

プラズマ理工学 第 5 回

エネルギー理工学科 3 年秋学期

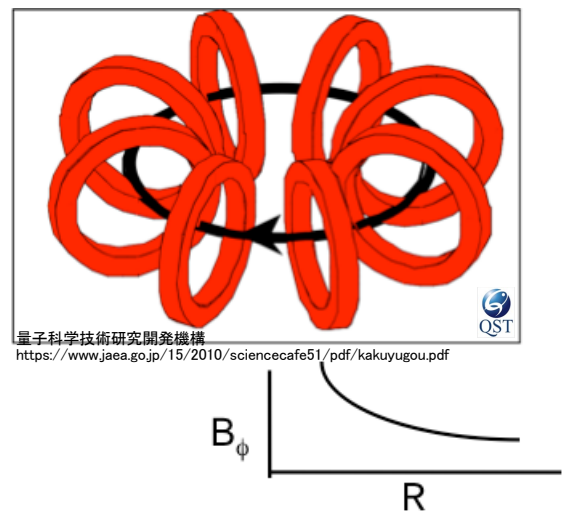
日時: 月曜日 午前10時30分～12時00分、場所: 522 講義室

教員: 藤田隆明(ふじたたかあき) 工学部 8 号館南棟4階

3-5-4. 単純トロイダル磁場におけるドリフト

磁力線に沿う粒子の損失をなくすために、磁場を円環状(トロイダル状)にすることが考えられる。

Z 軸に沿って流れる電流が作る単純トロイダル磁場を考える。磁力線は Z 軸を中心とする円弧状で磁場強度は Z 軸からの距離に反比例して小さくなるので、「湾曲ドリフト」と「磁場勾配ドリフト」の両方が起きることになる。円柱座標系(R, ϕ, Z)を用いると



$$\mathbf{B} = \frac{B_{\phi 0} R_0}{R} \mathbf{e}_\phi,$$

$$B = \frac{|B_{\phi 0}| R_0}{R},$$

$$\nabla B = \frac{\partial B}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial B}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial B}{\partial Z} \mathbf{e}_Z = -\frac{|B_{\phi 0}| R_0}{R^2} \mathbf{e}_R$$

となるので、 $R_c = R \mathbf{e}_R$ に注意して

$$\mathbf{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{R} \frac{\mathbf{e}_R \times \mathbf{B}}{qB^2} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R} \times \frac{R^2}{qB_{\phi 0}^2 R_0^2} \times \mathbf{e}_R \times \frac{B_{\phi 0} R_0}{R} \mathbf{e}_\phi = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB_{\phi 0} R_0} \mathbf{e}_Z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\nabla B} &= \frac{mv_{\perp}^2 \mathbf{B} \times \nabla B}{2qB^3} = \frac{mv_{\perp}^2}{2q} \times \frac{R^3}{|B_{\phi 0}|^3 R_0^3} \times \frac{B_{\phi 0} R_0}{R} \mathbf{e}_\phi \times \left(-\frac{|B_{\phi 0}| R_0}{R^2} \mathbf{e}_R \right) \\ &= \frac{mv_{\perp}^2}{2qB_{\phi 0} R_0} \mathbf{e}_Z \end{aligned}$$

となり、両者を合わせたドリフト速度は

$$\mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{m}{qB_{\phi 0}R_0} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \mathbf{e}_z$$

となる。Z 軸方向で、電荷符号により向きが異なる。磁場の向き ($B_{\phi 0}$ の符号) が反転するとドリフトの向きも反転する。湾曲ドリフトは $v_{\parallel}$ に、磁場勾配ドリフトは $v_{\perp}$ に依存する。

一般に、電流密度が存在しない領域の磁場 (真空磁場という) においては (すなわち $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ が成り立つとき)

$$\frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2} = - \frac{(\nabla B)_{\perp}}{B}$$

が成り立ち

$$\mathbf{v}_R = mv_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{qB^3}$$

