

プラズマ理工学 第 4 回

エネルギー理工学科 3年秋学期

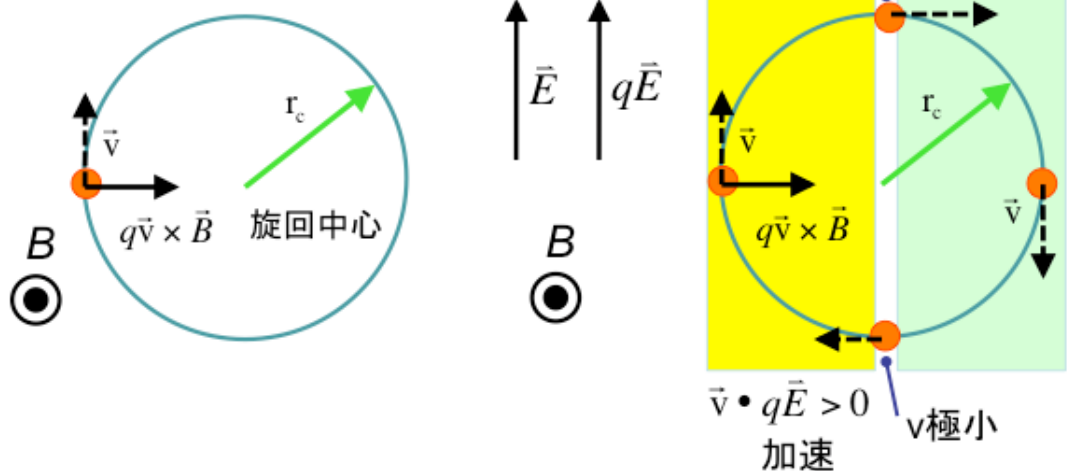
日時: 月曜日 午前10時30分～12時00分、場所:522 講義室

教員: 藤田隆明(ふじたたかあき) 工学部 8 号館南棟4階

3-5-1. 電場によるドリフト

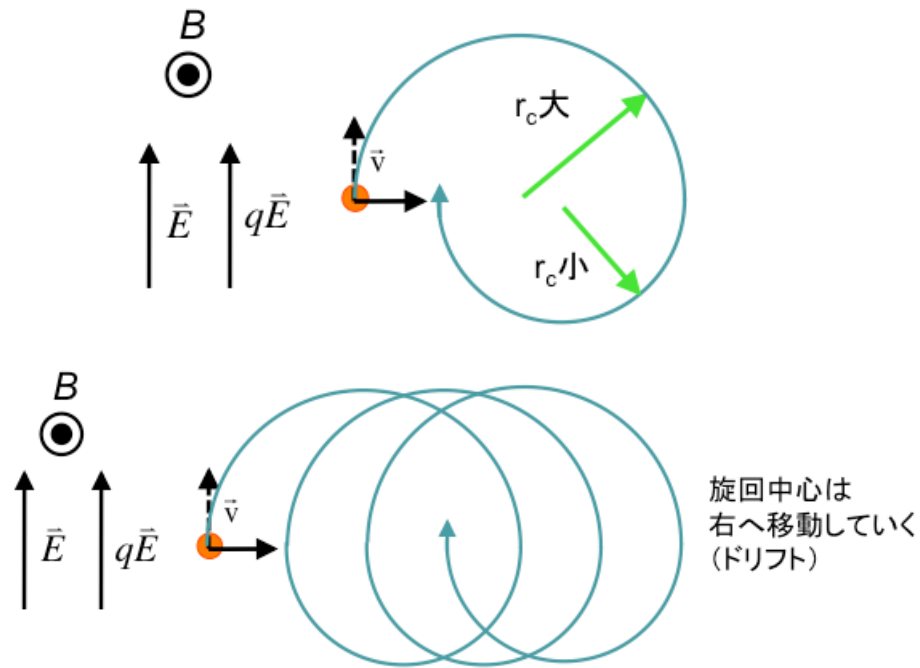
一様定常磁場 B に対して垂直な向きの一様定常電場 E があるとする。

