

プラズマ理工学

第3回

エネルギー理工学科 3年秋学期

日時: 月曜日 午前10時30分～12時00分

場所: 522講義室

教員: 藤田隆明(ふじたたかあき)

工学部8号館南棟4階

本日の内容

3. 荷電粒子の運動

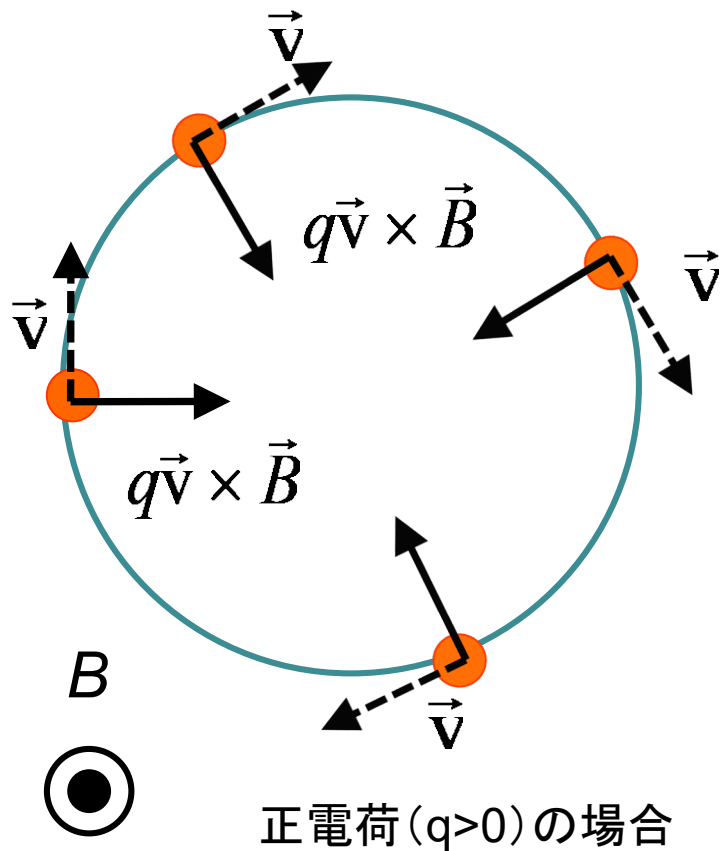
3-3. 荷電粒子の旋回運動

3-4. 磁気モーメントの保存と磁気ミラーによる 閉じ込め

3-5. 荷電粒子の旋回中心のドリフト運動

3-3. 荷電粒子の旋回運動

電場のない定常磁場中で、荷電粒子は、磁場に垂直な平面内で円運動(旋回運動、サイクロトン運動、ラーマ運動、ジャイロ運動)をする



$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = q v_y B_z - q v_z B_y = q v_y B$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = q v_z B_x - q v_x B_z = -q v_x B$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = q v_x B_y - q v_y B_x = 0 \quad \text{Z方向には等速度運動}$$

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y$$

初期条件として、 $t = 0$ で $x = 0, y = 0, v_x = 0, v_y = v_{y0}$ とする。

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m} \quad \text{とおくと、} \quad \frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega_c^2 v_x \quad \rightarrow \quad v_x = A \sin(\omega_c t)$$

$$v_y = \frac{m}{qB} \frac{dv_x}{dt} = \frac{m\omega_c}{qB} A \cos \omega_c t = \pm A \cos \omega_c t \quad (\pm \text{は } q \text{ の符号と同じものをとる})$$

初期条件より、 $A = \pm v_{y0}$ 。 $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |A| = |v_{y0}|$ より xy 平面内での粒子の速度は一定値 $|A|$ を取る。 $|A| = v_\perp$ とおく。 $A > 0$ (q と v_{y0} が同符号) のとき

$$x - x_0 = -\frac{v_\perp}{\omega_c} \cos(\omega_c t)$$

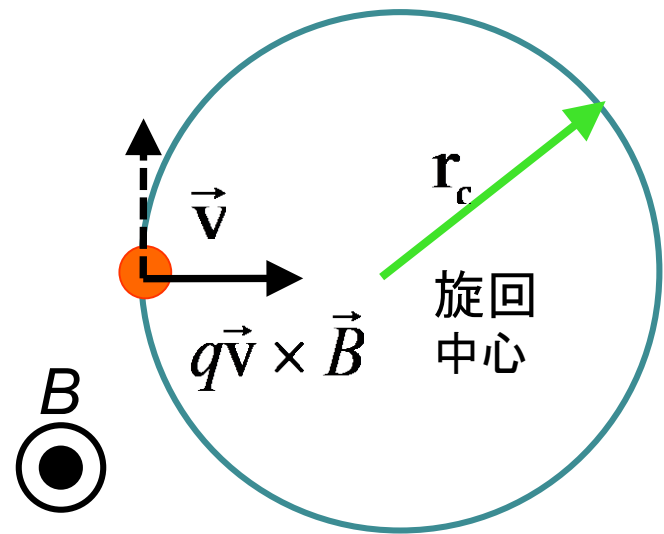
$$y - y_0 = \pm \frac{v_\perp}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$$



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{v_\perp}{\omega_c} \right)^2$$