となることが知られている。磁場勾配ドリフトと合わせて

$$\mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{\nabla B} = m \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{qB^3}$$

となる。

3-5-5. 荷電粒子のドリフトのまとめ

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} \text{ドリフト: } \mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

力による
ドリフト:

$$\mathbf{v}_F = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}$$

$$\text{湾曲ドリフト: } \mathbf{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c^2} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{qB^2}$$

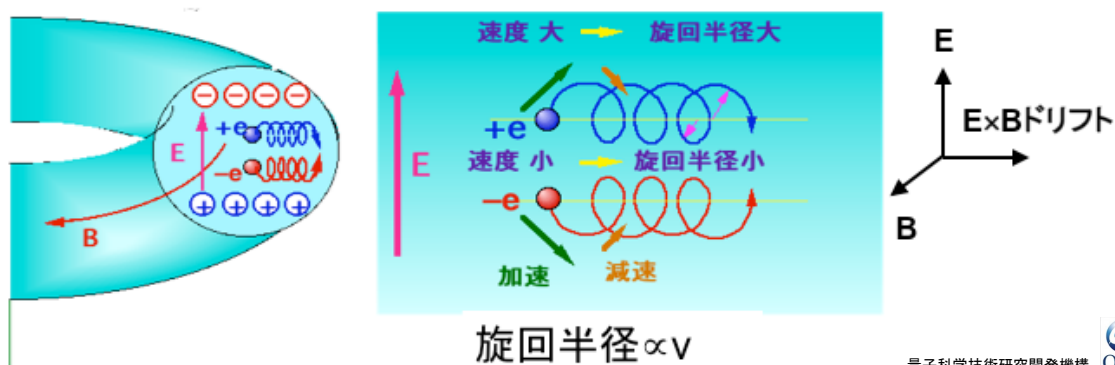
磁場勾配
ドリフト:

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2qB^3} \mathbf{B} \times \nabla B$$

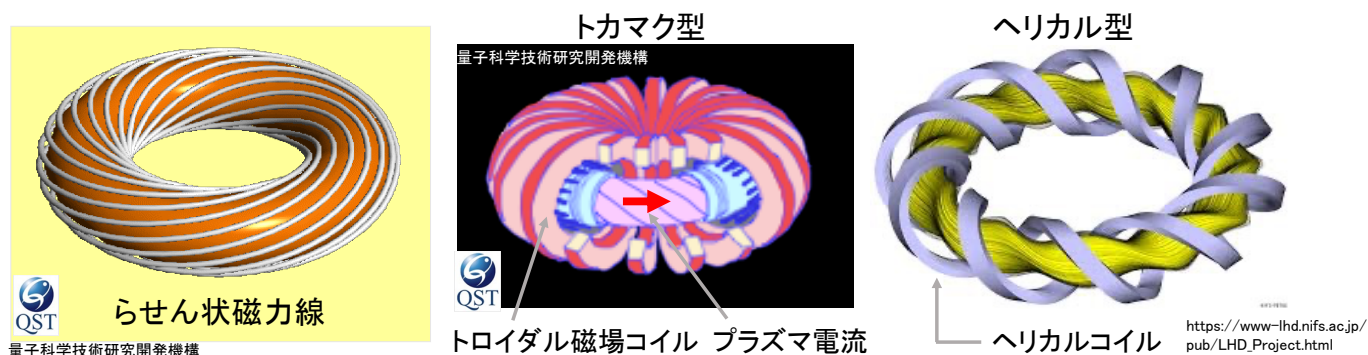
- $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト以外は正電荷と負電荷で向きが逆
- 電子とイオンとでドリフト速度は同程度

3-6. トーラス磁場による荷電粒子の閉じ込め

単純トロイダル磁場では、湾曲ドリフト及び磁場勾配ドリフトによりイオンと電子は反対方向にドリフトする。その結果、Z 軸方向の電場ができる。この電場により $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトが発生する。その向きはイオン、電子ともトーラス外側への向きである。そのため、プラズマは急速に失われ単純トロイダル磁場ではプラズマを閉じ込めることはできない。



