2024 年 1 月 22 日

プラズマ理工学　第 13 回

エネルギー理工学科　３年秋学期
日時:月曜日　午前10時30分～12時00分、場所:522 講義室
教員:藤田隆明、工 8 号館南棟4階

8. プラズマにおける熱・粒子の輸送（続き）

8-4. 弱電離プラズマにおける拡散

　電離度が低く、プラズマが主に中性粒子（密度・温度が一様）と衝突する場合の拡散を考える。

8-4-1. 磁場がない場合

　粒子種jの流体に対する運動方程式は

$$m_j n_j \left(\frac{\partial \vec{V}_j}{\partial t} + (\vec{V}_j \bullet \nabla)\vec{V}_j \right) = n_j q_j \vec{E} - \nabla p_j - m_j n_j \nu_j \vec{V}_j \qquad (8\text{-}12)$$

ここで、ν_j は粒子種jと中性粒子との衝突周波数。中性粒子との剛体衝突なのでν_j は粒子種jの速度（熱速度）に比例する。流速$\boldsymbol{V}$が十分小さい定常状態を考え、かつイオン・電子の温度を一様とすると

$$\vec{0} = n_j q_j \vec{E} - k_B T_j \nabla n_j - m_j n_j \nu_j \vec{V}_j \quad \text{より}$$

$$\vec{V}_j = \frac{q_j}{m_j \nu_j}\vec{E} - \frac{k_B T_j}{m_j \nu_j}\frac{\nabla n_j}{n_j} \qquad (8\text{-}13)$$

が得られる。第１項の係数を移動度と言う。第２項の係数は拡散係数（粒子束が$n_j V_j$であることに注意）。

$$\text{移動度}: \mu_j = \frac{|q_j|}{m_j \nu_j}, \qquad \text{拡散係数}: D_j = \frac{k_B T_j}{m_j \nu_j} \qquad (8\text{-}14)$$

　これらを用いると、(8-13)式は

$$\vec{V}_j = \pm \mu_j \vec{E} - D_j \frac{\nabla n_j}{n_j} \qquad (8\text{-}15)$$

と書ける（第１項の符号はq_jの符号）。移動度と拡散係数との間には次式が成り立つ。

$$\frac{D_j}{\mu_j} = \frac{k_B T_j}{|q_j|} \qquad (8\text{-}16)$$

これはブラウン運動におけるアインシュタインの関係式 $D_j = \mu_j k_B T_j$ を荷電粒子の運動に適用したものになっている。

粒子束Γ_j [1/m^{2}s]は流速V_j [m/s]に密度n_j [1/m^3] を掛けたものであり

$$\vec{\Gamma}_j = n_j \vec{V}_j = \pm \mu_j n_j \vec{E} - D_j \nabla n_j \qquad (8\text{-}17)$$

(8−14)式より衝突周波数が大きい（中性粒子密度が高い）ほど拡散係数が小さくなる。

もし電場Eがゼロであれば、これは Fick の法則となる: $\vec{\Gamma}_j = -D_j \nabla n_j$。

＜両極性拡散＞

水素イオンと電子について(8−17)式を書くと

$$\vec{\Gamma}_i = \mu_i n \vec{E} - D_i \nabla n$$
$$\vec{\Gamma}_e = -\mu_e n \vec{E} - D_e \nabla n$$

ここで、空間電荷はほぼゼロ（$n_i \sim n_e \sim n$)だが電場はゼロでないとする準中性条件を用いた。

大きな熱速度を持つ電子が先に逃げイオンが取り残されて外向きの電場が生じ、$\Gamma_\mathrm{i} = \Gamma_\mathrm{e}$ が成り立って定常状態になる。このとき、上２式を$\vec{E}$とΓ_iについて解くと

$$\vec{0} = (\mu_i + \mu_e) n \vec{E} - (D_i - D_e) \nabla n \ \rightarrow \ \vec{E} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n}$$

$$(\mu_i + \mu_e) \vec{\Gamma}_i = -\mu_e D_i \nabla n - \mu_i D_e \nabla n \ \rightarrow \ \vec{\Gamma}_i = -\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n$$

上式（下）の係数を両極性拡散係数と言う。

$$D_a = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \qquad (8\text{-}18)$$

(8−14) 式において、（中性粒子との）衝突周波数ν_jは速度に比例し、速度

（熱速度）は質量m_jの平方根にほぼ反比例するため、一般に$m_\mathrm{e}\nu_\mathrm{e} \ll m_\mathrm{i}\nu_\mathrm{i}$すなわち $_\mathrm{i}\mu_\mathrm{e} \gg \mu_\mathrm{i}$であるので、$T_\mathrm{i}$~$T_\mathrm{e}$のときは

$$D_a \approx \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_e} = D_i + \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e = \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) D_i \approx 2D_i$$

ここで(8-16)式より$\mu_i/\mu_e = \left(T_e/T_i\right) D_i/D_e$となることを用いた。上式は遅い方の粒子（イオン）で拡散が決まることを示している。

8-4-2. 磁場がある場合

粒子種jの流体に対する運動方程式は

$$m_j n_j \left(\frac{\partial \vec{V}_j}{\partial t} + (\vec{V}_j \bullet \nabla) \vec{V}_j \right) = n_j q_j \left(\vec{E} + \vec{V}_j \times \vec{B} \right) - \nabla p_j - m_j n_j \nu_j \vec{V}_j \qquad (8\text{-}19)$$