半径 $v_\perp / \omega_c$ の円。

$r_c = v_\perp / \omega_c$: 旋回半径、サイクロトロン半径、ラーマ半径、ジャイロ半径

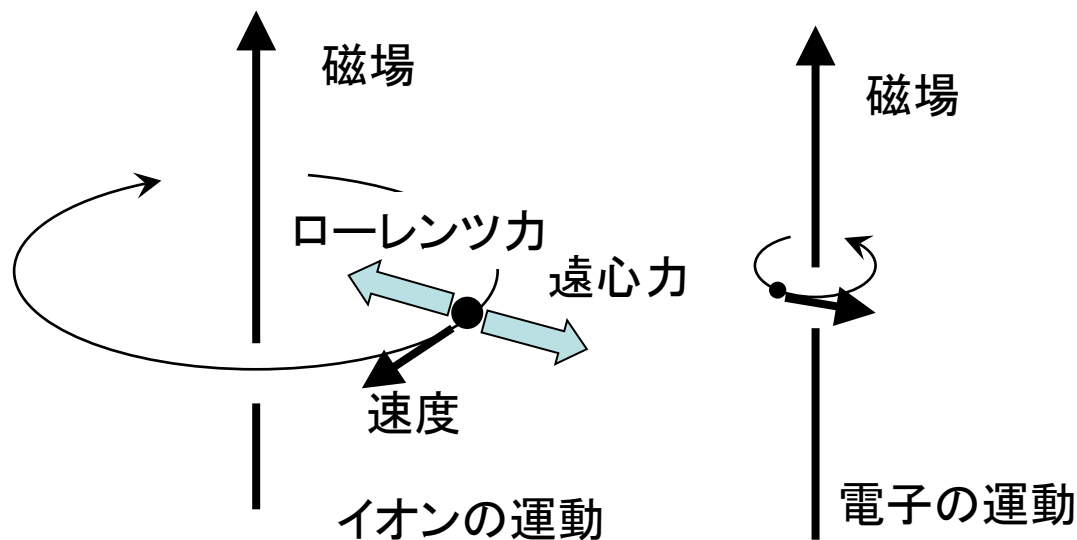


円運動をすることを既知とすれば、ローレンツ力と遠心力との釣り合いから、旋回周波数や旋回半径が簡単に求められる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{ローレンツ力} \\ \text{遠心力} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} |q|v_{\perp}B \\ \frac{mv_{\perp}^2}{r_c} \end{array} \right\} \quad |q|v_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{r_c} \Rightarrow r_c = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \Rightarrow \omega_c = \frac{v_{\perp}}{r_c} = \frac{|q|B}{m}$$

イオン(正電荷)と電子(負電荷)は逆向きに回る。

イオン・電子の運動による
電流は同じ向き(円の内部
で外部磁場を弱める向き
⇒プラズマの**反磁性**)



$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi m}$$

サイクロトロン周波数(旋回周波数)。磁場強度に比例、電荷に比例、質量に反比例。

$$f_{ce} = \frac{eB}{2\pi m_e} = \frac{1.6 \times 10^{-19} B}{2\pi \times 9.1 \times 10^{-31}} = 2.8 \times 10^{10} \times B[\text{T}]$$

電子の場合。
1Tで28GHz

$$r_c = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}$$

旋回半径。磁場強度に反比例、電荷に反比例、磁場に垂直方向の運動量に比例。

同じエネルギーの電子と水素イオンを比べると、水素イオンの質量は電子の約1800倍、速度は約1/40で、運動量は約40倍。よって、**旋回半径は水素イオンの方が電子より約40倍大きい**。旋回周波数は約1/1800。

$v_{\perp}$ として温度Tのマクスウェル分布の熱速度 $v_{\perp} = v_m = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$ を取ると、

$$r_c = \frac{m}{|q|B} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} = \frac{\sqrt{2mk_B T}}{|q|B}$$

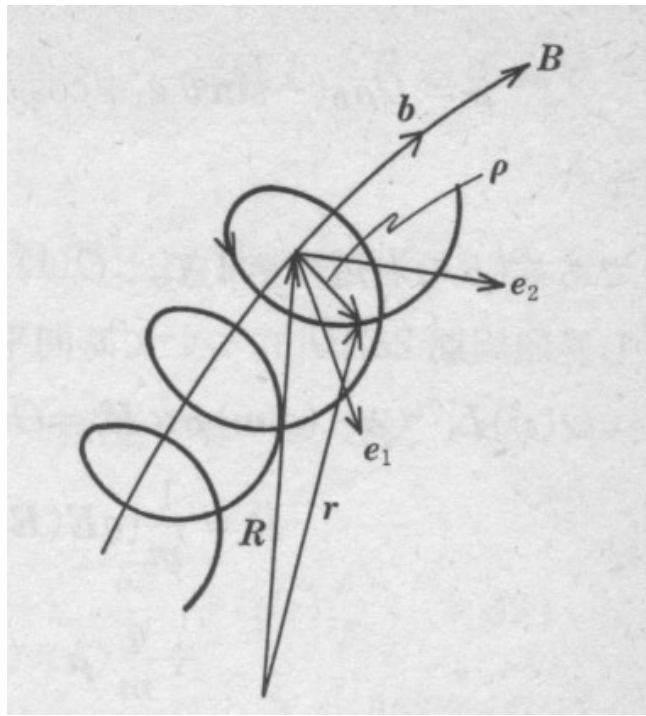
電子に対しては、

$$r_{ce}[\text{m}] = \frac{\sqrt{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.60 \times 10^{-19} \times k_B T[\text{eV}]}}{1.60 \times 10^{-19} \times B[\text{T}]} = 3.37 \times 10^{-6} \times \frac{\sqrt{k_B T[\text{eV}]}}{B[\text{T}]}$$