磁力線をひねってらせん状にすれば、電場がショートされるので $E \times B$ ドリフトがなくなりプラズマの閉じ込めが可能となる。これがトラス磁場によるプラズマ閉じ込めの原理。らせん状磁場を作るために、トカマク型とヘリカル型の2種類の方法がある。



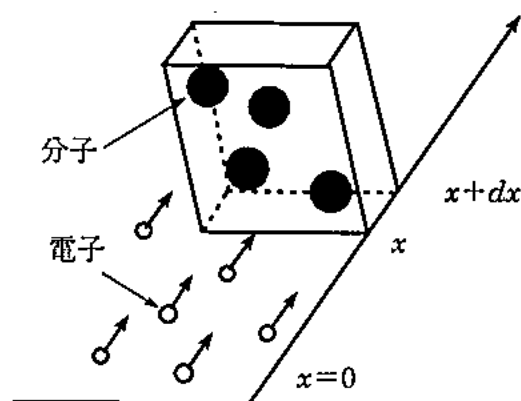
4. クーロン衝突と電気抵抗

4-1. 粒子間衝突の基礎

衝突: 粒子間(量子間)の相互作用。弾性衝突(荷電交換)、非弾性衝突(励起、電離、解離、再結合)、クーロン衝突など。

衝突の起こりやすさ = 衝突断面積 σ (単位 m^2)

個数密度 $N[\text{m}^{-3}]$ の標的粒子を含む領域を Δx [m] 進んだときに、入射粒子 n 個のうち Δn 個が衝突反応を起こすとする。反応を起こす確率 $\Delta n/n$ は $N\Delta x$ に比例するので、



$$\frac{\Delta n}{n} = \sigma N \cdot \Delta x \quad (4-1)$$

と書くことができる。入射方向から見ると、単位面積に標的粒子は $N\Delta x$ 個あるので、 σ は入射粒子からみた1個の標的粒子の面積に相当する。また、 σ は以下のようにも定義できる。

$$\sigma = \frac{\text{単位時間に標的粒子1個あたりに起きる反応の回数}}{\text{入射粒子ビームの強度(単位面積単位時間当たりの個数)}} \quad (4-1')$$

上式において、領域面積を S 、入射粒子の速さを v とする。時間 $\Delta x/v$ の間に面積 S に粒子が n 個入射しているとする、ビームの強度は $n/(S \cdot \Delta x/v) = nv/S\Delta x$ 。時間 $\Delta x/v$ の間に $NS\Delta x$ 個の標的粒子に対して Δn 回の反応が起きているので、(4-1')は

$$\sigma = \frac{\Delta n}{\frac{\Delta x}{v} \times NS\Delta x} \times \frac{S\Delta x}{nv} = \frac{\Delta n}{nN\Delta x}$$

となり(4-1)式の定義に一致する。時間 Δt あたりに入射粒子が進む距離は $v\Delta t$ であるから、(4-1)は、 $\Delta x = v\Delta t$ とにおいて

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = nN\sigma v$$

と書くこともできる。電離、再結合、荷電交換の場合は剛体衝突で σ は粒子の大きさを表すが、クーロン衝突は遠距離力なので異なる。

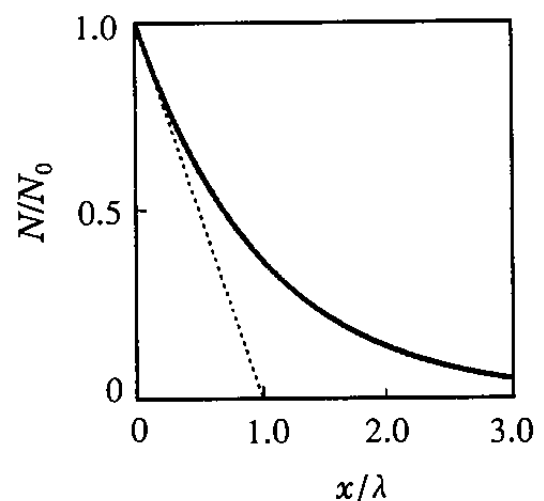
入射粒子の初期密度を $n(0)$ とし、距離 x 進んだときにまだ1回も衝突していない粒子の密度を $n(x)$ とすると