$q > 0$ の場合

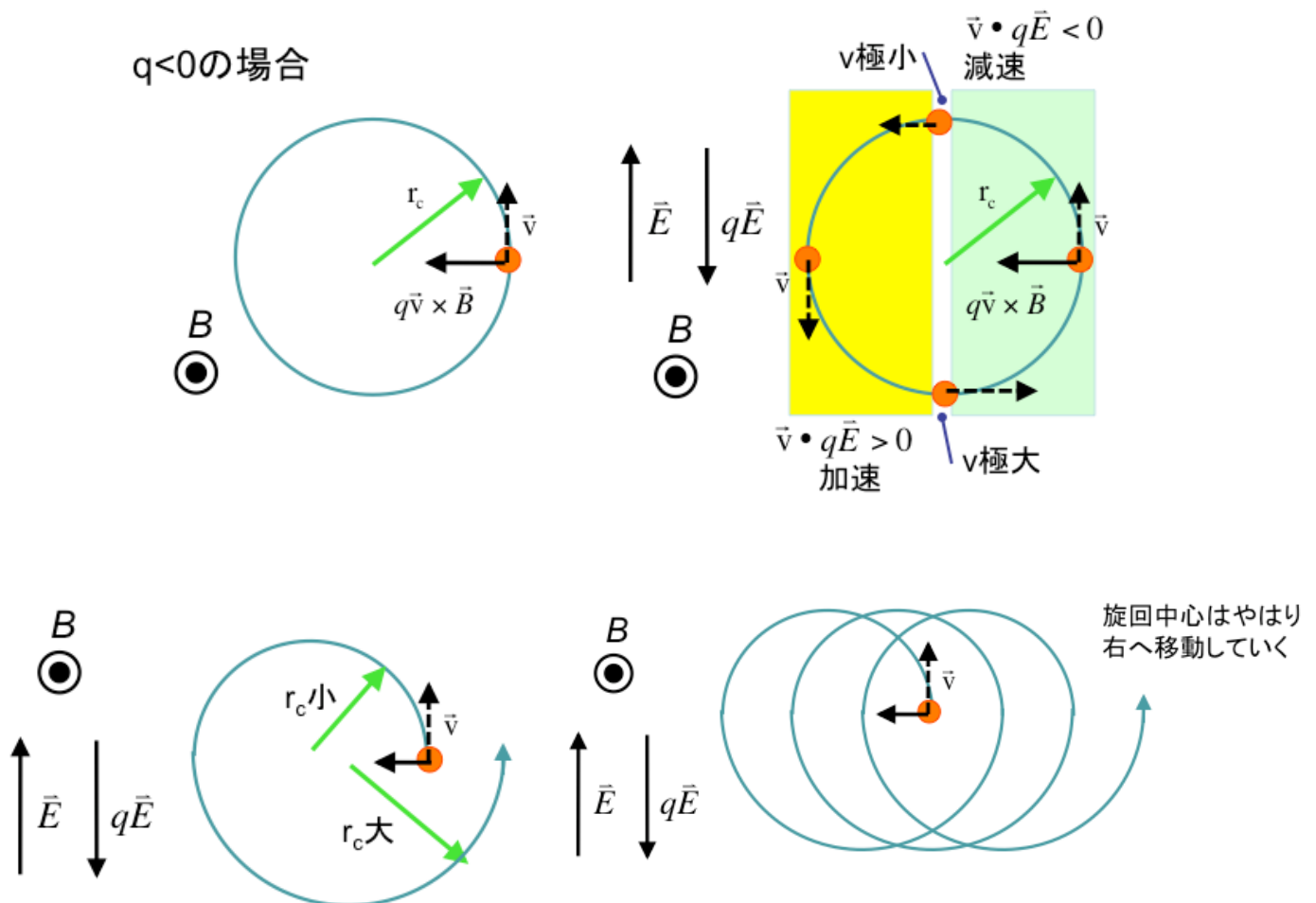


正電荷粒子を考えると、粒子は電場と同じ向きに運動するとき加速され、逆向きに運動するとき減速される。

速度が大きい(小さい)ところでは、旋回円の半径が大きく(小さく)なるので、一周したときに元の位置に戻って来ない。このため、旋回中心は B と E の両方に垂直な向き ($E \times B$ の向き) にドリフトする。