水素イオンに対しては、

$$r_{ci}[\text{m}] = \frac{\sqrt{2 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 1.60 \times 10^{-19} \times k_B T[\text{eV}]}}{1.60 \times 10^{-19} \times B[\text{T}]} = 1.44 \times 10^{-4} \times \frac{\sqrt{k_B T[\text{eV}]}}{B[\text{T}]}$$

$B = 1\text{T}$, $T = 1\text{ keV} (= 1000\text{ eV})$ のとき、 $r_{ce} = 0.1\text{mm}$ 、 $r_{ci} = 4.6\text{mm}$ 。



一般には、荷電粒子は磁力線方向の速度も持っているので、らせん運動をする

磁場中の粒子の軌道

||

旋回運動

+

磁力線に沿う旋回中心の運動

旋回中心：旋回運動の中心。案内中心とも言う。

しばしば、磁力線に沿う速度を $v_{//}$ と書く

$$\vec{v} = v_{//} \frac{\vec{B}}{B} + \vec{v}_{\perp} \quad v = |\vec{v}| = \sqrt{v_{//}^2 + v_{\perp}^2}$$

旋回中心はつねに磁力線に沿って動くが、粒子の速度ベクトルが磁場となす角 θ (粒子軌道が磁場となす角)は様々である。

$$\theta: \text{ピッチ角。} \quad v_{//} = v \cos \theta \quad |\vec{v}_{\perp}| = v \sin \theta$$

