

プラズマ理工学

第2回

2023年10月16日

エネルギー理工学科 3年秋学期

日時: 月曜日 午前10時30分～12時00分

場所: 522講義室

教員: 藤田隆明(ふじたたかあき)

工学部8号館南棟4階

本日の内容

2. プラズマの基本的性質

2-1. マクスウェル分布

2-2. デバイ遮蔽

2-3. プラズマ振動

3. 荷電粒子の運動

3-1. 電磁気学の復習

3-2. 荷電粒子に働く力と
荷電粒子のエネルギー

2-1. マクスウェル分布

温度 T の気体の粒子(分子または原子)の速度を (v_x, v_y, v_z) とすると、粒子の(規格化した)速度分布関数は以下で表される(マクスウェル分布)。

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right) = g(v_x)g(v_y)g(v_z)$$

$$g(v_j) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m v_j^2}{2k_B T} \right) \quad \begin{array}{l} m: \text{粒子の質量、} \\ k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K: ボルツマン定数} \end{array}$$

$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$ は、速度空間において (v_x, v_y, v_z) を含む微小体積 $dv_x dv_y dv_z$ に含まれる粒子の数(確率)を表す。

$$\beta = \frac{m}{2k_B T} \text{ とおくと、 } g(v_j) = \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{1/2} \exp(-\beta v_j^2)$$

Appendixの式 $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ より $\int_{-\infty}^{\infty} g(v_j) dv_j = 1$ 。さらに、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \int_{-\infty}^{\infty} g(v_x) dv_x \int_{-\infty}^{\infty} g(v_y) dv_y \int_{-\infty}^{\infty} g(v_z) dv_z = 1$$

より $f(v_x, v_y, v_z)$ は全速度空間で積分して1になるように係数が決められている 3

速度 v_x, v_y, v_z の粒子が物理量 $X(v_x, v_y, v_z)$ を有するとき、速度空間全体の粒子に対する X の平均値 $\langle X \rangle$ は以下で表される。

$$\langle X \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z}$$

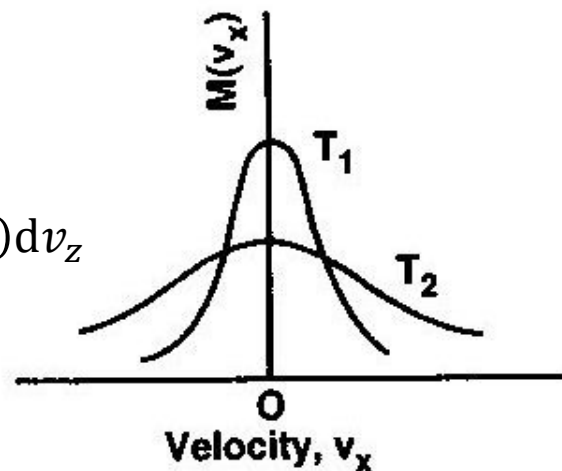
今の場合、分母=1なので、

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

$f(v_x, v_y, v_z)$ の定義や対象とする範囲においては分母が1とならない場合もあるので注意が必要である。

v_x についての速度分布関数は、 $v_x \sim v_x + dv_x$ の範囲に含まれる粒子の数(確率)を dv_x で除したものだから

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_y dv_z &= g(v_x) \int_{-\infty}^{\infty} g(v_y) dv_y \int_{-\infty}^{\infty} g(v_z) dv_z \\ &= g(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T} \right) \end{aligned}$$



A.A. Harms, et al. "Principles of Fusion Energy", World Scientific, 2000, Fig. 2.2

である(1次元のマクスウェル分布、ガウス分布)。温度 T が高いほど広がった分布になる。

速度の自乗 v_x^2 の平均値 $\langle v_x^2 \rangle$ は以下で与えられる(Appendixの式を使用)

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 g(v_x) dv_x}{\int_{-\infty}^{\infty} g(v_x) dv_x} = \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \exp(-\beta v_x^2) dv_x = \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{1/2} \times \frac{1}{2\beta} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{1/2}$$

$k_B T$
熱平衡状態にあるプラズマの粒子(イオン、電子)の速度分布関数も同様のマクスウェル分布をしており、温度 T を定義できる。

粒子の運動エネルギー $\varepsilon = (1/2)mv^2$ の平均値は

$$\langle \varepsilon \rangle = \left\langle \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right\rangle = \frac{m}{2} (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle) = \frac{m}{2} \left(\frac{k_B T}{m} + \frac{k_B T}{m} + \frac{k_B T}{m} \right) = \frac{3}{2} k_B T$$

粒子数密度を n とすると、エネルギー密度 w (単位体積あたりの粒子の運動エネルギー)は

$$w = n \langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} n k_B T$$

イオン(密度 n_i 、温度 T_i)と電子(密度 n_e 、温度 T_e)を考えると、 $(3/2)n_i k_B T_i + (3/2)n_e k_B T_e$ となる。