再び、流速$\vec{V}$が十分小さい定常状態でかつイオン・電子の温度が一様とすると

$$\vec{0} = n_j q_j \left(\vec{E} + \vec{V}_j \times \vec{B} \right) - k_B T_j \nabla n_j - m_j n_j \nu_j \vec{V}_j$$

となる。ここで磁場をz軸方向としそれに垂直方向の運動を考える。密度勾配をx軸方向に取る。電場もx軸方向になるので

x成分： $$n_j q_j \left(E_x + V_{jy} B \right) - k_B T_j \frac{dn_j}{dx} - m_j n_j \nu_j V_{jx} = 0 \qquad (8\text{-}20)$$

y成分： $$n_j q_j \left(-V_{jx} B \right) - m_j n_j \nu_j V_{jy} = 0 \qquad (8\text{-}21)$$

となる。これをV_{jx}，V_{jy}について解いて（Appendix 参照）、以下を得る。

$$V_{jx} = \frac{1}{1 + \omega_{cj}^2 / \nu_j^2} \left(\frac{q_j}{m_j \nu_j} E_x - \frac{k_B T_j}{n_j m_j \nu_j} \frac{dn_j}{dx} \right) \qquad (8\text{-}22)$$

$$V_{jy} = -\frac{\omega_{cj}^2 / \nu_j^2}{1 + \omega_{cj}^2 / \nu_j^2} \left(\frac{E_x}{B} - \frac{k_B T_j}{q_j n_j B} \frac{dn_j}{dx} \right) \qquad (8\text{-}23)$$

磁場がないときの移動度、拡散係数（(8-14)式）を用いると、(8-22)式は

$$V_{jx} = \frac{1}{1 + \omega_{cj}^2 / \nu_j^2} \left(\pm \mu_j E_x - \frac{D_j}{n_j} \frac{dn_j}{dx} \right) \qquad (8\text{-}24)$$

と書ける。これを(8-15)式と比べると、磁場Bの存在により移動度、拡散係数とも$1+\omega_{cj}^2/\nu_j^2$分の 1 になっている。一方、(8-23)式は、$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ドリフト速度$V_E$及び反磁性ドリフト速度$V_D$を用いて

$$V_{jy}=\frac{\omega_{cj}^2/\nu_j^2}{1+\omega_{cj}^2/\nu_j^2}\left(V_E+V_{jD}\right) \qquad (8\text{-}25)$$

と書くことができる。ここで以下を用いた。

$$\boldsymbol{V}_E=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/B^2=-E_x/B\,\boldsymbol{e}_y,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{jD}&=-\nabla p_j\times\boldsymbol{B}/q_jn_jB^2=\left\{k_\mathrm{B}T_jB\left(dn_j/dx\right)/q_jn_jB^2\right\}\boldsymbol{e}_y\\&=\left\{k_\mathrm{B}T_j\left(dn_j/dx\right)/q_jn_jB\right\}\boldsymbol{e}_y\end{aligned}$$

磁場が弱く$\omega_{cj}^2/\nu_j^2<<1$であれば、密度勾配方向の流速あるいは粒子束は磁場がない場合と変わらない。磁場が強く$\omega_{cj}^2/\nu_j^2>>1$であれば、磁場の強さの自乗に反比例して小さくなる。1回の衝突による移動量が旋回半径に比例することに対応している。なお$\omega_{cj}^2/\nu_j^2>>1$のときx方向の流体速度(8-22)の密度勾配の係数を$D_{j\perp}/n_j$とおけば

$$D_{j\perp}=\frac{1}{\omega_{cj}^2/\nu_j^2}\frac{k_BT_j}{m_j\nu_j}=\frac{k_BT_j\nu_j}{m_j\omega_{cj}^2} \qquad (8\text{-}26)$$

となるので、衝突周波数が大きいほど磁場に垂直方向の拡散係数が大きくなる。これは磁場がないときの拡散係数（式(8-14)）とは逆の依存性。

衝突は磁場がないときあるいは磁場方向については拡散を妨げる働きをする。一方、磁場に垂直方向については、衝突がなければ拡散は生じず、衝突が拡散を引き起こす。また中性原子との衝突周波数はプラズマ粒子の速度（温度の平方根）に比例するので、(8-26)式よりDは温度の$3/2$乗に比例して大きくなることが分かる。

8-5. 完全電離プラズマにおける拡散

完全電離プラズマでは中性原子との衝突が荷電粒子間のクーロン衝突に対して無視できるほど少ない。

クーロン衝突において、同符号の電荷を持つ粒子間の衝突は拡散を引き起こさない。一方、反対符号の電荷を持つ粒子間の衝突は拡散を起こすが、

それらの粒子は同じだけ移動し電場は発生しない。つまり両極性拡散の条件が自動的に満たされる。これは衝突前後での運動量の保存から導かれる（導出省略）。

粒子束は一流体 MHD 方程式から導かれるが、実は「5-5-4. プラズマ抵抗と圧力勾配に伴う磁場を横切る流れ」で導出済（(5-22)式）。以下に再掲する。

平衡の式：$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} p$

マクスウェル方程式：$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$

（簡単化した）一般化オーム則：

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B} = \eta \boldsymbol{j}$$

一般化オーム則と$\boldsymbol{B}$との外積を取ると

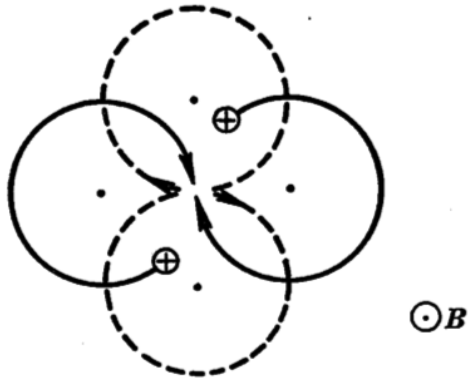
$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} + (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} = \eta \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = \eta \boldsymbol{\nabla} p$$