粒子軌道そのものではなく、その旋回中心の運動を議論することが多い(旋回中心理論)。ただし、その適用には以下の条件が必要

空間的には サイクロトン半径が磁場の空間的变化に比べて無視できる

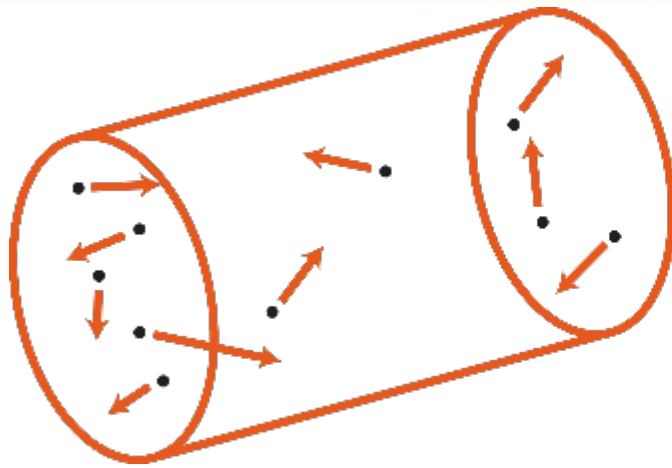
時間的には サイクロトン周期が磁場の時間的变化に比べて無視できる

磁場による荷電粒子の閉じ込め

荷電粒子は磁場に巻きついて運動する

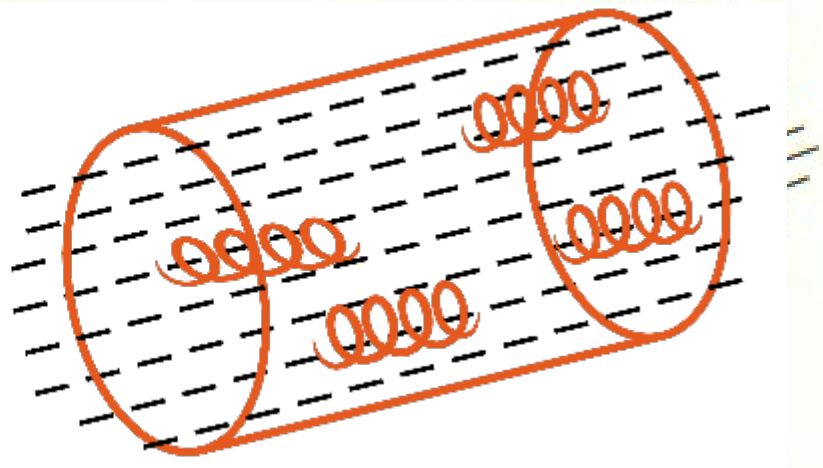
⇒磁場に垂直方向にはほとんど動かない

⇒磁場によるプラズマの閉じ込め



Without
Magnetic Field

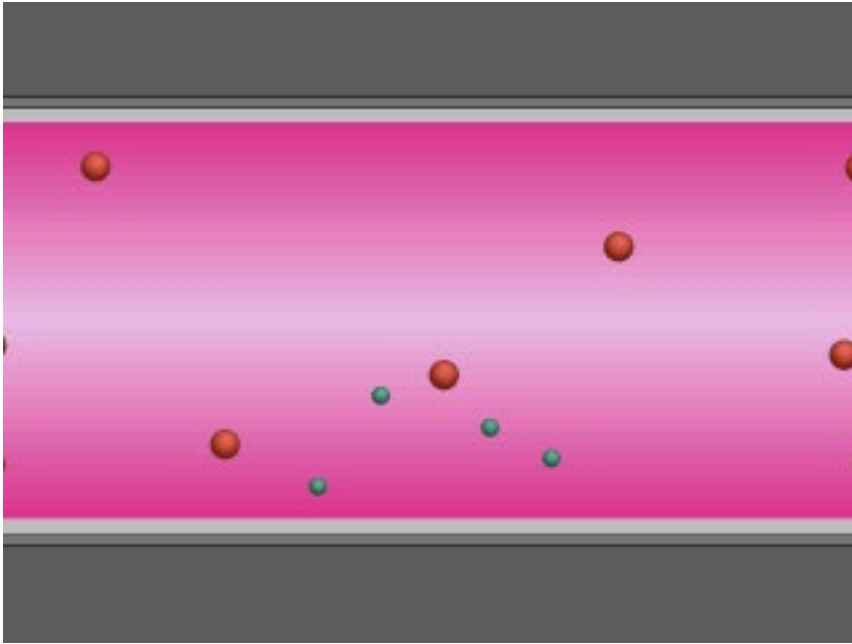
磁場なし



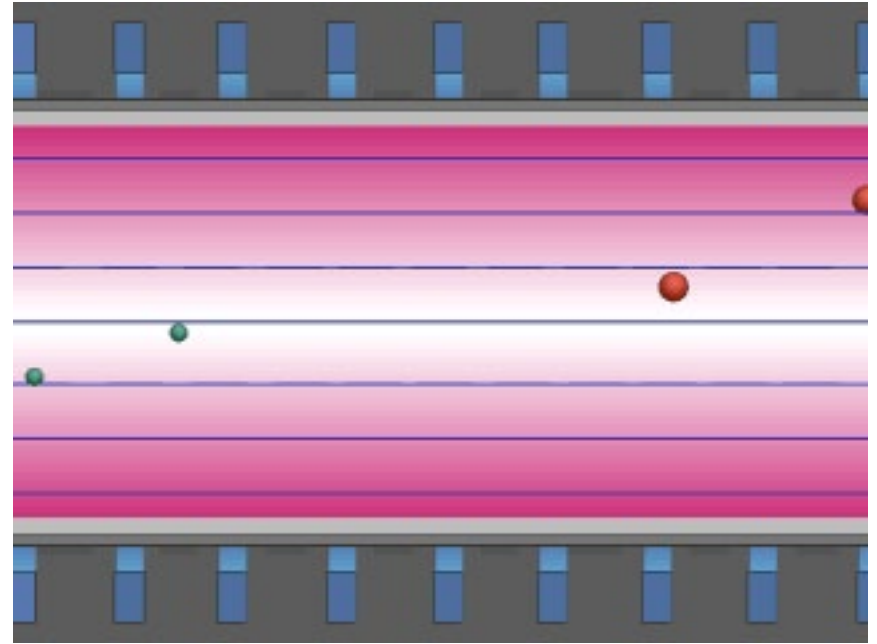
With Magnetic Field

磁場あり

磁力線に沿っては自由に動く。無限に長い装置はできないので、粒子が壁にぶつかってしまう。



磁場なし



磁場あり

form CD-ROM 'Harnessing the Energy of the Stars'
1999 EPFL-CRPP

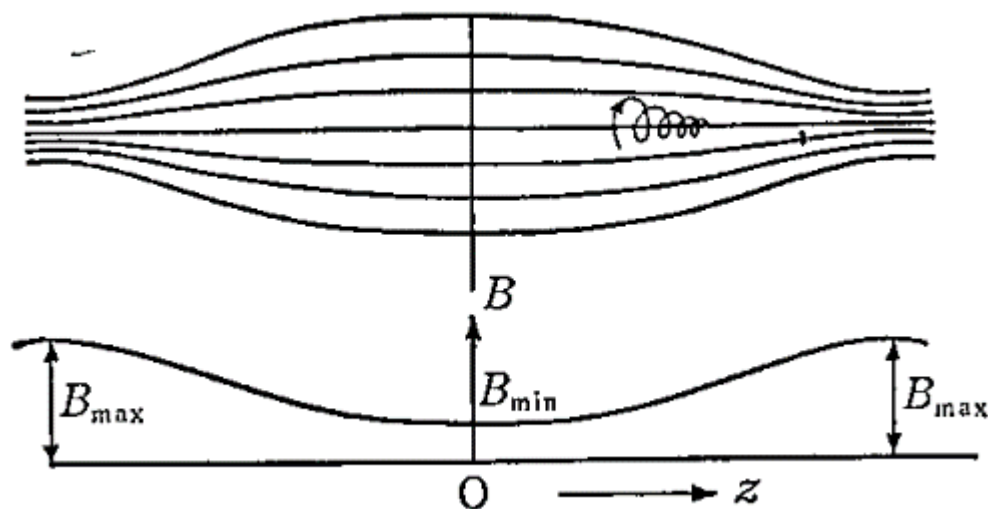
3-4. 磁気モーメントの保存と磁気ミラーによる閉じ込め

z 方向にほぼ平行な磁場があり、磁力線方向に、磁場の強さが変化する場合を考える。

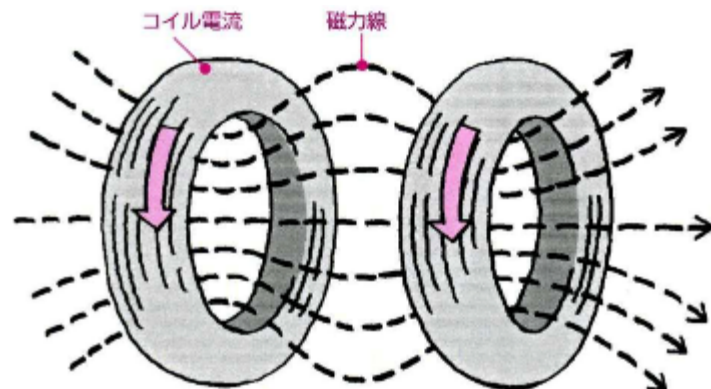
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (磁力線の湧き出し・消滅はない) より、 B が大きくなるためには磁力線が集まってこないといけないので、 r 成分が生じる。この B_r が z 方向の力を発生させる。

