

プラズマ理工学 第 12 回

エネルギー理工学科 3 年秋学期

日時: 月曜日 午前 10 時 30 分～12 時 00 分、場所: 522 講義室

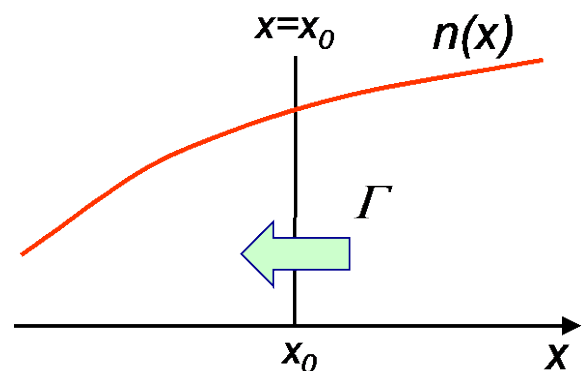
教員: 藤田隆明(ふじたたかあき) 工学部 8 号館南棟4階

8. プラズマにおける熱・粒子の輸送

プラズマの荷電粒子間のクーロン衝突によりもたらされる実空間におけるプラズマの拡散、輸送過程について扱う。

8-1. 拡散係数、拡散方程式、閉じ込め時間

粒子数密度を $n(x, t)$ [$/\text{m}^3$]、粒子束を $\Gamma(x, t)$ [$/\text{m}^2\text{s}$] とする。粒子束とは単位時間に単位面積を通過する粒子の数。拡散による粒子束は密度勾配に比例する (Fick の法則)。比例係数を拡散係数 D [m^2/s] と言う。



$$\Gamma = -D \frac{\partial n}{\partial x} \quad \text{一般的には} \quad \Gamma = -D \nabla n \quad (8-1)$$

である。拡散係数がどうやって決まるかは後に (8-3 以降で) 議論し、ここでは D が与えられているものとする。

領域 V (境界 A) 内での粒子数の保存から

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V n dV = - \int_A \Gamma \cdot d\mathbf{A} + \int_V S dV \quad (8-2a)$$

ここで右辺第2項の S [$/\text{m}^3\text{s}$] は粒子源密度を表す。ガウスの発散定理を使うと

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \Gamma + S \quad (8-2b)$$

となる。(8-2a) または (8-2b) を連続の式 (あるいは粒子数保存の式) という。(8-1) 式を (8-2b) 式に代入して得られる次式を拡散方程式と言う。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla n) + S \quad (8-3)$$

なお、プラズマは複数の種類の粒子(電子と1種類あるいは2種類以上のイオン)を含むが、輸送を考えるときには通常その中のある1種類の粒子について考える。不純物を含まない水素プラズマの場合は、(電荷中性条件より)電子密度とイオン密度は等しく、両者の粒子源密度も等しいとしてよい(水素原子の電離により電子とイオンが1個ずつ生成される)。

プラズマに保持されている粒子の総数 N (n の積分値)とプラズマから単位時間に流出する粒子数の比として(粒子)閉じ込め時間 τ が定義される。

$$N = \int_V n dV$$

$$\int_A \mathbf{\Gamma} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\tau} \int_V n dV = \frac{N}{\tau}$$

(8-2a)式と組み合わせると

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N}{\tau} + \int_V S dV$$

右辺第2項(プラズマ全体における粒子源密度 S の積分値)を S_{tot} とすると

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N}{\tau} + S_{\text{tot}}$$

定常状態では、左辺が0なので

$$\tau = \frac{N}{S_{\text{tot}}} = \int_V n dV / \int_V S dV \quad (8-4)$$

τ は S の分布形状に依存し、一般に中心にピークした粒子源分布ほど大きくなる。

8-2. 拡散方程式の解

無限に長い半径 a の円柱状のプラズマについて拡散方程式を解く。円筒座標系 (r, θ, z) で物理量は r のみに依存するとする。 $r = a$ に壁があり、

$n(a) = 0$ (壁でプラズマが消滅する) とする。拡散方程式(8-3)は

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla n) + S = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D \frac{\partial n}{\partial r} \right) + S \quad (8-5)$$

なお、積分形(8.2a)から出発すれば、対称性を利用して

$$\int_0^r \frac{\partial n}{\partial t} 2\pi r' dr' = -2\pi r \left(-D \frac{\partial n}{\partial r} \right) + \int_0^r S \cdot 2\pi r' dr'$$