$(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} = -B^2 \boldsymbol{V}_\perp$なので

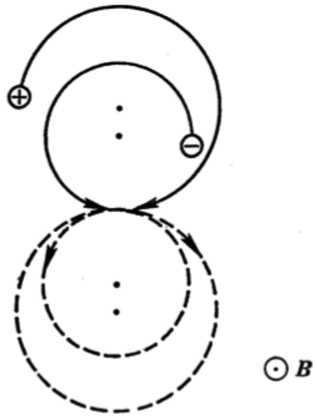
$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} - B^2 \boldsymbol{V}_\perp = \eta \boldsymbol{\nabla} p$$

すなわち

$$\boldsymbol{V}_\perp = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2} - \frac{\eta \boldsymbol{\nabla} p}{B^2} \qquad (5\text{-}22)$$



同符号の電荷を持つ粒子の衝突



異符号の電荷を持つ粒子の衝突

参考文献[1]図 5.16 および 5.17

第１項は$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ドリフトの項、第２項 $\boldsymbol{V}_\eta = -\frac{\eta \boldsymbol{\nabla} p}{B^2}$ はプラズマ抵抗に伴い圧力勾配方向へ（圧力が低くなる向きへ）生じる流れを示す。温度が一様の場合、$\boldsymbol{V}_\eta$による粒子束は

$$\bar{\Gamma}_\perp = n\left(-\frac{\eta \nabla p}{B^2}\right) = -\frac{\eta n\left(k_B T_i + k_B T_e\right)}{B^2} \nabla n = -\frac{\eta p}{B^2} \nabla n \qquad (8\text{-}27)$$

となるので、拡散係数は

$$D_\perp = \frac{\eta p}{B^2} \qquad (8\text{-}28)$$

で与えられる。磁場に垂直方向の拡散係数はBの自乗に反比例する。これは弱電離プラズマの場合と同様。温度依存性は異なる。抵抗率ηは電子温度の$3/2$乗に反比例するので、完全電離プラズマの Dは電子温度の$1/2$乗に反比例する（(8-26)式の下の記述より弱電離プラズマでは電子温度の$3/2$

乗に比例）。(8-28)式のDを完全電離プラズマの「古典拡散係数」と言う。

電気抵抗率ηは電子とイオンの衝突周波数ν_{ei}を用いて、$\eta \approx \dfrac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2}$と書くことができるから、(8-28)式は

$$D_{\perp} \approx \frac{m_{\mathrm{e}}\nu_{\mathrm{ei}}}{n_{\mathrm{e}}e^2} \times \frac{n_{\mathrm{e}}(k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}} + k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{i}})}{B^2} = \nu_{\mathrm{ei}} r_{\mathrm{ce}}^2 \left(1 + \frac{T_{\mathrm{i}}}{T_{\mathrm{e}}}\right) \qquad (8\text{-}29)$$

となる。ここで

$$r_{\mathrm{ce}}^2 = \left(\frac{v_{\mathrm{e}\perp}}{\omega_{\mathrm{ce}}}\right)^2 = \frac{m_{\mathrm{e}}^2 v_{\mathrm{e}\perp}^2}{e^2 B^2} \approx \frac{m_{\mathrm{e}} k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}{e^2 B^2}$$

を用いた。(8-29)式は、磁場に垂直方向の拡散が電子の旋回半径r_{ce}をステップ幅とするランダムウォーク過程であることを示す。

8-6. 熱の輸送

これまでは温度が一様なプラズマで密度勾配があるときの粒子の拡散を取り扱ってきた。もちろん、粒子の拡散に伴って熱エネルギーも拡散する。一方、密度が一様で温度勾配があるときには粒子の拡散を伴わない熱の拡散がある。連続の式（粒子数の保存）に対応するエネルギー保存式は以下のように書ける。

$$\frac{3}{2} n \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \bullet Q = \nabla_{\perp} \bullet \left(\chi_{\perp} n \nabla_{\perp} T\right) + \nabla_{//} \bullet \left(\chi_{//} n \nabla_{//} T\right)$$