円筒座標系で軸対称の場合の z 軸上を考えると、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \rightarrow r B_r = - \frac{\partial B_z}{\partial z} \int_0^r r' dr' \rightarrow B_r = - \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$



Z正方向に向かって B_z が強くなるとき $B_r < 0$



z方向の運動方程式は

$$m \frac{dv_z}{dt} = F_z = -qv_\theta B_r = \frac{qv_\theta r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (3.1)$$

z 正方向に向かって B_z が強くなるとき $F_z < 0$ ($B_z > 0$ であれば $q > 0$ のとき $v_\theta < 0$, $q < 0$ のとき $v_\theta > 0$ より q の符号に関わらず $qv_\theta < 0$ である)

力 F_z のため、磁場の強い場所に向かうにつれて v_z は小さくなる。

磁場が十分強くなれば、いずれは z 方向の速度がゼロになり粒子は引き返してくる (**磁気ミラー**)。

ここで、(3.1) の右辺の係数において

$$\frac{qv_\theta r}{2} = -\frac{|q|v_\perp r_c}{2} = -\frac{|q|v_\perp}{2} \times \frac{mv_\perp}{|q|B} = -\frac{mv_\perp^2}{2B} = -\frac{W_\perp}{B} \quad \because r_c = \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{mv_\perp}{|q|B}$$

$W_\perp = \frac{1}{2}mv_\perp^2$ は磁力線に垂直方向の運動エネルギー

$\mu = \frac{W_\perp}{B}$ を **磁気モーメント** と言う。

磁気モーメントは円環電流の電流値 I と円の面積 A との積 IA として定義される。

磁場中で旋回する荷電粒子の場合、

$$I = |q| \times \frac{v_{\perp}}{2\pi r_c}, \quad A = \pi r_c^2 \quad \text{より}$$

$$\rightarrow \mu = IA = \frac{1}{2} |q| r_c v_{\perp} = \frac{1}{2} |q| \times \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \times v_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$$

磁気モーメント μ を使うと運動方程式(3.1)は

$$m \frac{dv_z}{dt} = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

z 方向の運動エネルギーの変化は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_z^2 \right) = m v_z \frac{dv_z}{dt} = -\mu v_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\mu \frac{dB_z}{dt}$$

(全)運動エネルギーの保存より($v_z=v_{//}$ は磁力線方向の速度)、

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 + \frac{1}{2} m v_{//}^2 \right) = \frac{d(\mu B)}{dt} - \mu \frac{dB}{dt} = B \frac{d\mu}{dt}$$

つまり、磁気モーメント μ は保存される(断熱不変量)。

断熱不変量とは、周期的な運動において近似的に保存される量である。一般化運動量を p 、一般化座標を q とすると、

$$\oint p dq \quad \text{で与えられる。}$$

磁場中で旋回する荷電粒子の場合、
 $p=(\text{角運動量})$ 、 $q=(\text{回転角度})$ ととって、

$$\oint p dq = m r_c v_{\perp} \times 2\pi = m \times \frac{m v_{\perp}}{|q| B} v_{\perp} \times 2\pi = \frac{4\pi m}{|q|} \times \frac{m v_{\perp}^2}{2B}$$

質量と運動エネルギーが同じで、速度の向き(ピッチ角)が異なる粒子を考える。**ピッチ角が大きい($|v_{//}|/v$ が小さい)粒子ほど磁気ミラーに閉じ込められやすい。**

粒子が引き返してくる条件は？ 初期条件を添字0で表すと、

運動エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 + \frac{1}{2}mv_{//}^2 = \text{const.} = \frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2 + \frac{1}{2}mv_{//0}^2$$

$$\rightarrow v_{\perp}^2 + v_{//}^2 = v_{\perp 0}^2 + v_{//0}^2$$

磁気モーメント保存より

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \text{const.} = \frac{mv_{\perp 0}^2}{2B_0} \rightarrow v_{\perp}^2 = \frac{B}{B_0} v_{\perp 0}^2$$

上2式より

$$v_{//}^2 = v_{//0}^2 + v_{\perp 0}^2 \left(1 - \frac{B}{B_0} \right)$$

粒子が引き返してくる地点の B を B_{ref} とすると
 $v_{//} = 0$ より

$$0 = \frac{v_{//0}^2}{v_{\perp 0}^2} + 1 - \frac{B_{\text{ref}}}{B_0}$$

すなわち、
$$\frac{B_{\text{ref}}}{B_0} = \frac{v_{\parallel 0}^2}{v_{\perp 0}^2} + 1 = \frac{v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2}{v_{\perp 0}^2} = \frac{v_0^2}{v_{\perp 0}^2}$$

磁場強度は有限なので、 $v_{\parallel 0}/v_0$ が小さい粒子(ほとんど磁力線方向に運動している粒子、ピッチ角が 0° または 180° に近い粒子)は反射されない。

