_j \left(\frac{\partial V_{j,x}}{\partial t} + \boldsymbol{V}_j \cdot \nabla V_{j,x}\right)$$

となる。（式(5-1)を用いたが簡単のため$S_j = 0$とした）。ここでベクトル公式

$$\nabla \bullet \left(f\vec{A}\right) = f\nabla \bullet \vec{A} + \nabla f \bullet \vec{A}$$

を用いている。

一方、流体要素に働く外力は、粒子に働く力の総計の他に隣り合う同一種流体要素から受ける力（圧力） $-\nabla p_j$（Appendix A 参照）と他粒子種流体から（クーロン衝突により）受ける力$\vec{R}_j$があり

$$\vec{F}_j = n_j q_j\left(\vec{E} + \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{j}} \times \vec{B}\right) - \nabla p_j + \vec{R}_j$$

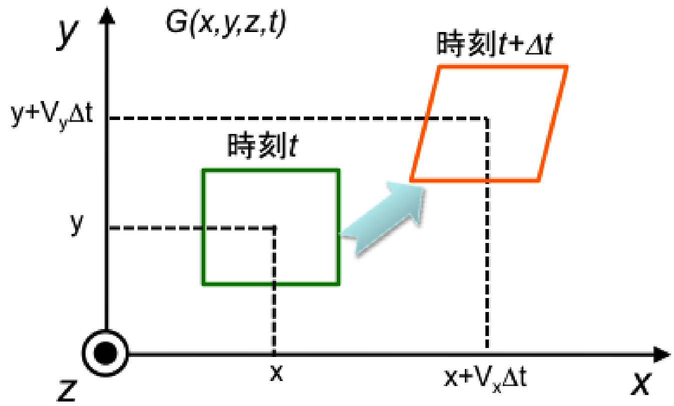
と書くことができるので、運動方程式は以下となる:

$$m_j n_j\left(\frac{\partial \vec{V}_j}{\partial t} + (\vec{V}_j \bullet \nabla)\vec{V}_j\right) = n_j q_j\left(\vec{E} + \vec{V}_j \times \vec{B}\right) - \nabla p_j + \vec{R}_j \qquad (5\text{-}2)$$

他粒子種流体から受ける力は、他粒子種流体との速度の差に比例すると考えられ、運動量に関する衝突周波数νを用いて次のように書くことができる。

イオン流体が電子流体から受ける力：$\vec{R}_i = -m_i n_i \nu_{ie} (\vec{\mathrm{v}}_i - \vec{\mathrm{v}}_e)$

電子流体がイオン流体から受ける力：$\vec{R}_e = -m_e n_e \nu_{ei} (\vec{\mathrm{v}}_e - \vec{\mathrm{v}}_i)$



作用反作用の原理より、明らかに$\vec{R}_i = -\vec{R}_e$となる。$\nu_{ie} \neq \nu_{ei}$に注意（ν_{ie}は電子との衝突によりイオンがその運動量を失う時定数の逆数、ν_{ei}はイオンとの衝突により電子がその運動量を失う時定数の逆数）。

なお、時刻tにおいて場所$\boldsymbol{r}$ にあった流体要素が、時刻$t + \Delta t$ には場所$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{V}_j \Delta t$ に移動すると考えると、任意の物理量Gに対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{G}\left(\vec{r} + \vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{j}} \Delta t,\, t + \Delta t\right) &= \mathrm{G}\left(x + \mathrm{V}_{j,x} \Delta t,\, y + \mathrm{V}_{j,y} \Delta t,\, z + \mathrm{V}_{j,z} \Delta t,\, t + \Delta t\right) \\
&= \mathrm{G}(\vec{r}, t) + \frac{\partial G}{\partial x} \mathrm{V}_{j,x} \Delta t + \frac{\partial G}{\partial y} \mathrm{V}_{j,y} \Delta t + \frac{\partial G}{\partial z} \mathrm{V}_{j,z} \Delta t + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t \\
&= \mathrm{G}(\vec{r}, t) + \left(\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{j}} \bullet \nabla \mathrm{G} + \frac{\partial G}{\partial t}\right) \Delta t
\end{aligned}
$$