負電荷粒子(電子)の場合は、逆向きの旋回運動となるが、速度が極大・極小となる位相も入れ替わるので、ドリフトの向きは正電荷の場合と同じになる。



<運動方程式からの導出>

$$\text{運動方程式 } m \frac{dv}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

において、磁場 $\mathbf{B}$ を z 方向、電場 $\mathbf{E}$ を x 軸に垂直な方向に取り

$$\mathbf{B} = (0, 0, B), \mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$$

とすると

$$m \frac{dv_x}{dt} = qE_x + qv_y B_z - qv_z B_y = qv_y B$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = qE_y + qv_z B_x - qv_x B_z = qE_y - qv_x B$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = qE_z + qv_x B_y - qv_y B_x = qE_z$$

となる(3-2 節の電場がない場合と比較せよ)。 z 方向は等加速度運動

$$v_z(t) = (qE_z/m)t + v_z(0)$$

で、 x, y 方向は以下のようになる。

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dv_y}{dt} = \frac{qB}{m} \left(\frac{qE_y}{m} - \frac{qB}{m} v_x \right) = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 \left(v_x - \frac{E_y}{B} \right)$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_y$$

v_y の式は、電場がないときと同じ。 v_x の式は

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(v_x - \frac{E_y}{B} \right) = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 \left(v_x - \frac{E_y}{B} \right) = -\omega_c^2 \left(v_x - \frac{E_y}{B} \right)$$

と書ける($\omega_c = |q|B/m$)ので、 v_x, v_y の解は

$$v_x - \frac{E_y}{B} = v_{\perp} \sin(\omega_c t) \rightarrow v_x = v_{\perp} \sin(\omega_c t) + \frac{E_y}{B}$$

$$v_y = \frac{m}{qB} \frac{dv_x}{dt} = \pm v_{\perp} \cos(\omega_c t)$$

となる。つまり、 xy 平面における荷電粒子の速度ベクトルは旋回運動と

$$\mathbf{v}_E = (E_y/B, 0, 0) = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

の和となる。これは旋回中心が速度 $\mathbf{v}_E$ で移動(ドリフト)することを示す。

任意の向きの電場・磁場に対して、旋回中心は磁場に垂直方向に速度 $v_E = E \times B / B^2$ で移動する。よって、この電場によるドリフトを **$E \times B$ ドリフト** (E クロス B ドリフト) と呼ぶ。

実際、 $v = u + v_E$ において運動方程式に代入すると、 $dv_E/dt = 0$ より

$$m \frac{du}{dt} = q \{ E + (u + v_E) \times B \} = q \left\{ E + u \times B + \frac{(E \times B) \times B}{B^2} \right\}$$

ここで

$$E = E_{\parallel} \frac{B}{B} + E_{\perp}$$

とおくと、

$$(E \times B) \times B = (E_{\perp} \times B) \times B = (E_{\perp} \cdot B)B - (B \cdot B)E_{\perp} = -B^2 E_{\perp}$$

より(ベクトル公式 $(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$ を用いた)

$$m \frac{du}{dt} = q(E + u \times B - E_{\perp}) = qE_{\parallel} \frac{B}{B} + qu \times B$$

さらに

$$u = u_{\parallel} \frac{B}{B} + u_{\perp} \quad \left(\text{すなわち } v = u_{\parallel} \frac{B}{B} + u_{\perp} + v_E \right)$$

とおくと

$$m \frac{du_{\parallel}}{dt} = qE_{\parallel}$$

$$m \frac{du_{\perp}}{dt} = qu_{\perp} \times B$$

v は磁力線方向の等加速度運動速度 $u_{\parallel}$ 、旋回運動 $u_{\perp}$ および $E \times B$ ドリフト v_E の和である。

E と B が直交する時、 $E \times B$ ドリフト速度が E/B だけで決まる (q, m, v に依存しない) 理由

簡単のため、電荷 $q > 0$ 、 $v_{\parallel} = 0$ ($v = v_{\perp}$) とする。

$$\omega_c = \frac{qB}{m}, \quad r_c = \frac{v}{\omega_c} = \frac{mv}{qB}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2$$