ここで、Q は熱流束、//は磁力線方向、⊥は磁力線（磁気面）に垂直な方向、χ[m^2/s]は熱拡散係数を表す（nχ[/m·s]は熱伝導度）。

磁力線方向の熱伝導は主に電子の熱速度で決まり、

$$\chi_{//} \approx \frac{V_{th,e}^2}{\nu_e}$$

となる。ここで、ν_e は電子とイオンとの衝突および電子と電子との衝突の効果を考慮した衝突周波数。一方、磁力線に垂直方向の熱伝導は主にイオンの旋回半径で決まり

$$\chi_{\perp} \approx r_{ci}^2 \nu_{ii}$$

となる。同符号の電荷を持つ粒子間のクーロン衝突は粒子の拡散を引き起こさないが、エネルギーの移動は制限しないので、旋回半径の大きいイオン

間の衝突が最も大きい熱伝導をもたらす。粒子の拡散係数と同様、高温、低密度で ν_{ii} も $\chi_{\parallel}$ も小さくなる。

粒子輸送の場合と同様、エネルギー閉じ込め時間 τ_E はプラズマの熱エネルギー（蓄積エネルギー）W、加熱パワーP を用いて以下で定義される。

$$\frac{dW}{dt} = P - \frac{W}{\tau_E}$$

8-7. 異常輸送

古典拡散では $D_{\perp} = \eta p / B^2 \propto 1 / \left(B^2 T_e^{1/2}\right)$ となるはずであるが、実験ではそうはならなかった。B の１乗程度でしか D は小さくならず、T_e の上昇とともに D はむしろ大きくなり

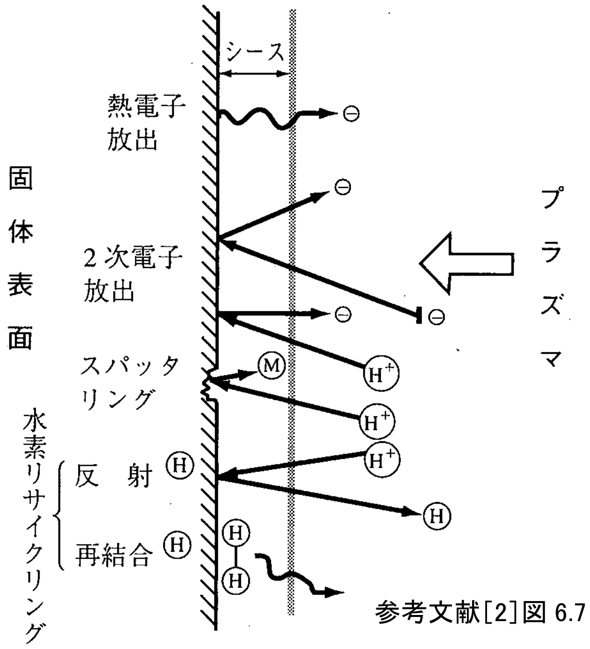
$$D_{\perp} = D_B = \frac{1}{16}\frac{k_B T_e}{B}$$

が得られた。これをボーム拡散と言う。ボーム拡散は、プラズマ中に発生する電場揺動による $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ ドリフトが原因と考えられている。

トーラスプラズマにおいては磁場が勾配を持つ効果で古典輸送よりも大きい輸送が予測される（新古典輸送）が、実験的にはそれよりもさらに大きい輸送が観測されている（L モード）。この異常輸送を低減し、閉じ込めの良い状態が得られる現象（H モードや内部輸送障壁）も観測され、その制御が研究されている。

9. プラズマ・材料相互作用

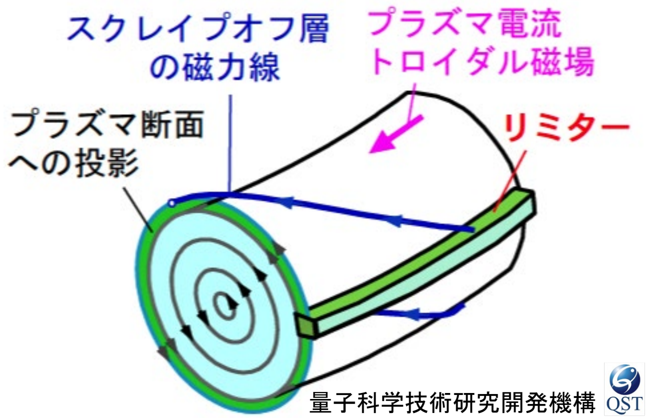
プラズマと固体の壁が接している領域を取り扱う。プラズマの荷電粒子が壁に衝突することにより、壁の原子をたたき出したり（スパッタリング）、壁から2次電子を放出したりする。また、イオンと電子が壁表面で再結合し、中性原子となってプラズマへ侵入する。



参考文献[2]図 6.7

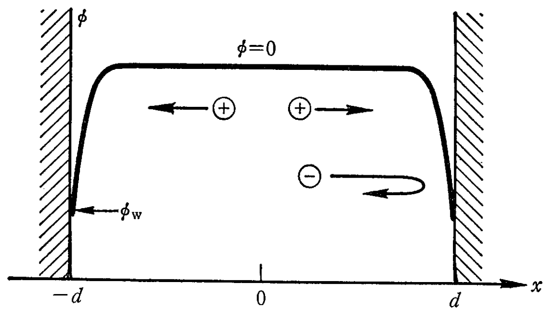
磁場閉じ込めのトーラスプラズマでは閉じた磁気面を入れ子状に構成して

プラズマを閉じ込めるが、磁気面が閉じなくなる（磁力線が固体壁を貫通する）場所がある。その境界を与える、最も外側の閉じた磁気面を「最外殻閉磁気面」と言う。境界を規定する方法としてはリミターを使う方法とダイバーター配位を形成する方法がある。最外殻閉磁気面内のプラズマを「主プラズマ」、その外のプラズマを「周辺プラズマ」（スクレイプオフ層プラズマ、境界層プラズマ）と言う。



固体壁近傍のプラズマでは、速度の大きい電子がイオンより先に壁にぶつかって損失する。そのため、プラズマの電位が壁に対して正となり、この電場により電子が追い返されてイオンの損失と電子の損失がバランスするようになる。