磁場強度の最大値を B_{max} とすれば

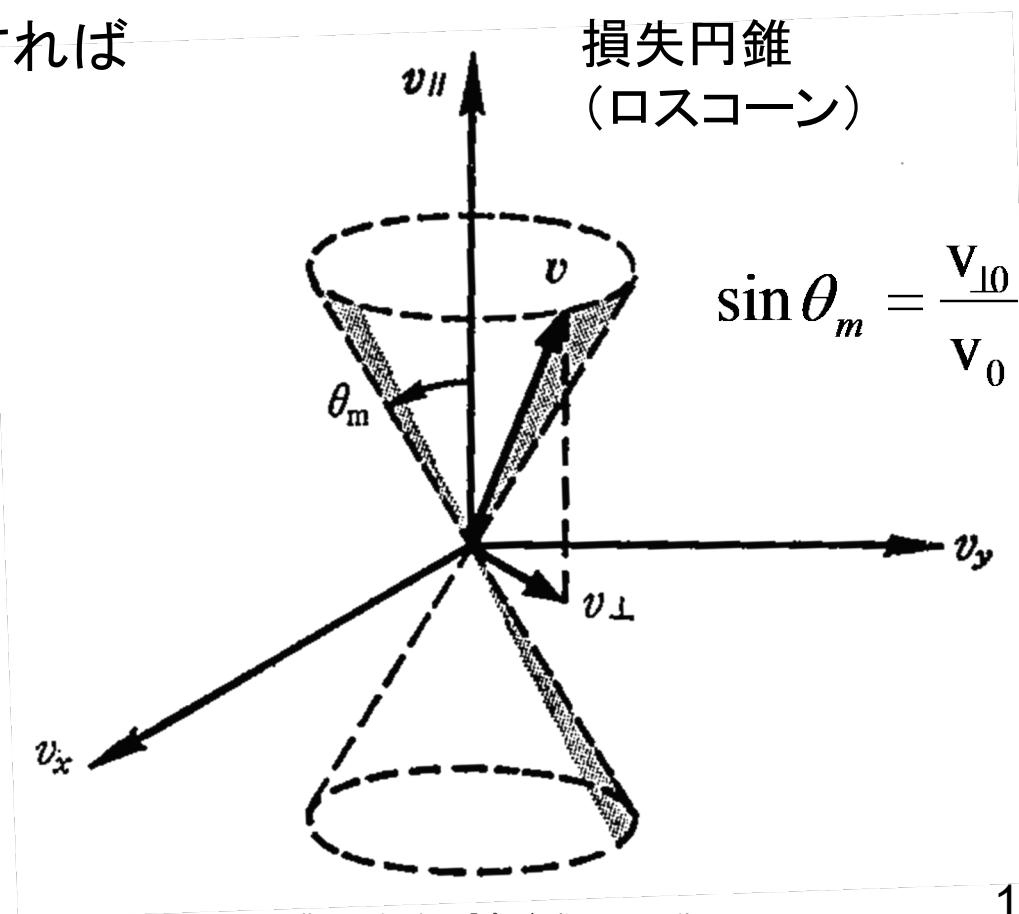
$$v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2 \left(1 - \frac{B_{\text{max}}}{B_0} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_{\parallel 0}^2}{v_{\perp 0}^2} + 1 - \frac{B_{\text{max}}}{B_0} > 0$$

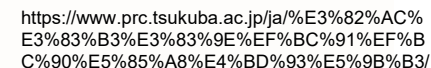
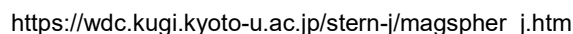
$$\Leftrightarrow \frac{v_0^2}{v_{\perp 0}^2} > \frac{B_{\text{max}}}{B_0}$$

すなわち
$$\frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} < \frac{B_0}{B_{\text{max}}}$$

の粒子は損失する。



この効果を利用して、核融合プラズマを閉じ込めようとする試みもある(筑波大学ガンマ10装置)。



地球磁気圏での荷電粒子の閉じ込め

宮本健朗「核融合のためのプラズマ物理」岩波書店(1976)図3.6

一様定常磁場 B に対して垂直な向きの一様定常電場 E があるとする。

Diagram illustrating the motion of a charged particle in a magnetic field B (into the page, indicated by a dot in a circle). The particle moves in a circular path (gyration) around a center (旋回中心). The velocity vector $\vec{v}$ is perpendicular to the magnetic field. The radius of the gyration is r_c . The force $q\vec{v} \times \vec{B}$ acts as the centripetal force.