両者の密度、温度が等しければ、 $3n k_B T$ (ここで、 $n = n_i = n_e$, $T = T_i = T_e$)。

$f(v_x, v_y, v_z)$ は実は速度の大きさ v のみの関数である。

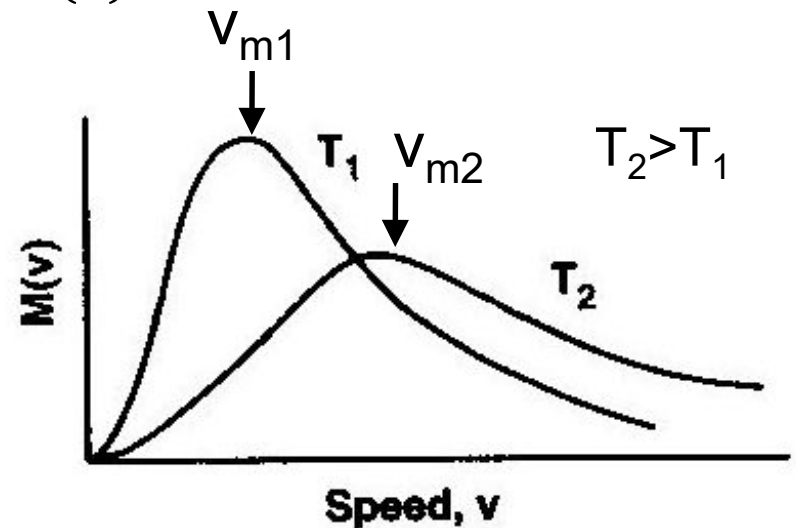
$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right), \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

v と $v + dv$ の間の速度を有する粒子の数を $F(v)dv$ とすると

$$\begin{aligned} F(v)dv &= \int_{v=v}^{v=v+dv} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \\ &= 4\pi v^2 f(v_x, v_y, v_z) \Big|_v dv \end{aligned}$$

より v についての速度分布関数は

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right)$$



これは以下の速度(最大確率速度)で極大値を持つ。

$$v_m = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad \because \frac{d}{dv}(v^2 e^{-\beta v^2}) = 2v e^{-\beta v^2} (1 - \beta v^2)$$

一方、平均速度 $\langle v \rangle$ 、自乗平均速度 v_r は以下の通り(Appendixの式を利用)。

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^\infty v F(v) dv}{\int_0^\infty F(v) dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv$$

$$= 4\pi \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\beta v^2} dv = 4\pi \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \times \frac{1}{2\beta^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi\beta}} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

$$v_r = \langle v^2 \rangle^{1/2} = \left(\frac{\int_0^\infty v^2 F(v) dv}{\int_0^\infty F(v) dv} \right)^{1/2} = \left(4\pi \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 e^{-\beta v^2} dv \right)^{1/2}$$

$$= \left(4\pi \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \times \frac{3}{8\beta^2} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{1/2} \right)^{1/2} = \left(\frac{3}{2\beta} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} = (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle)^{1/2} = \left(\frac{k_B T}{m} + \frac{k_B T}{m} + \frac{k_B T}{m} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

としてもよい。

最大確率速度 v_m 、平均速度 $\langle v \rangle$ 、自乗平均速度 v_r には以下の関係がある。

$$v_m : \langle v \rangle : v_r = \sqrt{2} : \sqrt{\frac{8}{\pi}} : \sqrt{3} = 1 : 1.13 : 1.22$$

温度 T のプラズマの粒子の代表的な速度(熱速度)としては、通常

$$v_m = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad \text{あるいは} \quad v_t = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \quad \text{を用いる。}$$

温度 T の単位は[K]であるが、プラズマ理工学の分野では、 $k_B T$ [J]をeV単位に換算したものを温度の単位としてよく用いる。 $(1/2)mv_m^2 = k_B T$ なので、これは速度 v_m の速度の粒子の運動エネルギーに等しい。

$$1\text{eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J} = 1.60 \times 10^{-19} / 1.38 \times 10^{-23} \text{ K} = 1.16 \times 10^4 \text{ K}$$

つまり1eVは1.16万度に相当する。

1keV(=1160万度)の電子、水素イオンの熱速度 v_m はそれぞれ、

$$v_{m,e} = \sqrt{\frac{2 \times 10^3 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 1.88 \times 10^7 \text{ m/s} \quad v_{m,i} = \sqrt{\frac{2 \times 10^3 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}} = 4.28 \times 10^5 \text{ m/s}$$

電子はイオンよりずっと軽い(水素イオンの1/1800)ので、電子とイオンの速度は数十倍異なる。

プラズマの圧力

$x = 0$ に壁があり、プラズマ粒子がそこで完全反射されるとする。反射前の運動量： mv_x 、反射後の運動量 $-mv_x$
1個の粒子が1回の反射あたりに壁に与える運動量は
 $2mv_x$ 。

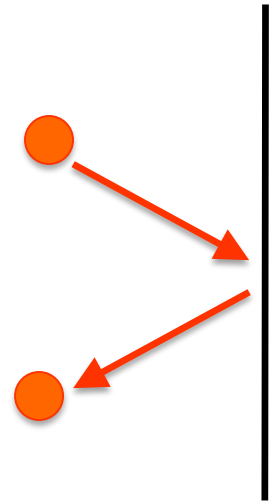
プラズマの圧力 p は、単位面積単位時間に壁に与える運動量として定義される。単位面積単位時間に速度 $v_x \sim v_x + dv_x$ で壁に衝突する粒子の数は $nv_x g(v_x) dv_x$ 与えられるので、

$$p = 2mn \int_0^{\infty} v_x^2 g(v_x) dv_x = 2mn \cdot \frac{1}{2} \langle v_x^2 \rangle = 2mn \cdot \frac{k_B T}{2m} = nk_B T$$