ここで v, r_c, K は軌道周期の間の平均値。それぞれの振幅を $\Delta v, \Delta r_c,$

ΔK とする。軌道 1/4 周の間に電場が荷電粒子にする仕事を考えて

$$\Delta K = q r_c E = \frac{m v E}{B}$$

一方、

$$\Delta K = \frac{1}{2} m (v + \Delta v)^2 - \frac{1}{2} m v^2 = m v \Delta v$$

($\Delta v \ll v$ より Δv の2次の項を無視)。よって

$$\Delta v = \frac{E}{B}, \quad \Delta r_c = \frac{m \Delta v}{q B} = \frac{m E}{q B^2}$$

一周期 $T = 2\pi/\omega_c$ の間にドリフトする距離は Δr_c に比例するから、ドリフト速度 V_E は

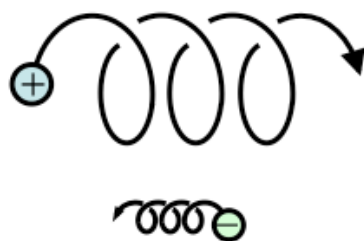
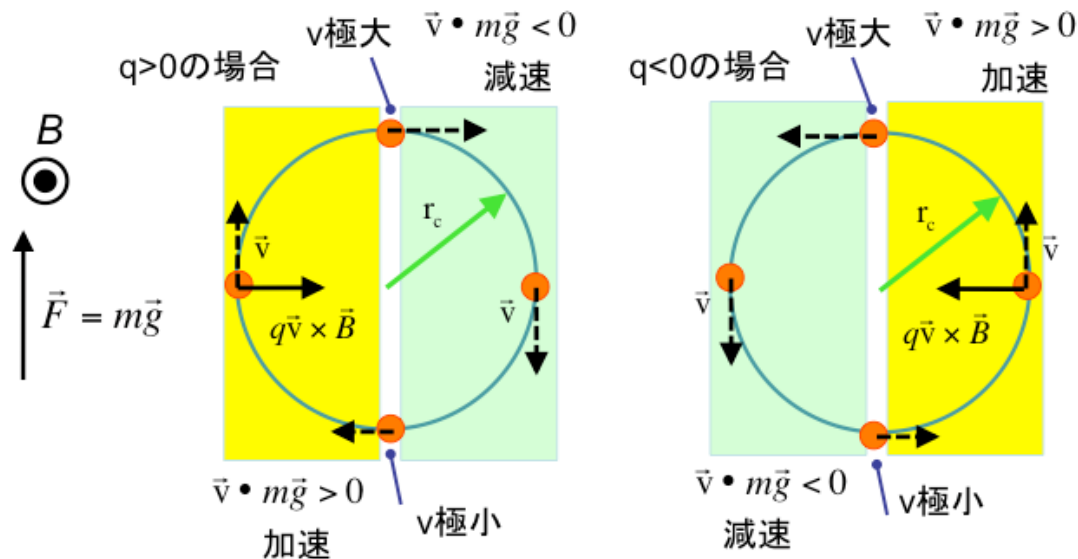
$$V_E \propto \frac{\Delta r_c}{T} = \frac{m E}{q B^2} \times \frac{q B}{2\pi m} = \frac{E}{2\pi B} \propto \frac{E}{B}$$

となる。

3-5-2. 一般的な力あるいは加速度によるドリフト

(電荷 q に依存しない) 一般的な力 F あるいは (重力) 加速度 g による力 $m\vec{g}$ によって生じるドリフトを考える。

電場 E と同じ向きの F (あるいは g) を考えた場合、正電荷では $E \times B$ ド



$$\vec{v}_F = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2}$$

$$\vec{v}_g = \frac{m}{q} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}$$

リフトと同じ向きのドリフトとなるが、**負電荷の場合は逆向きになる。**

$E \times B$ ドリフトは電場が荷電粒子に及ぼすクーロン力 qE によるドリフトとみなせるから、力によるドリフトの大きさ・方向は $E \times B$ ドリフトの式で