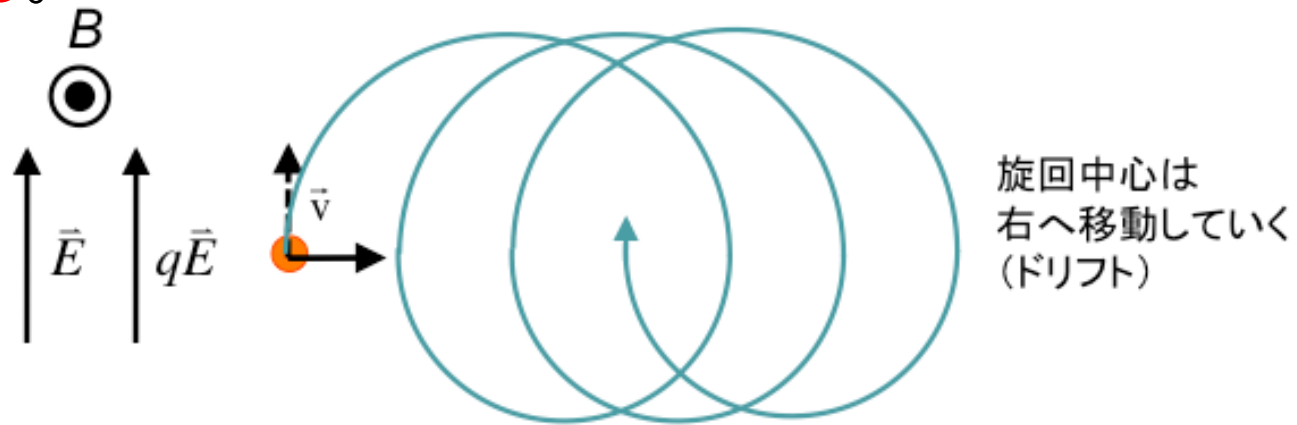
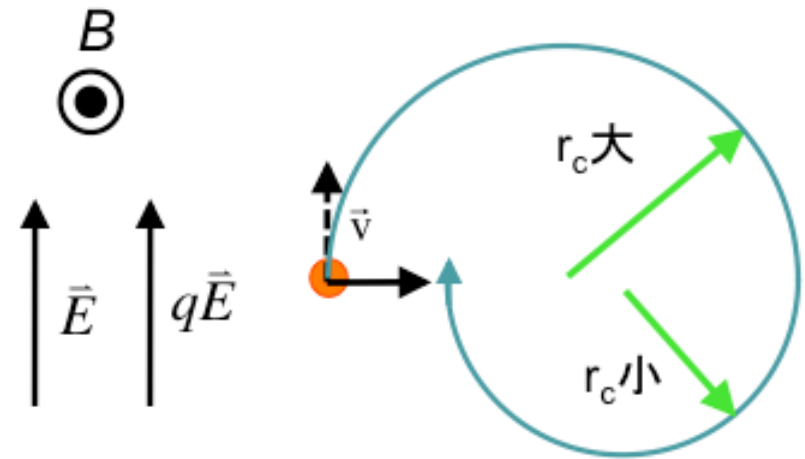
Diagram showing two parallel upward-pointing arrows labeled $\vec{E}$ and $q\vec{E}$, with a circle containing a dot and labeled B below them.

Diagram illustrating the trajectory of a charged particle in a magnetic field $\vec{B}$ (into the page) and a linear electric field $\vec{E}$ (to the right). The particle moves in a circular path with radius r_c . The trajectory is shifted to the right in the upper half and to the left in the lower half. Labels indicate velocity is maximum ($v_{\text{極大}}$) at the top and minimum ($v_{\text{極小}}$) at the bottom. The dot product of velocity and the electric force is negative ($\vec{v} \cdot q\vec{E} < 0$) at the top, leading to deceleration (減速), and positive ($\vec{v} \cdot q\vec{E} > 0$) at the bottom, leading to acceleration (加速). The force $q\vec{v} \times \vec{B}$ is shown at the leftmost point.

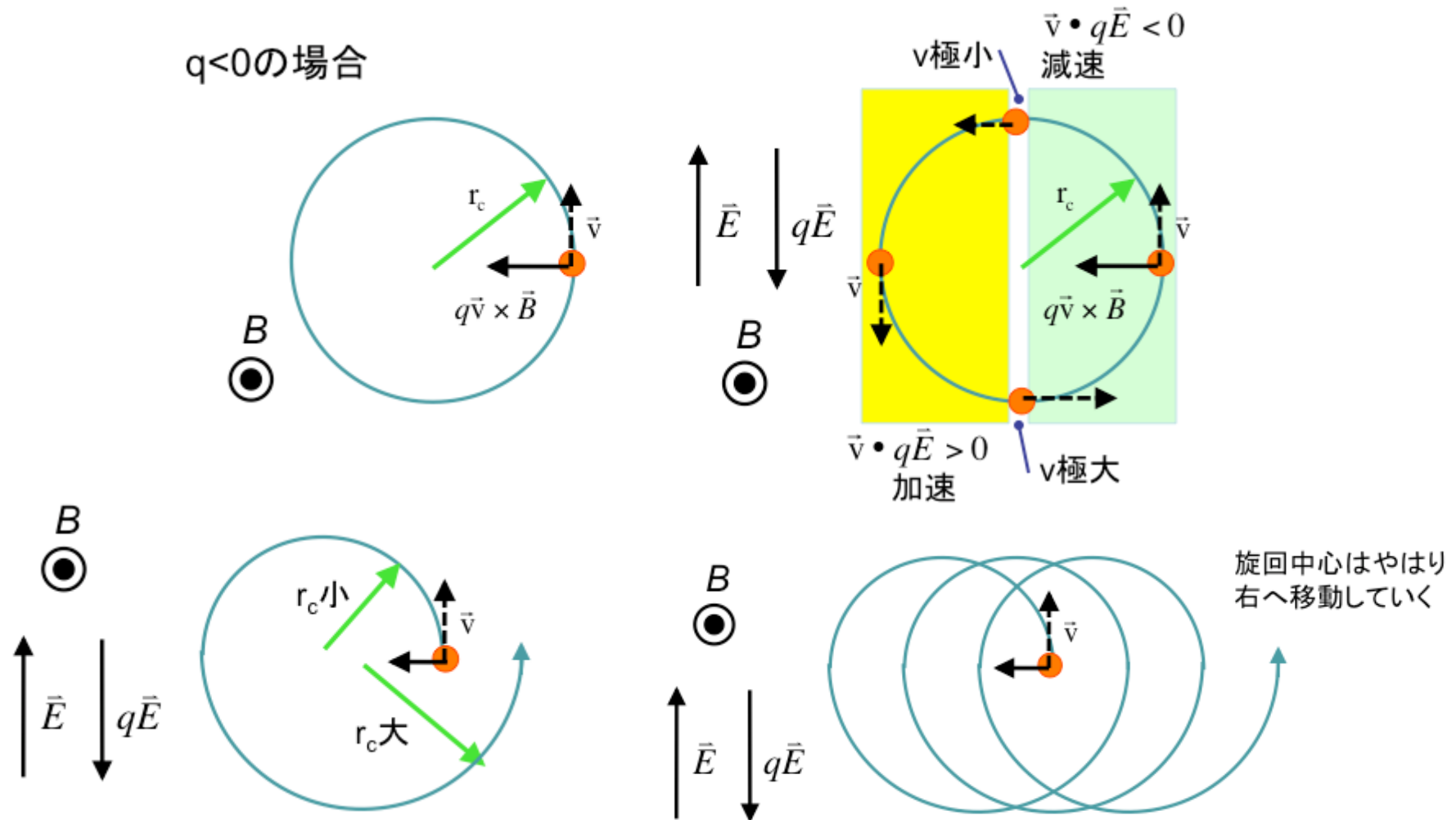
正電荷粒子を考えると、粒子は電場と同じ向きに運動するとき加速され、逆向きに運動するとき減速される。