固体壁の近傍で、電荷の中性が破られ、電場が形成される層状の領域を「シース」と言う。



参考文献[2]図 8.2

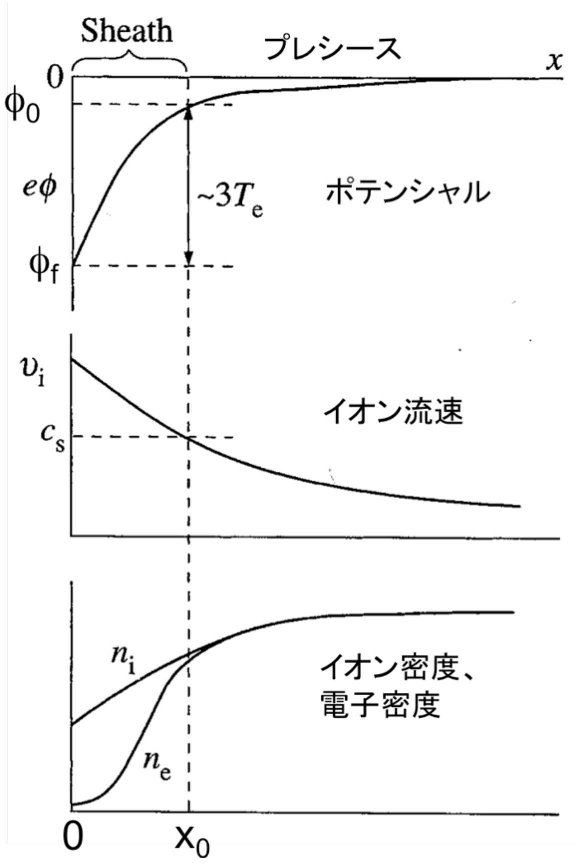
9-1. ボーム条件

$x = 0$に壁があり、x軸正方向からプラズマが流入するとする。イオンの価数を1、シース端の位置を$x = x_0$、その場所での電子密度（＝イオン密度）をn_{e0}、ポテンシャルをϕ_0とする（プラズマ内部のポテンシャルを 0 とする）。

ポテンシャルはポアソン方程式で決まる。

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{e}{\varepsilon_0}(n_i - n_e) \qquad (9\text{-}1)$$

プラズマの流れはイオンの熱速度より大きいが電子の熱速度より小さい。電子



参考文献[3] Fig. 9.2.1を元に作成

密度はボルツマン分布で決まる。

$$n_e = n_{e0} \exp\left(\frac{e(\phi - \phi_0)}{k_B T_e}\right) \qquad (9\text{-}2)$$

イオンの密度は連続の式とエネルギー保存から求められる。

$$\frac{d}{dx}(n_i V_i) = 0 \;\rightarrow\; n_i = \frac{n_{e0} V_{i0}}{V_i}$$

$$\frac{1}{2} m_i V_i^2 + e\phi = \frac{1}{2} m_i V_{i0}^2 + e\phi_0 \rightarrow \; V_i = \sqrt{V_{i0}^2 + \frac{2e}{m_i}(\phi_0 - \phi)}$$

これら2式より

$$n_i = n_{e0} V_{i0}\left\{V_{i0}^2 + \frac{2e}{m_i}(\phi_0 - \phi)\right\}^{-1/2} = n_{e0}\left\{1 + \frac{2e}{m_i V_{i0}^2}(\phi_0 - \phi)\right\}^{-1/2} \qquad (9\text{-}3)$$

(9-2),(9-3)を(9-1)に代入して

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{e n_{e0}}{\varepsilon_0}\left[\exp\left(\frac{e(\phi - \phi_0)}{k_B T_e}\right) - \left\{1 + \frac{2e}{m_i V_{i0}^2}(\phi_0 - \phi)\right\}^{-1/2}\right] \qquad (9\text{-}4)$$

$\Delta\phi = \phi - \phi_0$が小さいとして右辺を$\Delta\phi$ について Taylor 展開すると

$$\frac{d^2}{dx^2}\Delta\phi = \frac{e n_{e0}}{\varepsilon_0}\left[1 + \frac{e}{k_B T_e}\Delta\phi + \cdots - \left\{1 + \frac{e}{m_i V_{\mathrm{i}0}^2}\Delta\phi + \cdots\right\}\right]$$

$$= \frac{n_{e0} e^2}{\varepsilon_0 k_B T_e}\left(1 - \frac{k_B T_e}{m_i V_{\mathrm{i}0}^2}\right)\Delta\phi + \cdots$$

この式が振動しない解を持つには右辺の係数が負でないことが必要なので

$$V_{\mathrm{i}0} \geq \sqrt{\frac{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}}} \qquad (9\text{-}5)$$

つまり、シース端でのイオン流体の速度は音速と等しいかより大きい。これをボームの条件と言う。このとき、(9-4)式の右辺は負となる（$\Delta\phi < 0$に注意）ので、シース内でのイオン密度は電子密度よりも高く保たれる。シースの外側に、プレシースとよばれる（ϕ_0による）弱い電場のある領域があり、その電場によりイオンは加速されてこの速度を得る。(9-5)式と$(1/2) m_i V_{i0}^2 + e\phi_0 = 0$より

$$|\phi_0| > \frac{k_B T_e}{2e} \qquad (9\text{−}6)$$

が得られる。

9-2. 浮遊電位

シース境界と壁とのポテンシャルの差は、プラズマから壁に流入する正味の電流がゼロになる条件から以下のように決まる（導出省略）。

$$\frac{e(\phi_f - \phi_0)}{k_B T_e} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m_i / m_e}{2\pi(1 + T_i / T_e)}\right) \qquad (9\text{−}7)$$