つまり

$$\int_0^r \frac{\partial n}{\partial t} r' dr' = r D \frac{\partial n}{\partial r} + \int_0^r S r' dr'$$

となり両辺を r で微分して(8-5)が得られる。以下いくつかのケースで(8-5)を解く。

(i) S が既知かつ D が定数で定常の場合

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dn}{dr} \right) + S = 0 \rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dn}{dr} \right) = -\frac{S}{D} r$$

これを積分して任意の $S(r)$ に対して $n(r)$ 及び閉じ込め時間が求められる。 $dn/dr(0)$ が有限であれば $r dn/dr|_{r=0} = 0$ なので

$$r \frac{dn}{dr} = - \int_0^r \frac{S r'}{D} dr'$$

特に S が定数 S_0 の場合は以下のようになる。

$$\begin{aligned} r \frac{dn}{dr} &= -\frac{S_0}{D} \int_0^r r' dr' = -\frac{S_0}{2D} r^2 \rightarrow \frac{dn}{dr} = -\frac{S_0}{2D} r \\ \rightarrow n(r) &= -\frac{S_0}{2D} \int_a^r r' dr' = \frac{S_0}{4D} (a^2 - r^2) \end{aligned} \quad (8-6)$$

粒子束は

$$\Gamma(r) = -D \frac{dn}{dr} = -D \left(-\frac{S_0}{2D} r \right) = \frac{S_0}{2} r$$

となり r に比例する。 $\Gamma(r)$ は粒子数保存(8-2a)から求めることもできる。つまり定常のときの(8-2a)式

$$\int_A \Gamma \cdot dA = \int_V S dV$$

において、 V として半径 r 高さ 1 の円柱を考えると、対称性より

$$\int_A \mathbf{\Gamma} \cdot d\mathbf{A} = 2\pi r \Gamma(r), \quad \int_V S dV = \pi r^2 S_0$$

となるので

$$\Gamma(r) = \frac{\pi r^2 S_0}{2\pi r} = \frac{S_0}{2} r$$

を得る。

z 方向単位長さのプラズマについて

$$N = \int_V n(r) dV = \int_0^a n(r) \times 2\pi r dr = \frac{\pi S_0}{4D} \int_0^a (a^2 - r^2) \times 2r dr = \frac{\pi a^4 S_0}{8D}$$

$$S_{tot} = \int_V S(r) dV = \pi a^2 S_0$$

となるので、閉じ込め時間は

$$\tau = \frac{N}{S_{tot}} = \frac{\pi a^4 S_0}{8D} \times \frac{1}{\pi a^2 S_0} = \frac{a^2}{8D}$$

となる。なお、(8-6)の密度分布では、中心密度、体積平均密度はそれぞれ

$$n(0) = \frac{a^2 S_0}{4D}, \quad \langle n \rangle = \frac{N}{\pi a^2} = \frac{a^2 S_0}{8D}$$

となるので

$$n(0) = 2\langle n \rangle$$

の関係がある。

(ii) S が n に比例しかつ D が定数で定常の場合

粒子源 S は中性粒子の電離(主に電子による電離)で与えられ、通常以下の式で表される。

$$S = n_n n \langle \sigma v \rangle = z_i n$$

ここで、 n_n は中性粒子密度であり、 $\langle \sigma v \rangle$ を電離速度係数、 z_i を電離周波数という。定常かつ D が定数の場合、(8-5)式にこれを代入すると

$$\frac{D}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dn}{dr} \right) + z_i n = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dn}{dr} + \frac{z_i}{D} n = 0$$

となる。 z_i が定数であればこれは0次のベッセルの微分方程式であり

$$n = n_0 J_0 \left(\sqrt{\frac{z_i}{D}} r \right)$$

を解に持つ (Appendix A)。 $n(r) > 0$, $n(a) = 0$ より $\sqrt{z_i/D} = 2.4/a$ となる。これは壁で消失するプラズマを補いプラズマ密度を維持するのに必要な電離周波数を与える。密度分布は