圧力とエネルギー密度($3nk_B T/2$)は同じ次元を有するが値は異なることに注意。

イオンと電子を考えると、 $n_i k_B T_i + n_e k_B T_e$ となる。両者の密度、温度が等しければ、 $2nk_B T$ (ここで、 $n = n_i = n_e$, $T = T_i = T_e$)。

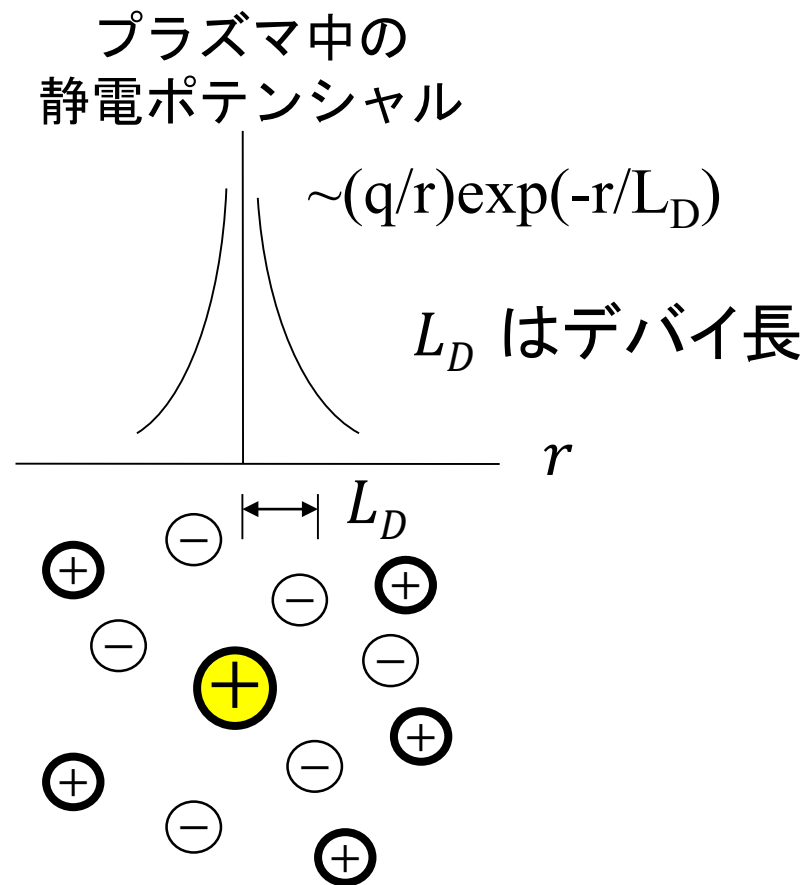
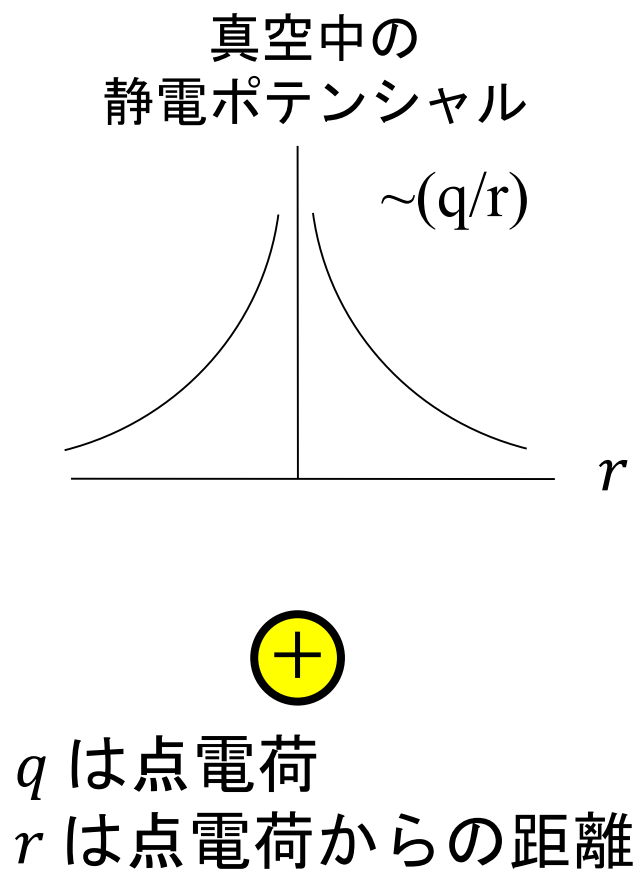
例えば、密度 $1 \times 10^{20} \text{m}^{-3}$ 、温度 10keV の核融合プラズマの場合、
 $p = 2nk_B T = 2 \times (1 \times 10^{20}) \times (10 \times 10^3 \times 1.60 \times 10^{-19}) = 3.2 \times 10^5 \text{ Pa} \sim 3.2 \text{ atm}$
 $w = 3nk_B T = 4.8 \times 10^5 \text{ J/m}^3$



2-2. デバイ遮蔽

プラズマ中に点電荷(電極)を挿入すると、その周りに反対符号の荷電粒子が集まり同符号の荷電粒子は遠ざかるため電場が遮蔽される $\Rightarrow$ **デバイ遮蔽**。

実際には、荷電粒子(イオン、電子)が熱運動のエネルギーを持っているため遮蔽は完全ではなく、静電ポテンシャルは指数関数的に減少する分布となる。その特徴的な距離を**デバイ長**という。



静電ポテンシャル ϕ によるエネルギー $q\phi$ (q は粒子の電荷)を考慮すると、マクスウェル分布は、**マクスウェルボルツマン分布**へ拡張される。

$$f(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{1}{2} m v^2 + q\phi(x, y, z) \right) \right)$$