$$qE = F = mg \quad \text{すなわち} \quad E = F/q = mg/q$$

とにおいて

$$v_F = \frac{F \times B}{qB^2}, \quad v_g = \frac{mg \times B}{qB^2}$$

となる($q < 0$ を含めて正しい式)。

プラズマでは重力は通常無視できるが、遠心力は重要。

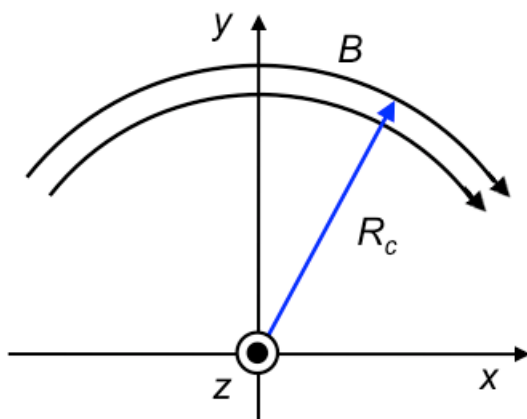
Z 軸を中心とする円弧状の磁力線を考える。粒子の磁力線方向の速度を $v_{\parallel}$ とすると、この粒子の旋回中心が半径 R_c の円弧状の磁力線に沿って運動するとき、遠心力 $F = (mv_{\parallel}^2/R_c)e_R$ を受ける(e_R は R 方向の単位ベクトル)。これによるドリフトは

$$v_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c} \frac{e_R \times B}{qB^2}$$

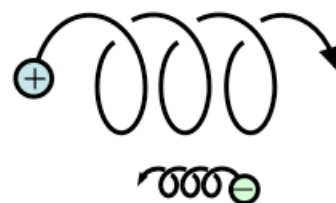
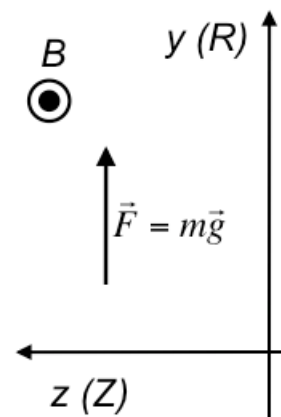
方向は **Z 軸に平行**で、正電荷と負電荷で向きが逆。

一般的には(磁力線が円弧状でない場合には)、曲率半径ベクトルを R_c として

$$v_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c^2} \frac{R_c \times B}{qB^2}.$$



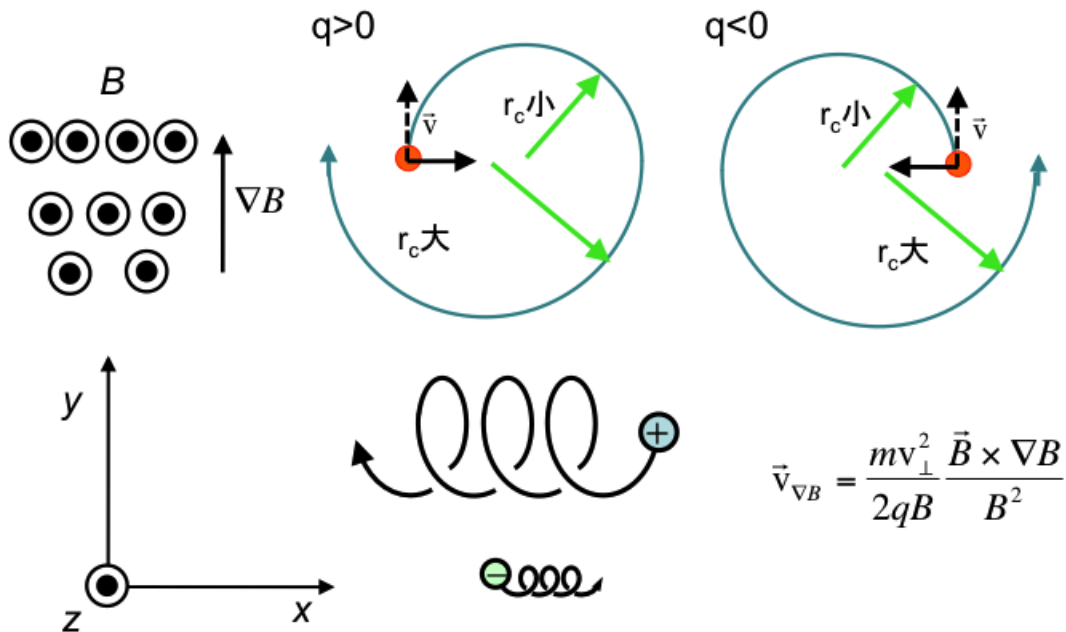
$$\vec{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{q} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2}$$