イオンが軽いほど、シース電圧（絶対値）は小さくなる。イオン音速が大きくなり、イオン電流が増えるので、電子を減速するシース電圧が小さくてもバランスが取れるから。重水素プラズマで$T_\mathrm{i} = T_\mathrm{e}$の場合、$\left|e(\phi_f - \phi_0)/k_B T_e\right| = 2.84$。プレシースの電圧（式(9−6))と合わせると、$\left|e\phi_f / k_B T_e\right| \approx 3.34$となる。これがプラズマと絶縁された（電流の出入りがない）壁との間の電位差（浮遊電位、フローティングポテンシャル）を与える。

実際には電子が壁に衝突したときに二次電子が発生するのでその効果を取り入れなければならない。

10. 核融合プラズマ

10−1. 核融合反応

エネルギー源として利用する核融合反応としては以下のものが考えられる。

$$\mathrm{D} + \mathrm{T} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + n + 17.58\ \mathrm{MeV}$$ （^{4}He: 3.52 MeV, n: 14.06 MeV） （10−1）

$$\mathrm{D} + {}^3\mathrm{He} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + p + 18.34\ \mathrm{MeV}$$

$$\mathrm{D} + \mathrm{D} \rightarrow {}^3\mathrm{He} + n + 3.27\ \mathrm{MeV}, \quad \mathrm{D} + \mathrm{D} \rightarrow \mathrm{T} + p + 4.03\ \mathrm{MeV}$$

中でも、D（重水素）と T（トリチウム）を用いる反応（DT 反応）が最も起きやすいので、DT 反応を用いた核融合炉が現在の目標。

T は半減期 12.3 年でβ崩壊するので天然にはほとんど存在しない（宇宙線と大気の N,O との反応で生成）。核融合炉内で、DT 反応で生成する中性子を利用して次の反応で Li から生成する。

$${}^6_3\mathrm{Li} + n \rightarrow {}^4\mathrm{He} + \mathrm{T} + 4.8\ \mathrm{MeV} \qquad (10\text{-}2)$$

$$ {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + n \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{T} + n - 2.5\ \mathrm{MeV} $$

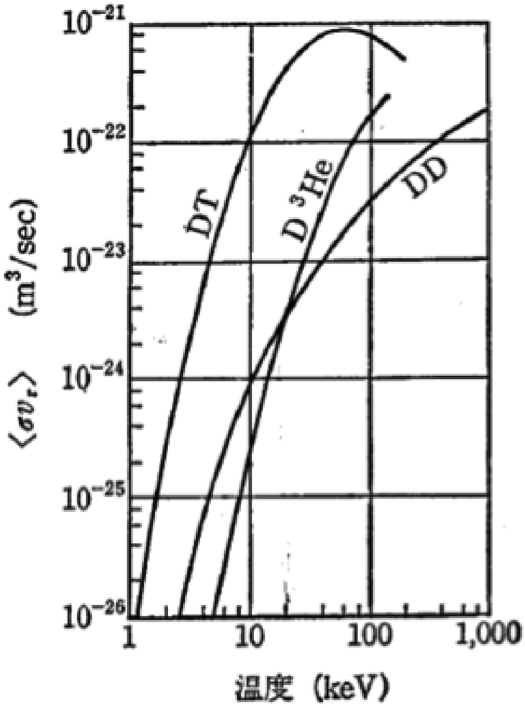
（天然 Li の組成比は ^{6}Li が 7.5%、^{7}Li が 92.5%）。

^{6}Li を用いた場合、核融合プラントとしての反応は(10-1),(10-2)より次のようになる。

$$ \mathrm{D} + {}^{6}_{3}\mathrm{Li} \rightarrow 2\,{}^{4}\mathrm{He} + 22.4\ \mathrm{MeV} $$

重水素は天然同位体存在比 0.015%で、水から比較的低コストで抽出できるので、資源制約上の実質的な燃料は Li ということになる。

10−2. 核融合反応率と出力密度



参考文献[4]図 4.6.2

粒子種 1（密度 n_1、速度分布関数 $f_1(\mathbf{v}_1)$）と粒子種 2（密度 n_2、速度分布関数 $f_2(\mathbf{v}_2)$）との核融合反応率を求める。ここで f_1, f_2 は密度で規格化された分布関数とする。速度空間内の微小体積 $d^3\mathbf{v}_1$, $d^3\mathbf{v}_2$ に含まれる粒子種1、2の個数 d^3n_1, d^3n_2 は、それぞれ

$$ d^3 n_1 = n_1 f_1(\mathbf{v}_1)\mathbf{d}^3\mathbf{v}_1 $$

$$ d^3 n_2 = n_2 f_2(\mathbf{v}_2)\mathbf{d}^3\mathbf{v}_2 $$

である。これらが単位時間に核融合反応を起こす回数 d^6R は、4-1 節の式$\Delta n/\Delta t = nN\sigma v$より

$$ d^6 R = d^3 n_1 d^3 n_2 \sigma(\mathrm{v}_r)\mathrm{v}_r = n_1 n_2 f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2)\sigma(\mathrm{v}_r)\mathrm{v}_r \mathbf{d}^3\mathbf{v}_1\mathbf{d}^3\mathbf{v}_2 $$