速度空間で積分して、粒子密度分布は

$$n(x, y, z) = n_0 \exp \left(-\frac{q\phi(x, y, z)}{k_B T} \right)$$

$x = 0$ にある帯電した平板の周りにプラズマがある場合のポテンシャルを考える。簡単のため、イオンは一様に分布し、電子のみがポテンシャルに対応する分布を持つとすると、ポアソン方程式は

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 \phi = \rho = -en_e + en_i = -en \exp \left(\frac{e\phi}{k_B T} \right) + en \quad \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

ポアソン方程式とは？

静電場についてのガウスの法則 $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

静電場を静電ポテンシャルで表現 $\vec{E} = -\nabla \phi$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot (\nabla \phi) = -\nabla^2 \phi$$

$|e\phi| \ll k_B T$ が成り立つ場合 (弱結合プラズマ)、

$$\exp\left(\frac{e\phi}{k_B T}\right) = 1 + \frac{e\phi}{k_B T} + \frac{1}{2}\left(\frac{e\phi}{k_B T}\right)^2 + \dots = 1 + \frac{e\phi}{k_B T} \text{ を用いて、}$$

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 \phi = -en \left(1 + \frac{e\phi}{k_B T}\right) + en = -\frac{ne^2 \phi}{k_B T} \quad \text{つまり} \quad \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{ne^2 \phi}{\varepsilon_0 k_B T}$$

$$L_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{ne^2}} \quad \text{とおけば} \quad \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{\phi}{L_D^2} \rightarrow \phi(x) = \phi(0) \exp\left(-\frac{|x|}{L_D}\right)$$

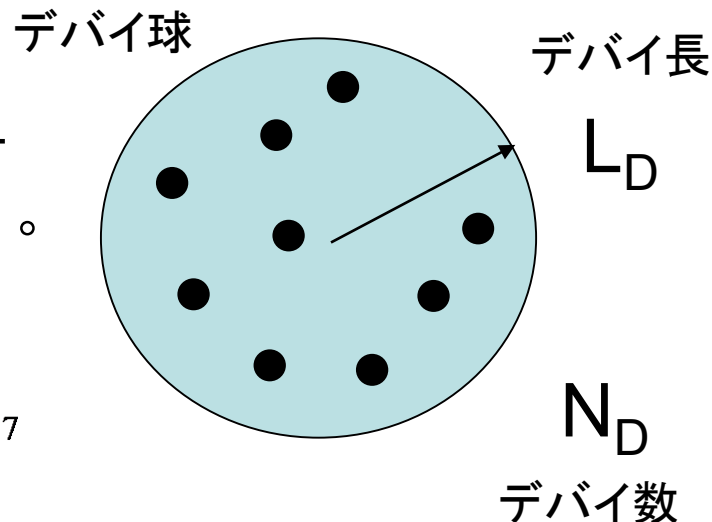
デバイ長 L_D は、温度の平方根に比例し、電子密度の平方根に反比例する。

$$L_D = 7.43 \times 10^{-7} \sqrt{\frac{k_B T [\text{eV}]}{n [10^{20} \text{m}^{-3}]}}$$

デバイ長を半径とする球の中に含まれるイオンまたは電子の総数を **デバイ数** と呼ぶ (N_D)。

1keV, 10^{19}m^{-3} のプラズマで

$$L_D = 0.074 \text{mm} \quad N_D = \frac{4}{3} \pi L_D^3 n = 1.7 \times 10^7$$



デバイ数と結合パラメータとの関係

上記計算の途中で、 $|e\phi| \ll k_B T$ が成り立つ(弱結合プラズマ)ことを仮定した。

$|e\phi|$ はポテンシャルエネルギー、 $k_B T$ は熱エネルギーであり、その比 $\Gamma = |e\phi|/k_B T$ を結合パラメータと言う。

実は、 $N_D \gg 1$ と $\Gamma \ll 1$ とは等価である。

$$\text{粒子間の平均距離を } a \text{ とすると、} \quad \phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \quad \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \times \frac{1}{k_B T} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \times \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} n^{1/3} \times \frac{1}{k_B T} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \times \frac{e^2 n^{1/3}}{\epsilon_0 k_B T} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \times \frac{e^2 n}{\epsilon_0 k_B T} \times \frac{1}{n^{2/3}} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \times \frac{1}{L_D^2} \times \frac{1}{n^{2/3}} = \frac{1}{3N_D^{2/3}} \end{aligned}$$