$$\frac{dn}{dx} = -\sigma N \cdot n(x)$$

$$n(x) = n(0)\exp(-\sigma Nx)$$

$x \sim x + dx$ で衝突を起こす粒子の数は $\sigma N n(x) dx$ であるから、

衝突するまでに進む距離の平均＝**平均自由行程**(単位 m)は



高村秀一「プラズマ理工学入門」森北出版(1997)図1.8

$$l_c = \frac{1}{n(0)} \int_0^\infty x \cdot \sigma N n(x) dx = \int_0^\infty \sigma N x \exp(-\sigma N x) dx = \frac{1}{\sigma N}$$

ここで、 $\sigma N x \exp(-\sigma N x) = -\frac{d}{dx} \{x \exp(-\sigma N x)\} + \exp(-\sigma N x)$ を用いて部分積分した。

衝突するまでの時間の平均＝**衝突時間**(単位 s)

衝突時間の逆数＝**衝突周波数**(単位 1/s)

$$\tau_c = \frac{l_c}{v} = \frac{1}{v\sigma N}$$

$$v_c = \frac{1}{\tau_c} = v\sigma N \quad (4-2)$$

圧力 1Pa、温度 0°C のヘリウムガス
(密度 $2.66 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$) における 200eV の電
子の平均自由行程、衝突時間は？

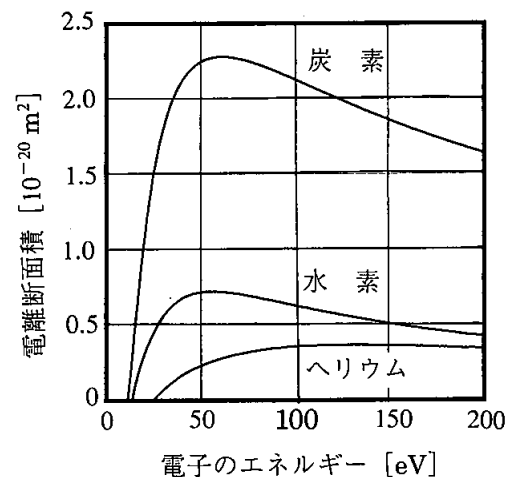
右図から

電離断面積 $\sigma_i = 3.5 \times 10^{-21} \text{ m}^2$

$$l_i = \frac{1}{3.5 \times 10^{-21} \times 2.66 \times 10^{20}} = 1.1 \text{ m}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \times 200 \times 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 8.38 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$\tau_i = \frac{l_i}{v_e} = 0.13 \mu\text{s}$$

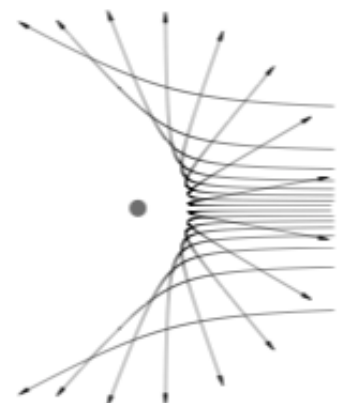


高村秀一「プラズマ理工学入門」森北出版(1997)図2.2

4-2. クーロン衝突

電荷 q_i 、質量 m_i の粒子 A (テスト粒子) と電荷 q_j 、質量 m_j の粒子 B (標的粒子、場の粒子) とのクーロン衝突を考える。

衝突パラメータ b ($b > 0$): クーロン力が働かないときに最も接近する距離。



散乱角 θ ($-\pi < \theta < \pi$) と b との関係:

$$b = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 m_r V_r^2} \times \frac{1}{\tan(\theta/2)} \quad (4-3)$$