で与えられる（$\mathrm{v}_r = |\mathbf{v}_r| = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$）。

単位体積あたりの反応率Rは

$$ R = n_1 n_2 \int_{\mathbf{v}_1}\int_{\mathbf{v}_2} f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2)\sigma(\mathrm{v}_r)\mathrm{v}_r \mathbf{d}^3\mathbf{v}_1\mathbf{d}^3\mathbf{v}_2 = n_1 n_2 \langle \sigma \mathrm{v}_r \rangle $$

ただし

$$ \langle \sigma \mathrm{v}_r \rangle = \int_{\mathbf{v}_1}\int_{\mathbf{v}_2} f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2)\sigma(\mathrm{v}_r)\mathrm{v}_r \mathbf{d}^3\mathbf{v}_1\mathbf{d}^3\mathbf{v}_2 $$

速度分布がマクスウェル分布であるときの$\langle \sigma v_r \rangle$を上図に示す。D イオンと T イオンからなる DT プラズマの場合は、

$$ R = n_D n_T \langle \sigma_{DT} \mathrm{v}_r \rangle $$

1回の DT 核融合で発生するエネルギーを E_{DT}=17.58MeV、その内のアルファ粒子の持つエネルギーを E_α=3.52MeV とすると、プラズマの単位体積あたりの核融合出力（出力密度）$\hat{P}_f$およびアルファ粒子の出力密度$\hat{P}_\alpha$は

$$\hat{P}_f = RE_{DT} = n_D n_T \langle \sigma_{DT} \mathrm{v}_r \rangle E_{DT}$$

$$\hat{P}_\alpha = RE_\alpha = n_D n_T \langle \sigma_{DT} \mathrm{v}_r \rangle E_\alpha$$

となる。イオン温度 T= 10-20keV において、以下の近似式が成り立つ。

$$\langle \sigma_{DT} \mathrm{v}_r \rangle = 1.1 \times 10^{-24} \left(T[\mathrm{keV}] \right)^2 \ \mathrm{m^3 s^{-1}}$$

核融合出力密度$\hat{P}_f$の式と上の式から、

$$\hat{P}_f \propto n^2 \langle \sigma_{DT} \mathrm{v}_r \rangle \propto n^2 T^2 \propto p^2 \qquad (10\text{-}3)$$

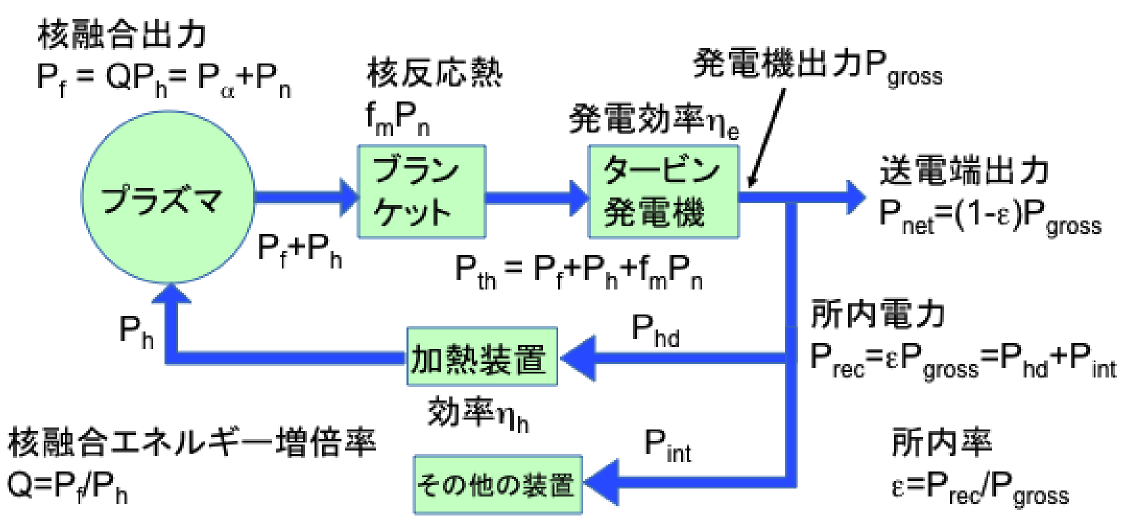
つまり核融合出力密度はプラズマ圧力pの自乗にほぼ比例する。核融合出力を大きくするには、プラズマの圧力を高くする必要がある。プラズマ圧力は磁場の圧力とベータ値の積だから、核融合出力密度は、ベータ値の自乗、磁場の4乗にほぼ比例する。

$$\hat{P}_f \propto \beta^2 B_0^{\ 4}$$

10-3. 核融合エネルギー増倍率

核融合炉の炉心プラズマからは熱が逃げる（損失パワーP_{loss}）ので、プラズマの温度を保つために一般には外部から注入するパワーP_{h}が必要。エネルギー源（発電プラント）としては、核融合で生成されるパワーP_{f}とP_{h}との比（Q値）が大きくなければならない。典型的にはQ~30が必要。