2-3. プラズマ振動

デバイ遮蔽が働くには荷電粒子(電子)の移動が必要である。短時間(高周波)であればプラズマ内に電場が生じる(プラズマ中の波動)。

密度一様($n_e = n_i$)のプラズマ中で、電子密度の空間的変動(非一様性)が発生したと考える。

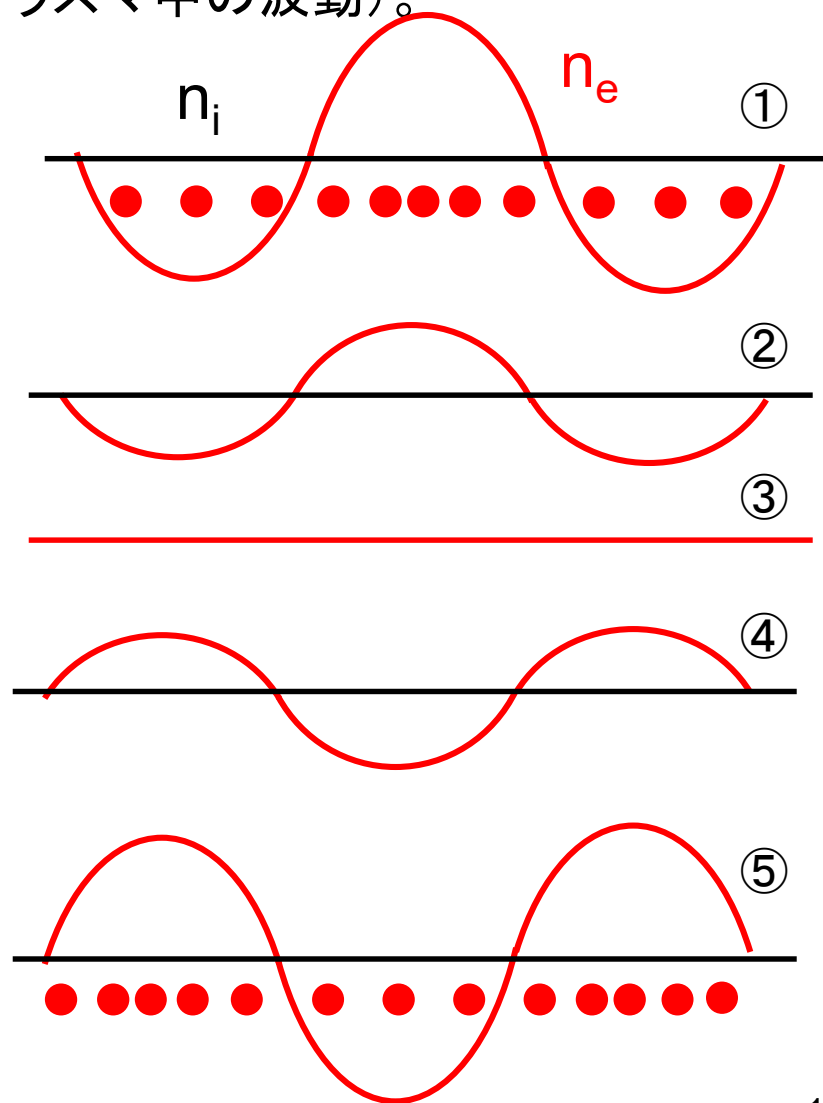
$$n_e(x, t) = n_{e0} + n_1(x, t)$$

密度が高くなった(密集した)場所では、電子はお互いに反発して散らばろうとする。イオンは重いので動かないとしてよい。

電子密度が平坦になったところで、反発力はなくなる(③)。ここでは電場のエネルギーが全て電子の運動エネルギーに変換されている。

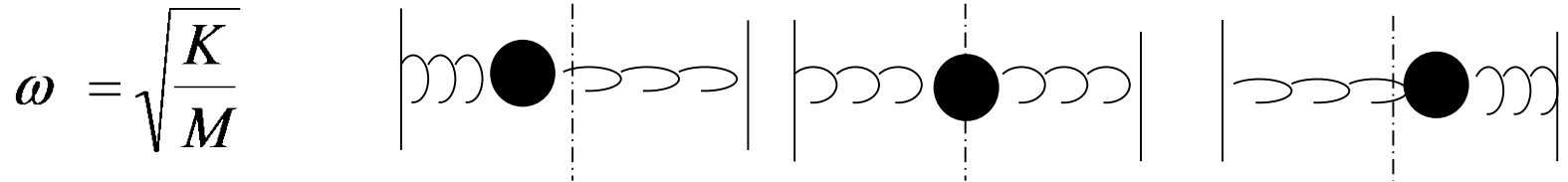
③で電子は速度を持っているので、行きすぎて逆位相の変動分布ができる(⑤)。

これを繰り返して振動が発生する(プラズマ振動)。



振動の角周波数は次式で与えられる(プラズマ周波数) $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}$

バネに繋がれた質点の運動との類似性に注意(M : 質点の質量、 K : バネ定数)。



実用的な公式

$$f_p [\text{Hz}] = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}} = 9.0 \times 10^{10} \sqrt{n_e [10^{20} \text{m}^{-3}]}$$

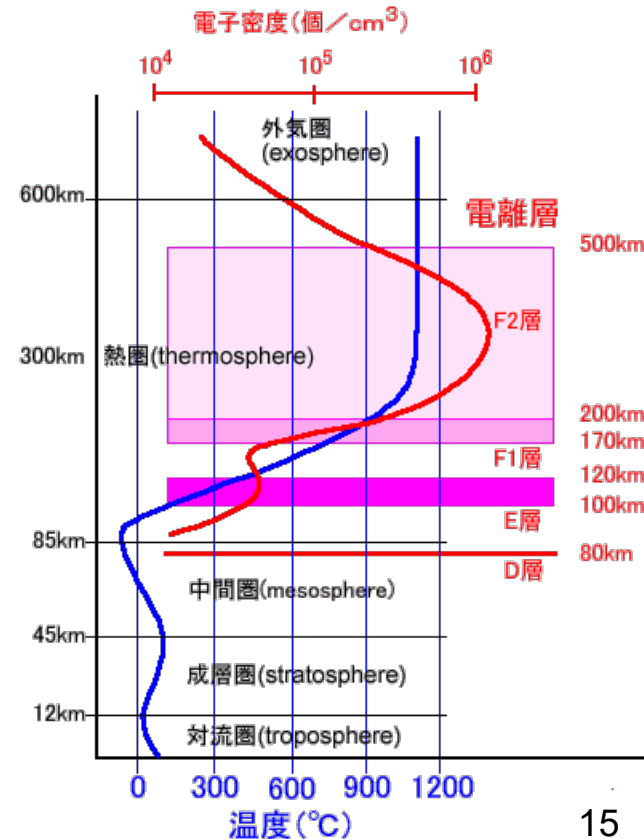
核融合プラズマ $n_e = 1 \times 10^{20} \text{m}^{-3}$ で