より

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} G = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{G(\vec{r} + \vec{V}_j \Delta t, t + \Delta t) - G(\vec{r}, t)}{\Delta t} = \vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{j}} \bullet \nabla G + \frac{\partial G}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{j}} \bullet \nabla\right) G
$$

となる。左辺をラグランジュ微分という。

ラグランジュ微分を用いれば、粒子数の保存式、運動量の保存式はそれぞれ

$$
\frac{dn_j}{dt} = S_j
$$

$$
m_j n_j \frac{d\vec{V}_j}{dt} = \vec{F}_j
$$

と書くことができる。流体（連続体）をあたかも固体（独立体）のように扱うことができる。本稿では、空間に固定された領域での出入りを考えて保

存則を定式化したが、ラグランジュ微分では流体とともに動く要素を考える。

＜エネルギーの保存（エネルギー輸送方程式）＞

粒子種jの単位体積あたりのエネルギー密度W_jの保存式を考えると、運動量の場合と同様に

$$\frac{\partial W_j}{\partial t} + \nabla \bullet (W_j \vec{V}_j) = P_j$$

となる（P_jは加熱源）。W_jは流体としての運動エネルギーと熱エネルギー（個々の粒子の速度のランダム成分に対応する運動エネルギー）の和であり

$$W_j = \frac{1}{2} m_j n_j V^2 + \frac{3}{2} n_j k_B T_j$$

と書くことができる。

短い時間スケールでは、加熱源P_jは無視できて断熱的な状態とみなすことができる。その場合は、通常の気体と同様、状態方程式

$$p_j n_j^{-\gamma} = const. \tag{5-3}$$

が用いられる。ここで粒子運動の自由度をfとすると、$\gamma = (f+2)/f$である。3 自由度の場合、$\gamma = 5/3$となる。

Appendix A.

流体の圧力による力の導出

(x,y,z)に中心を持つ直方体を考える。x,y,z 軸方向の長さをそれぞれΔx, Δy, Δz とする。

x=x+Δx の面に受ける力は−x 方向に p(x+Δx/2,y,z) ΔyΔz、

x=x−Δx の面に受ける力は、+x 方向に p(x−Δx/2,y,z) ΔyΔz なので、

x 方向の正味の力は、+x 方向に

$$p(x-\Delta x/2,y,z)\Delta y\Delta z - p(x+\Delta x/2,y,z)\Delta y\Delta z$$

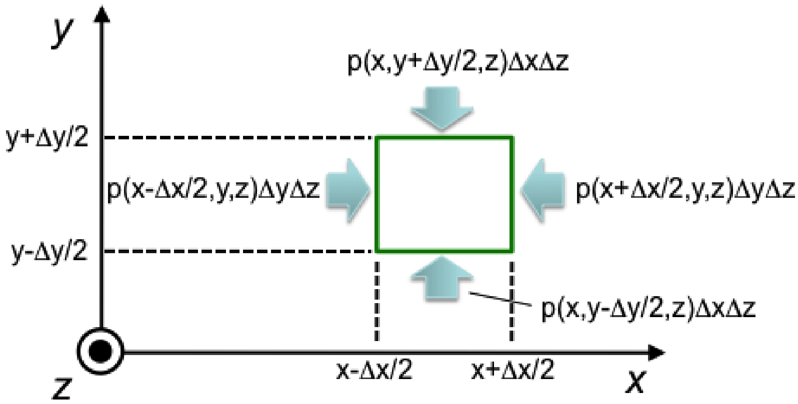
$$= -\left(p(x+\Delta x/2,y,z) - p(x-\Delta x/2,y,z)\right)\Delta y\Delta z$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

となる。同様に、y 方向、z 方向の正味の力は、それぞれ

$$-\frac{\partial p}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z,\quad -\frac{\partial p}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$ となるので、単位体積あたりの力は

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x},-\frac{\partial p}{\partial y},-\frac{\partial p}{\partial z}\right)=-\nabla p$$ となる。



出典
[1] 内田岱二郎、井上信幸「核融合とプラズマの制御」東京大学出版会(1980)図 11.5.1
[2] web サイト「物理のかぎしっぽ」http://hooktail.sub.jp/vectoranalysis/GaussDivTheorem/