P_{f}のうち、1/5 は ^{4}He が持つパワーであり、プラズマの加熱に用いられる



（α 加熱 P_αという）。残りは中性子が持つパワー（P_n）であり、プラズマの加熱に寄与しない。定常状態では

$$P_{\text{loss}} = P_{\text{h}} + P_\alpha$$

Q 値は主に、プラズマの密度（イオン密度）n、温度T、エネルギー閉じ込め時間τ_{E}で決まる。密度・温度は核融合出力P_{f} に（式(11-3)参照）、τ_{E}は損失パワーP_{loss}に関係するパラメーター（8-6 節参照）。

$$P_{\text{loss}} = \frac{W}{\tau_{\text{E}}}$$

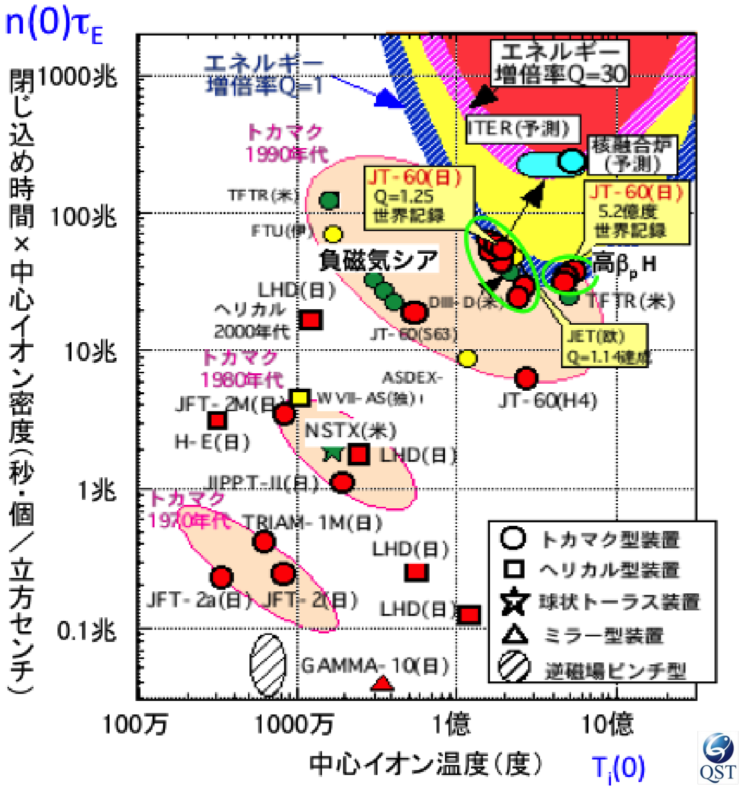
Q~30のためには、

中心イオン密度≈ $10^{20}\ \text{m}^{-3}$、

中心イオン温度≈ 数十 keV、

エネルギー閉じ込め時間≈ 数 s

が必要となる（右図）。



量子科学技術研究開発機構

<u>定期試験は 1 月 29 日（月） 10:30–12:00, 522 講義室</u>

Appendix

(8–20), (8–21)式をV_{jx}, V_{jy}の一次式として書くと

$$m_j \nu_j V_{jx} - q_j B V_{jy} = q_j E_x - \frac{k_B T_j}{n_j}\frac{dn_j}{dx} \tag{a1}$$

$$q_j B V_{jx} + m_j \nu_j V_{jy} = 0 \tag{a2}$$

(a1)× $m_j\nu_j$+(a2) × $q_j B$としてV_{jy}を消去して

$$\left(m_j^2\nu_j^2+q_j^2B^2\right)V_{jx}=m_j\nu_j\left(q_jE_x-\frac{k_BT_j}{n_j}\frac{dn_j}{dx}\right)$$

$$\rightarrow\ \left(1+\frac{q_j^2B^2}{m_j^2\nu_j^2}\right)V_{jx}=\frac{q_j}{m_j\nu_j}E_x-\frac{k_BT_j}{n_jm_j\nu_j}\frac{dn_j}{dx}$$

$$\rightarrow\ V_{jx}=\frac{1}{1+\omega_{cj}^2/\nu_j^2}\left(\frac{q_j}{m_j\nu_j}E_x-\frac{k_BT_j}{n_jm_j\nu_j}\frac{dn_j}{dx}\right)$$

ここで$\omega_{cj}=|q_j|B/m_j$を用いた。

これを(a2)に入れて

$$V_{jy}=-\frac{q_jB}{m_j\nu_j}V_{jx}$$

$$=-\frac{q_jB}{m_j\nu_j}\frac{1}{1+\omega_{cj}^2/\nu_j^2}\left(\frac{q_j}{m_j\nu_j}E_x-\frac{k_BT_j}{n_jm_j\nu_j}\frac{dn_j}{dx}\right)$$

$$=-\frac{\omega_{cj}^2/\nu_j^2}{1+\omega_{cj}^2/\nu_j^2}\left(\frac{E_x}{B}-\frac{k_BT_j}{q_jn_jB}\frac{dn_j}{dx}\right)$$

出典

[1] F.F. Chen 著（内田岱二郎訳）「プラズマ物理入門」丸善（1977）

[2] 高村秀一「プラズマ理工学入門」森北出版（1997）

[3] J. Wesson, et al., Tokamaks 3rd Ed, International
Series of Monographs on Physics 118, Oxford Science Publications (2004)

[4] 内田岱二郎、井上信幸「核融合とプラズマの制御」東京大学出版会（1980）