$$f_p = 90 \text{ GHz}$$

f_p より周波数の低い電磁波はプラズマ中を伝播できない。

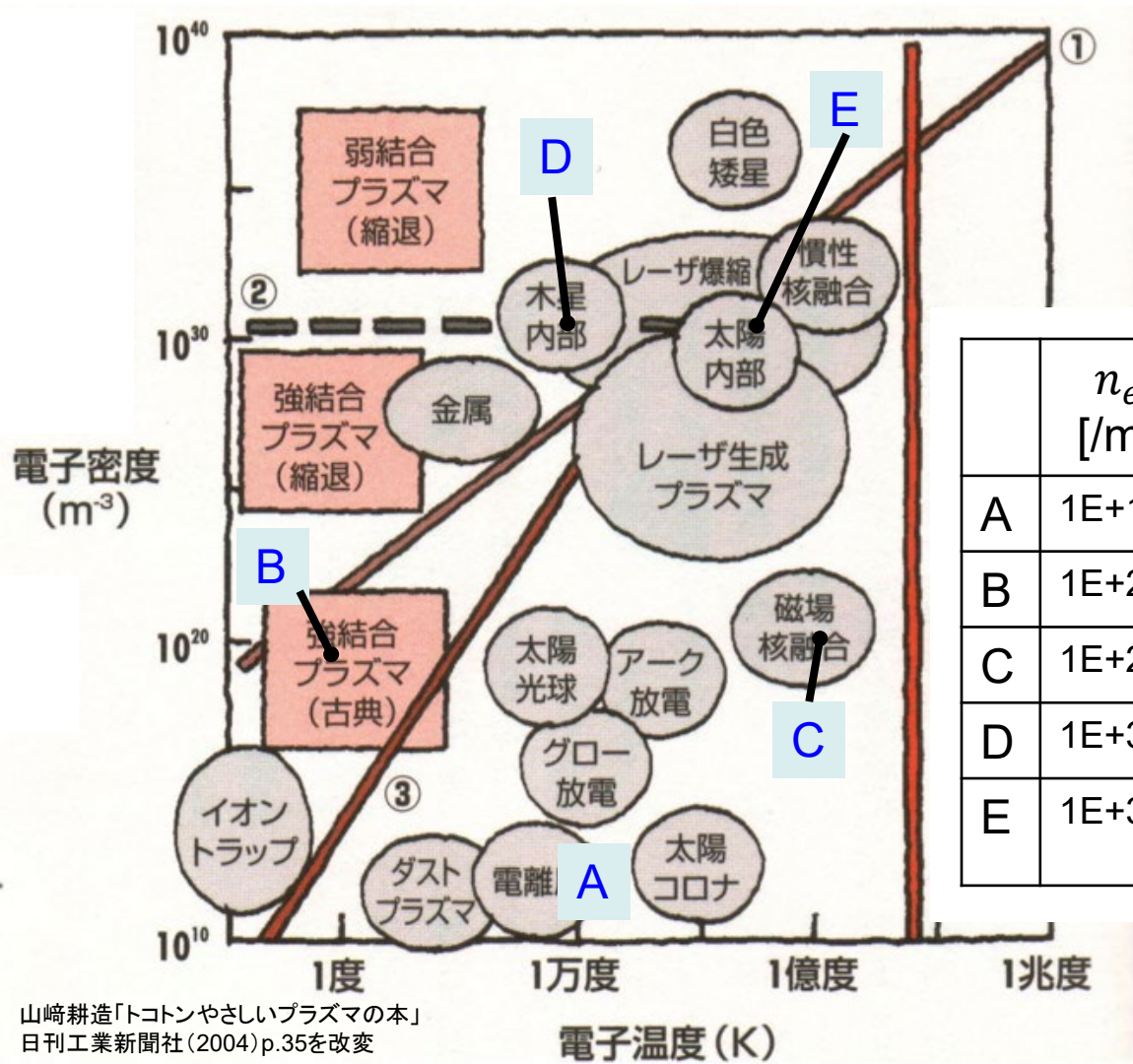
⇒電離層における電波の反射(最も密度の高いF2層で短波3-30MHzが反射される)

$$n_e = 1 \times 10^6 \text{ cm}^{-3} = 1 \times 10^{12} \text{ m}^{-3} \text{ で } f_p = 9 \text{ MHz}$$



プラズマが「プラズマらしく」振る舞うための条件

- (1) 集団的振る舞い $N_D \gg 1$
- (2) 空間的な広がり $L \gg L_D$ (L はプラズマの特徴的な長さ)
- (3) 個々の粒子の寿命 $T \gg 1/f$ (f はプラズマの典型的な振動の周波数)