ここで、 m_r は換算質量 $m_r = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$ 、 V_r は相対速度の大きさ。粒子 A と B の電荷の符号が異なるとき、 θ は負 (図は同符号のとき)。

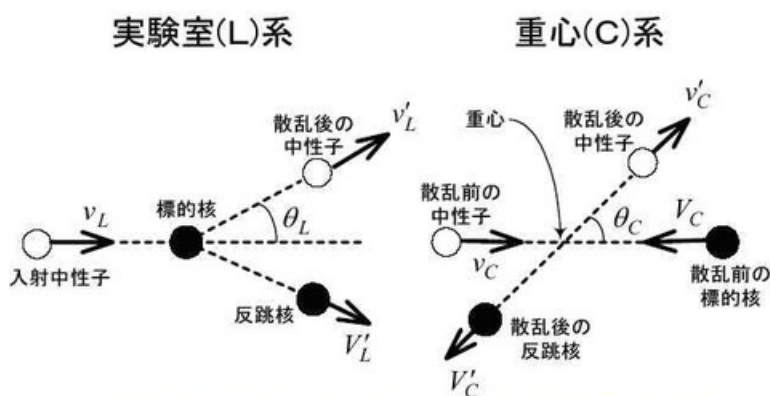
$$b_0 = \frac{|q_i q_j|}{4\pi\epsilon_0 m_r V_r^2} \quad (4-4)$$

とおくと、(4-3)式は $|\tan(\theta/2)| = b_0/b$ 。すなわち

$$\left| \sin \frac{\theta}{2} \right| = \frac{\left| \tan \frac{\theta}{2} \right|}{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{\frac{b_0}{b}}{\sqrt{1 + \frac{b_0^2}{b^2}}} = \frac{b_0}{\sqrt{b^2 + b_0^2}} \quad (4-5)$$

となる。 b_0 は θ の絶対値が $\pi/2$ (90 度) になる衝突パラメータである。散乱角 (の絶対値) が 90 度以上となる散乱 (90 度散乱) は $b \leq b_0$ のときに相当するので、その断面積は πb_0^2 。

なお θ は散乱中心 (標的粒子) を原点とした座標系での散乱角であり、重心系での散乱角とも等しいが、実験室系での散乱角とは一致しないことに注意。



https://atomica.jaea.go.jp/data/fig/fig_pict_03-06-04-06-02.html

テスト粒子が単位時間単位面積あたり ϕ 個の強度で入射する場合、単位時間あたりに散乱角 θ 、方位角 ϕ 方向の立体角 $d\Omega$ に散乱される粒子の数を dN_t とすると、 dN_t は $\phi d\Omega$ に比例。比例係数を $d\sigma(\theta, \phi)/d\Omega$ [m^2/sr] と置き、「微分散乱断面積」と言う ((4-1') の定義で考えている)。

$$dN_t = \Phi \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} d\Omega \quad (4-6)$$

$d\sigma(\theta, \phi)/d\Omega$ を全散乱方向について積分したものが散乱断面積 σ [m²]。

$$\sigma = \int \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} d\Omega \quad (4-7)$$