これを**湾曲ドリフト**と呼ぶ。 $v_{\parallel}$ の符号(粒子速度の向き)に依存しない。

3-5-3. 磁場強度の非一様性(勾配)によるドリフト

直線状の磁場(z 方向)の強度が、磁場と垂直方向(y 方向)に変化している(電場なし)。回旋半径は磁場強度に反比例するので、回旋円の磁場が強い方の半円の回旋半径は磁場が弱い方の半円の回旋半径より小さくなり、ドリフトが生じる。**磁場および磁場勾配の両方に垂直な方向で、電荷の符号により向きが異なる。**



定式化するには、回旋円一周の間に磁場から受ける正味(時間平均)のローレンツ力によるドリフトと考えるのが分かりやすい。

ローレンツ力

$$F_x = qv_y B_z - qv_z B_y = qv_y B, \quad F_y = qv_z B_x - qv_x B_z = -qv_x B$$

の回旋軌道

$$x - x_0 = -\frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos(\omega_c t), \quad v_x = v_{\perp} \sin(\omega_c t)$$

$$y - y_0 = \pm \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin(\omega_c t), \quad v_y = \pm v_{\perp} \cos(\omega_c t)$$

にわたる平均値を求める($\pm$ は粒子電荷 q の符号に対応する)。周期は $2\pi/\omega_c$ である。磁場の1次の成分(y に比例する成分)を考えて、

$$B(y) = B(y_0) + B'(y_0)(y - y_0)$$

とおいて

$$\begin{aligned}\bar{F}_x &= \frac{\omega_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_c} F_x dt = \frac{q\omega_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_c} v_y B dt \\ &= \frac{q\omega_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_c} (\pm v_\perp \cos(\omega_c t)) \left[B(y_0) \pm B'(y_0) \frac{v_\perp}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \right] dt = 0 \\ \bar{F}_y &= -\frac{q\omega_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_c} v_x B dt \\ &= -\frac{q\omega_c}{2\pi} \oint v_\perp \sin(\omega_c t) \left[B(y_0) \pm B'(y_0) \frac{v_\perp}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \right] dt \\ &= \mp \frac{q}{2\pi} B'(y_0) v_\perp^2 \int_0^{2\pi/\omega_c} \sin^2(\omega_c t) dt \\ &= \mp \frac{q}{2\pi} B'(y_0) v_\perp^2 \int_0^{2\pi/\omega_c} \frac{1 - \cos(2\omega_c t)}{2} dt = \mp \frac{q}{2\pi} B'(y_0) v_\perp^2 \times \frac{\pi}{\omega_c} \\ &= \mp \frac{q}{2\omega_c} B'(y_0) v_\perp^2\end{aligned}$$

ベクトルで書けば

$$\bar{\mathbf{F}} = \mp \frac{q}{2\omega_c} v_\perp^2 \nabla B$$

となる。これを力によるドリフトの式に代入して

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\nabla B} &= \frac{\bar{\mathbf{F}} \times \mathbf{B}}{qB^2} = \frac{1}{qB^2} \left(\mp \frac{qv_\perp^2 \nabla B}{2\omega_c} \right) \times \mathbf{B} = \pm \frac{mv_\perp^2 \mathbf{B} \times \nabla B}{2|q|B^3} \\ &= \frac{mv_\perp^2 \mathbf{B} \times \nabla B}{2qB^3}\end{aligned}$$

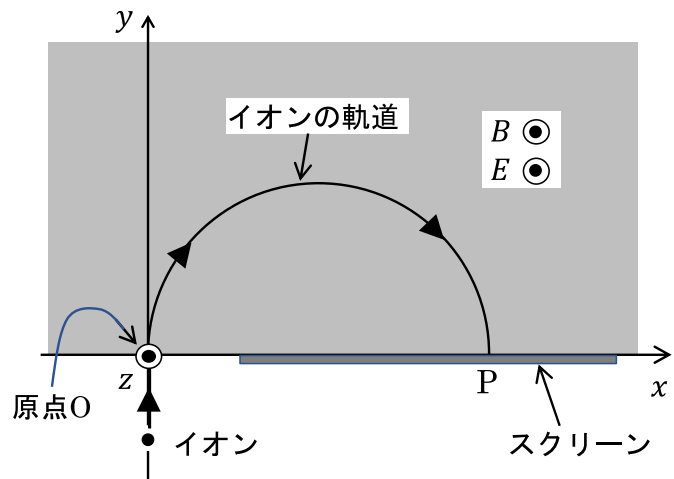
を得る ($\omega_c = |q|B/m$ を用いた)。これを **磁場勾配ドリフト (grad B ドリフト)** と呼ぶ。