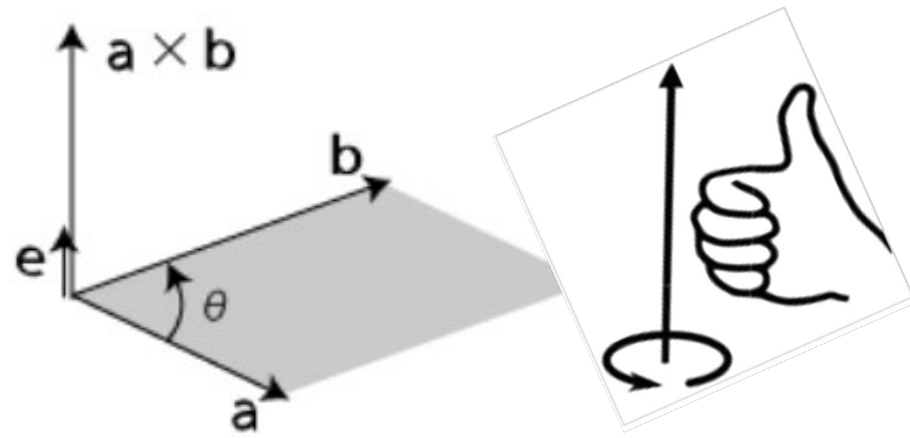


	n_e [m^{-3}]	T_e [eV]	L_D [m]	N_D	$1/f_p$ [s]
A	1E+11	1	2.3E-2	5.4E+6	2.2E-6
B	1E+20	1E-4	7.4E-9	1.7E-4	7.0E-11
C	1E+20	1E+4	7.4E-5	1.7E+8	7.0E-11
D	1E+30	1	7.4E-12	1.7E-3	7.0E-16
E	1E+30	1E+3	2.3E-10	54	7.0E-16

3-1. 電磁気学の復習

ベクトル演算と公式

外積 $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, c = ab\sin\theta,$
 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0,$
 $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$



勾配 $\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z$

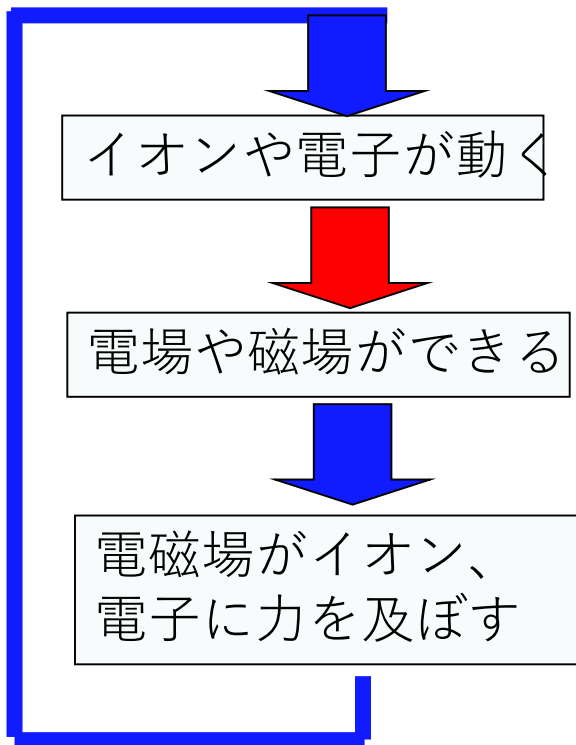
発散 $\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$
ガウスの発散定理

回転 $\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS = \int_C \vec{A} \cdot \vec{t} dl \quad \text{ストークスの定理}$$

ラプラシアン

$$\text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



イオンの密度と電子の密度の違い⇒電荷分布⇒電場

イオンの流れと電子の流れの違い⇒電流分布⇒磁場

マクスウェル方程式: 電荷分布 ρ 、電流分布 j から電場 E 、磁場 B を決める式
真空中では、

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m: 真空の誘電率

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m: 真空の透磁率

定常状態では、 $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ より、 $\vec{E} = -\nabla \phi$ と書くことができる(ϕ は静電ポテンシャル)。

$$-\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ポアソン方程式}$$

マクスウェル方程式の積分形と各種法則

微分形

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

積分形

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

ガウスの法則

対称性があるとき

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\int_C \vec{E} \cdot \vec{t} dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

ファラデーの電磁誘導の法則

$$E_\theta = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$$

$$\nabla \times \vec{B}$$

$$= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\int_C \vec{B} \cdot \vec{t} dl$$

$$= \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

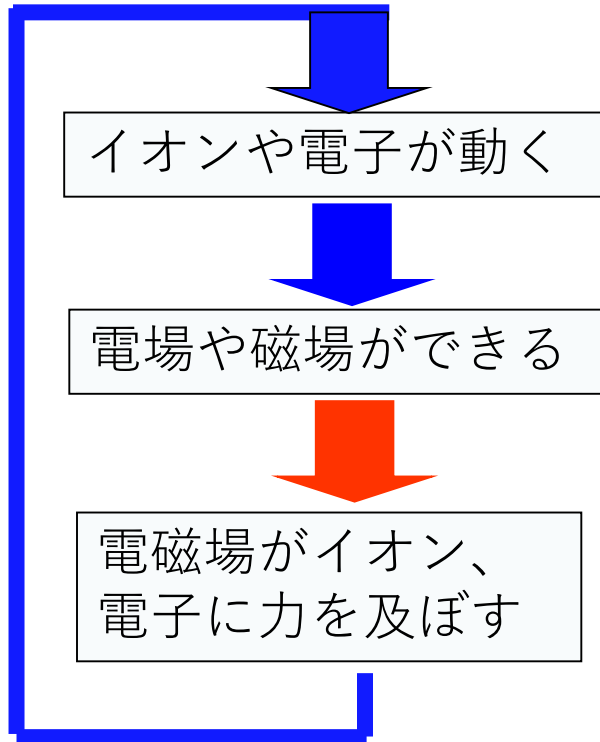
アンペールの法則(第2項が無視できるとき)