$$N_t = \sigma \Phi$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

N_t は単位時間あたりの散乱粒子数。

クーロン衝突の場合 $d\sigma(\theta, \phi)/d\Omega$ は ϕ に依存しないので

$$dN_t = \Phi \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\phi$$

と書ける。(4-3)式より

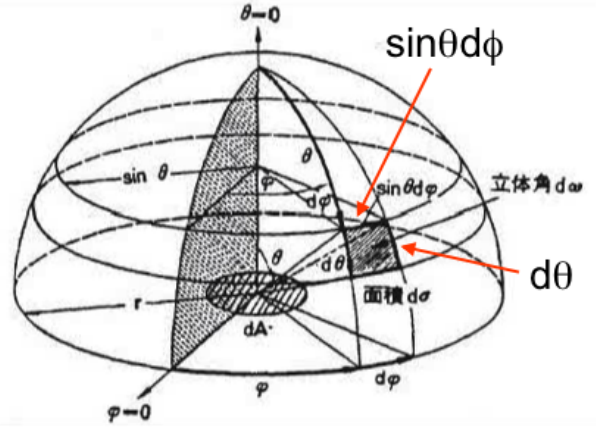
$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{q_i^2 q_j^2}{64\pi^2 \varepsilon_0^2 m_r^2 V_r^4 \sin^4(\theta/2)}$$

となることが分かっている。 b_0 を用いて書くと

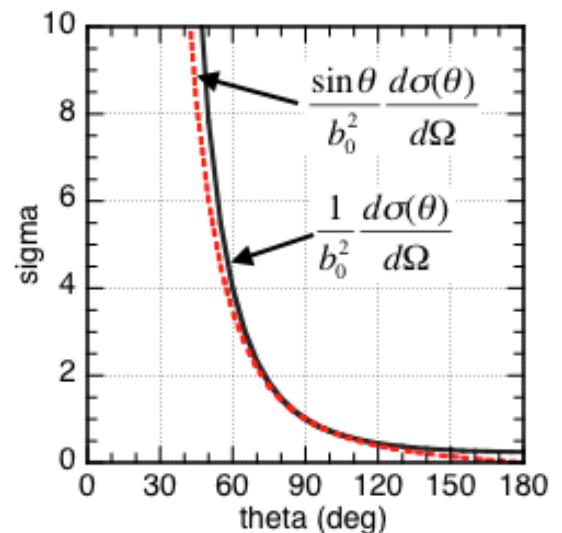
$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{b_0^2}{4 \sin^4(\theta/2)}.$$

これをラザフォードの散乱公式という。微分散乱断面積は、相対速度が大きいと小さくなる。散乱角が小さくなる(衝突パラメータが大きくなる)と大きくなり、散乱角 0 の極限で無限大に発散する(クーロン力が遠距離力であることを反映)。散乱角の大きい衝突はごくまれにしか起こらず、多数の微小角散乱が本質的な効果を持つ。

プラズマ中では、デバイ遮蔽のためクーロン力はデバイ長で遮蔽されるから、衝突パラメータの上限をデバイ長 $\lambda_D = \sqrt{\varepsilon_0 k T_e / (n_e e^2)}$ に取る。 $b = \lambda_D$ に対応する散乱角の絶対値を $\theta_{\min}$ とすると、 $\lambda_D \gg b_0$ に注意して(4-5)式より



会田勝「大気と放射過程」東京堂(1954)を元に作成



$$\sin \frac{\theta_{\min}}{2} = \frac{b_0}{\sqrt{\lambda_D^2 + b_0^2}} = \frac{b_0/\lambda_D}{\sqrt{1 + (b_0/\lambda_D)^2}} \approx \frac{b_0}{\lambda_D} = \frac{|q_i q_j|}{4\pi\epsilon_0 m_r V_r^2 \lambda_D} \quad (4-8)$$

近距離力(剛体衝突)の場合と異なりクーロン衝突は衝突パラメータあるいは散乱角により効果が全く異なるから、実は単純に(4-7)式のように積分した断面積はあまり意味が無い。何かの物理量の変化に着目した断面積、衝突時間、衝突周波数を考える。

例として、電子が静止したイオンと衝突する場合の入射方向(x 方向)の速度の変化($v \rightarrow v + \Delta v$)による運動量伝達の断面積 σ_m を考える。(4-1')に倣って、 σ_m を以下のように定義する。

$$\sigma_m = \frac{\text{単位時間に標的粒子1個あたりに伝達される運動量}}{\text{単位面積単位時間あたりに入射される運動量}} \quad (4-9)$$