回旋円の半径は磁力線垂直方向の速度に比例するので、速度が大きい(小さい)ところでは回旋円の半径が大きく(小さく)なり、一周したときに元の位置に戻って来ない。

このため、回旋中心はBとEの両方に垂直な向き($E \times B$ の向き)にドリフトする。



負電荷(電子)の場合は、逆向きの旋回運動となるが、速度が極大・極小となる位相も入れ替わるので、ドリフトの向きは正電荷の場合と同じになる。



<運動方程式からの $E \times B$ ドリフトの導出>

$$\text{運動方程式} \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

において、磁場 $\mathbf{B}$ を z 方向、電場 $\mathbf{E}$ を x 軸に垂直な方向に取り

$$\mathbf{B} = (0, 0, B), \mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$$

とすると

$$m \frac{dv_x}{dt} = qE_x + qv_y B_z - qv_z B_y = qv_y B$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = qE_y + qv_z B_x - qv_x B_z = qE_y - qv_x B$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = qE_z + qv_x B_y - qv_y B_x = qE_z$$

(3-3の電場がない場合と比較せよ)。これより z 方向は等加速度運動

$$v_z(t) = (qE_z/m)t + v_z(0)$$

で、 x, y 方向は以下のようになる。

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dv_y}{dt} = \frac{qB}{m} \left(\frac{qE_y}{m} - \frac{qB}{m} v_x \right) = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 \left(v_x - \frac{E_y}{B} \right)$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_y$$

v_y の式は、電場がないときと同じ。 v_x の式は

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(v_x - \frac{E_y}{B} \right) = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 \left(v_x - \frac{E_y}{B} \right) = -\omega_c^2 \left(v_x - \frac{E_y}{B} \right)$$

と書ける($\omega_c = |qB|/m$)ので、 v_x, v_y の解は

$$v_x - \frac{E_y}{B} = v_{\perp} \sin(\omega_c t) \quad \text{すなわち、} v_x = v_{\perp} \sin(\omega_c t) + \frac{E_y}{B}$$

$$v_y = \frac{m}{qB} \frac{dv_x}{dt} = \frac{m}{qB} \frac{|qB|}{m} v_{\perp} \cos(\omega_c t) = \pm v_{\perp} \cos(\omega_c t)$$

となる。つまり、荷電粒子の速度ベクトルは旋回運動と
 $\boldsymbol{v}_E = (E_y/B, 0, 0) = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/B^2$ の和となる。これは旋回中心が速度
 $\boldsymbol{v}_E$ で移動(ドリフト)することを示す。

任意の向きの電場・磁場に対して、一般的に $\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} / B^2$ となる。
 よって、この電場によるドリフトを通常、 **$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ ドリフト**(EクロスBドリフト)と呼ぶ。

実際、 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_E$ とおいて運動方程式に代入すると、 $d\boldsymbol{v}_E/dt = 0$ より

$$m \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = q\{\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_E) \times \boldsymbol{B}\} = q\left\{\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} + \frac{(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}}{B^2}\right\}$$

ここで $\boldsymbol{E} = E_{\parallel} \frac{\boldsymbol{B}}{B} + \boldsymbol{E}_{\perp}$ とおくと、

$(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{E}_{\perp} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{E}_{\perp} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{E}_{\perp} = -B^2 \boldsymbol{E}_{\perp}$
 より(ベクトル公式 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ を用いた)

$$m \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}_{\perp}) = qE_{\parallel} \frac{\boldsymbol{B}}{B} + q\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}$$

さらに

$$\boldsymbol{u} = u_{\parallel} \frac{\boldsymbol{B}}{B} + \boldsymbol{u}_{\perp} \quad \left(すなわち \boldsymbol{v} = u_{\parallel} \frac{\boldsymbol{B}}{B} + \boldsymbol{u}_{\perp} + \boldsymbol{v}_E\right)$$

とおくと

$$m \frac{du_{\parallel}}{dt} = qE_{\parallel}, \quad m \frac{d\boldsymbol{u}_{\perp}}{dt} = q\boldsymbol{u}_{\perp} \times \boldsymbol{B}$$

これらの式から、 v は磁力線方向の等加速度運動 $u_{\parallel}$ 、旋回運動 $u_{\perp}$ および $E \times B$ ドリフト v_E の和であることが分かる。