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I_z}{2\pi r}$$

(第2項が無視できるとき)

3-2. 荷電粒子に働く力と荷電粒子のエネルギー

電磁場中の荷電粒子(電荷 q 、速度 $\vec{v}$)に働く力 $\vec{F}$ 。

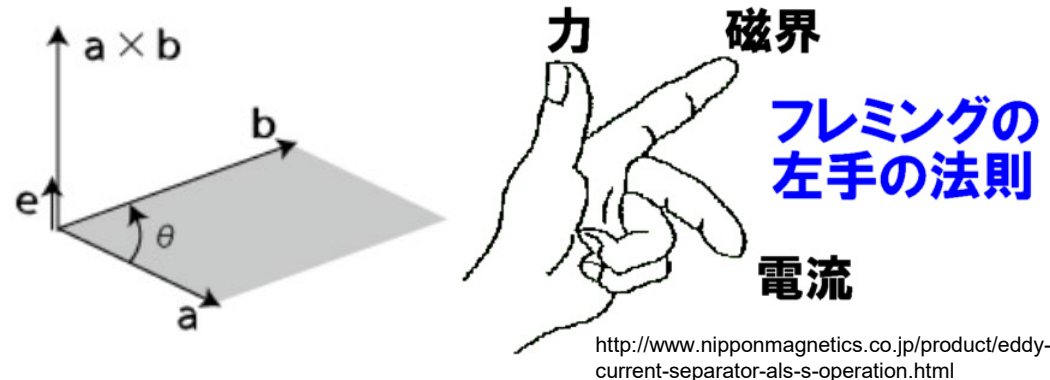


イオンの密度と電子の密度の違い⇒電荷分布⇒電場

イオンの流れと電子の流れの違い⇒電流分布⇒磁場

クーロン力: $\vec{F} = q\vec{E}$

ローレンツ力(狭義): $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$



合わせて、 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

ローレンツ力(広義)

運動方程式は $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

粒子の運動エネルギーの変化率は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= m\left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt}\right) = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= q\vec{v} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{v} \cdot \vec{E}\end{aligned}$$

磁場による力 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ は常に進行方向 $\boldsymbol{v}$ に垂直なので、仕事をしない。電場がない定常磁場においては、粒子の運動エネルギーは保存される。

静電場があるとき、静電ポテンシャル ϕ を用いて $\vec{E} = -\nabla\phi$ とおくと

$$\vec{v} \cdot \vec{E} = -\vec{v} \cdot \nabla\phi = -\frac{dx}{dt} \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{dy}{dt} \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{dz}{dt} \frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{より}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -q \frac{d\phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + q\phi\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + q\phi = \text{const.}$$

これは粒子の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和が保存されることを表す。

Appendix

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx \quad \text{及び} \quad \int_0^{\infty} x^n \exp(-ax^2) dx \quad \text{の計算}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx \quad \text{と置く。}$$

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-a(x^2 + y^2)\} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \exp(-a\rho^2) \rho d\rho \right] d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2a} \exp(-a\rho^2) \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

また、部分積分等より

$$\int_0^{\infty} x \exp(-ax^2) dx = \left[-\frac{1}{2a} \exp(-ax^2) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 \exp(-ax^2) dx = \left[-\frac{x}{2a} \exp(-ax^2) \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^3 \exp(-ax^2) dx = \left[-\frac{x^2}{2a} \exp(-ax^2) \right]_0^{\infty} + \frac{1}{a} \int_0^{\infty} x \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^{\infty} x^4 \exp(-ax^2) dx = \left[-\frac{x^3}{2a} \exp(-ax^2) \right]_0^{\infty} + \frac{3}{2a} \int_0^{\infty} x^2 \exp(-ax^2) dx = \frac{3}{8a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad 22$$

レポート課題

次回の講義10月23日(月)開始時に提出すること。冒頭に学生番号と氏名を記入すること。 k_B をボルツマン定数とする。

問1: 質量 m の粒子群があり、その x 方向の速度 v_x についての分布関数が温度 T の1次元のマクスウェル分布となっている。 $v_x > 0$ の粒子(x 軸正方向に動く粒子)の v_x の平均値 $\langle v_x \rangle_P$ を求めよ。

問2: イオン密度=電子密度= n 、イオン温度=電子温度= T 、体積 V の水素プラズマの熱エネルギー(粒子の運動エネルギーの総和)を求めよ

問3: 電子密度 10^{18} m^{-3} 、電子温度 $k_B T = 4 \text{ eV}$ のプラズマのデバイ長とデバイ数を求めよ。

問4: 半径 0.1 m の球状の水素プラズマの表面(球面)に、径方向外側向きの 1 kV/m の大きさの一様な電場がある。プラズマの帯電量を求めよ。電子密度 $n_e = 10^{16} \text{ m}^{-3}$ 、球内の水素イオンの個数を N_i 、電子の個数を N_e とすると、 $(N_i - N_e)/N_e$ を求めよ。

ヒント: 帯電量はガウスの法則より求められる。