入射粒子1個あたりの運動量が mv なので分母は $mv\Phi$

分子は(4-6)式に1個あたりの運動量の減少量 $mv(1 - \cos \theta)$ を掛けたものなので $mv\Phi(1 - \cos \theta) \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} d\Omega$ 。

よって σ_m は次式で表される。

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \int_{\theta_{\min}}^{\pi} \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} (1 - \cos \theta) 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{b_0^2}{4} \times 2\pi \int_{\theta_{\min}}^{\pi} \frac{(1 - \cos \theta) \sin \theta}{\sin^4(\theta/2)} d\theta \\ &= 2\pi b_0^2 \int_{\theta_{\min}}^{\pi} \frac{d\theta}{\tan(\theta/2)} = 2\pi b_0^2 \left[2 \ln \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \right]_{\theta_{\min}}^{\pi} = -4\pi b_0^2 \ln \left(\sin \frac{\theta_{\min}}{2} \right) \end{aligned} \quad (4-10)$$

ここで、 $(1 - \cos \theta) = 2\sin^2(\theta/2)$ 、 $\sin \theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ を用いて

$$\frac{(1 - \cos \theta) \sin \theta}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{2\sin^2(\theta/2) \times 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{4}{\tan(\theta/2)}$$

とした。

(4-10)式のと対数の部分を $\ln \Delta$ とおいて、**クーロン対数**と言う。(4-8)式を用いて

$$\ln \Lambda = -\ln \left(\sin \frac{\theta_{\min}}{2} \right) = \ln \sqrt{1 + \frac{\lambda_D^2}{b_0^2}} \approx \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_0} \right)$$

クーロン対数を用いると(4-10)式は

$$\sigma_m = 4\pi b_0^2 \ln \Lambda \quad (4-11)$$

となり、断面積は 90 度散乱の断面積の $4 \times \ln \Lambda$ 倍となっていることが分かる。またマクスウェル分布の粒子を考えると、(4-4)式において相対速度 V_r は熱速度程度 (熱速度が異なる場合は大きい方) となる。よって b_0 は温度 T に反比例し、 σ_m は T^2 に反比例する。

デバイ長は $T_e^{0.5}/n_e^{0.5}$ の依存性を持ち、 $1/b_0$ は T_e の依存性を持つから、 λ_D/b_0 は $T_e^{1.5}/n_e^{0.5}$ の依存性を持つ。実用的な式は

$$\ln \Lambda = 7 + 2.3 \log_{10} \left\{ \frac{(T_e [\text{eV}])^{1.5}}{(n_e / 10^{20} [\text{m}^{-3}])^{0.5}} \right\} \quad (4-12)$$

実験室プラズマでは、10～20 程度の値。 $T_e = 1 \text{keV}$, $n_e = 10^{19} \text{m}^{-3}$ で $\ln \Lambda = 18.5$ 。

運動量伝達の (衝突) 周波数 ν_m は、

$$\nu_m = \frac{\text{単位時間にテスト粒子(群)から失われる運動量(接線成分)}}{\text{テスト粒子(群)の運動量}} \quad (4-13)$$

として定義される。テスト粒子の (実験室系での) 平均速度 u の時間変化は

$$\frac{du}{dt} = -\nu_m u \quad (4-14)$$

で与えられる。

標的粒子の個数密度を N とすると、単位面積のビームが単位時間に会える標的粒子の個数は Nu なので、(4-9)と(4-13)から、(4-2)式 ($\nu_c = \nu \sigma N$) と同様

$$\nu_m = Nu \sigma_m \quad (4-15)$$

が成り立つ。 u として熱速度を取れば ν_m は $T^{1.5}$ に反比例することになる ($u \propto T^{0.5}$ 、 $\sigma_m \propto T^{-2}$)。