レポート課題

次回 11 月 6 日(月)の講義開始時に提出すること(遅れて提出したものは減点となる)。冒頭に学生番号と氏名を記入する。次回欠席の場合は、事前にエネルギー系事務室に預け、藤田にメールで連絡すること(TACT メッセージで提出しても良い)。

問1: $y > 0$ の領域に z 軸正方向の一様な磁場(磁束密度 B)および z 軸正方向の一様な電場 E があり, 原点 O の入射口から y 軸正方向に向かって速度 v_0 で電荷 $q > 0$, 質量 m のイオンが入射される. イオンは z 軸正方向に加速しながら旋回運動し, 平面 $y = 0$ の $x > 0$ の領域に戻ってくる. そこにはイオンが衝突した点で蛍光を発するスクリーンがあり, イオンが衝突した点 P の位置を特定できる. イオンの運動において重力及び相対論的効果は無視できる. 次の問いに答えよ.

- (1) イオンの軌道を xy 平面に射影した旋回円の半径 r_c とイオンが入射してからスクリーンに衝突するまでの時間 T を求めよ.
- (2) イオンがスクリーンに衝突する点 P の座標 $(x_1, 0, z_1)$ を求めよ. 変数として, イオンの電荷 q , イオンの質量 m , イオンの入射速度 v_0 , 磁束密度 B , 電場 E のうち必要なものを用いよ. v_0 のみが異なる(v_0 がある範囲に連続した分布を持つ)多数のイオンが入射したとき, スクリーンにはどのような軌跡(図形)が現れるか図示せよ(紙面右方向に x 軸正方向, 上方向に z 軸正方向を取る).



問2: x 軸に沿う磁場があり、磁束密度の大きさ B は $x = 0$ で $B = B_0$ で x 軸の正方向に向かって単調に増加している。質量 m 、電荷 q ($q > 0$)を持つ荷電粒子の $x = 0$ における速度の大きさを $v = \sqrt{v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2}$ とする。ここで、 $v_{\parallel 0}$ は $x = 0$ における磁場に平行な速度($v_{\parallel 0} > 0$)、 $v_{\perp 0}$ は $x = 0$

における磁場に垂直な速度の絶対値である。任意の点における磁場に平行な速度、磁場に垂直な速度の絶対値をそれぞれ $v_{\parallel}$ 、 $v_{\perp}$ とする。

粒子が磁力線に巻き付く旋回運動をしながら $x = 0$ を出発して x 軸の正方向に運動し $B = B_{\text{ref}} = 4B_0$ となる点 P で反射されて戻ってきた。粒子の磁気モーメント μ と運動エネルギー W の保存を用いて次の問いに答えよ。

- (1) $v_{\perp 0}/v$ 及び $v_{\parallel 0}/v$ を求めよ。
- (2) 点 P における荷電粒子の旋回半径は $x = 0$ における旋回半径の何倍か？

問 3: 地球の赤道の上空には南から北へ向かう地磁気があり、その向きは地表に平行で、その強度は地表からの高度が高くなるにつれ弱くなっている。次の問いに答えよ。

- (1) 赤道の上空にあるイオン及び電子の磁場勾配ドリフトの向きを求めよ。東西南北あるいは上下で答えること。
- (2) 地磁気が地球中心にある磁気双極子によるものであるとすると、赤道面での地磁気の強度は地球中心からの距離 R の3乗に、地磁気の強度の勾配は R の4乗に、それぞれ反比例する。磁場勾配ドリフトの大きさは R の何乗に比例するか？ 粒子の電荷量、質量、速度は同じとする。