$$n(r) = n_0 J_0 \left(\frac{2.4r}{a} \right) \quad (8-7)$$

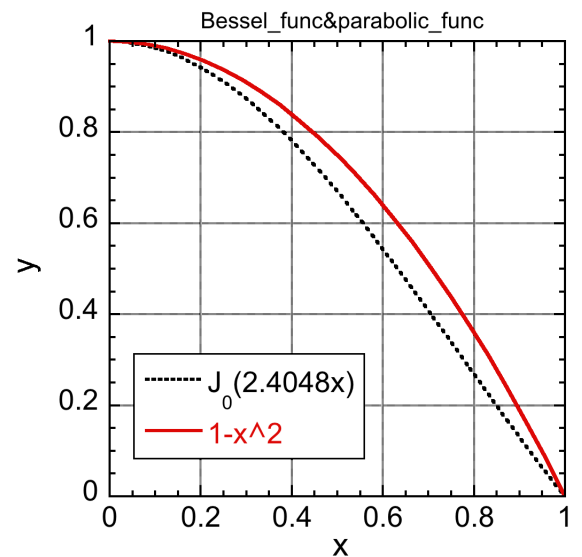
となる。

$$S_{\text{tot}} = \int_V S dV = z_i \int_V n dV = z_i N$$

なので、閉じ込め時間は

$$\tau = \frac{N}{S_{\text{tot}}} = \frac{1}{z_i} = \frac{a^2}{2.4^2 D} = \frac{a^2}{5.8D}$$

となる。(8-7)の密度分布は(8-6)と比べるとややピーキングしている(右図)ため、閉じ込め時間が長いと考えられる。



(iii) $S = 0$ で D が定数で非定常の場合。

$n(r, t) = R(r)T(t)$ と変数分離すると

$$\begin{aligned} R \frac{dT}{dt} &= DT \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) \rightarrow \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{D}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{\tau} \\ \rightarrow \frac{dT}{dt} &= -\frac{T}{\tau}, \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{R}{D\tau} = 0 \end{aligned} \quad (8-8)$$

明らかに n は時間的に減少して行くから $\tau > 0$ で、第1式の解は

$$T(t) = T(0) \exp(-t/\tau).$$

第2式は0次のベッセルの微分方程式であり

$$R(r) = J_0 \left(\frac{r}{\sqrt{D\tau}} \right)$$

を解に持つ。 $n(a) = 0$ より $R(a) = 0$ を条件とすると $J_0(a/\sqrt{D\tau}) = 0$ 。これを満たすような τ が固有値であり、それに対応した解(固有関数)がある。一般解はそれらの線形結合として

$$n(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) J_0\left(\frac{r}{\sqrt{D\tau_i}}\right)$$

と表される。係数は初期条件で決められる:

$$n(r, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0\left(\frac{r}{\sqrt{D\tau_i}}\right)$$

$t \rightarrow \infty$ では最低次($i = 1$)の解が主要となる。 $J_0(x)$ の最小のゼロ点が $x = 2.4$ であるから最低次の固有値は

$$\frac{a}{\sqrt{D\tau}} = 2.4 \rightarrow D\tau = \frac{a^2}{2.4^2} = \frac{a^2}{5.8}$$

つまり最低次の解は

$$n(r, t) = n_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) J_0\left(\frac{2.4r}{a}\right), \quad \tau = \frac{a^2}{5.8D} \quad (8-9)$$

τ は閉じ込め時間の意味を持っている。

8-3. 衝突と拡散

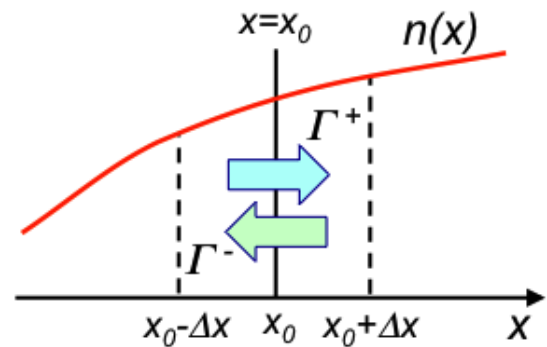
粒子数密度を $n(x, t)$ [$/\text{m}^3$]、その粒子束を $\Gamma(x, t)$ [$/\text{m}^2\text{s}$]とする。

一次元(x 方向)の粒子の拡散過程を考える。 Δt [s]毎に衝突が起こり、衝突の間に粒子は x 軸の正または負方向に($1/2$ の確率で) Δx [m]だけ動くとする(ランダムウォーク)。 $x =$

x_0 の点を正方向/負方向に通過する粒子束をそれぞれ、 Γ^+ 、 Γ^- とすると Γ はその差である。 Δt の間の Γ^+ に寄与するのは、 $x_0 - \Delta x < x < x_0$ にある粒子の半分であるから

$$\Gamma^+ = \frac{1}{2\Delta t} \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0} n(x) dx \approx \frac{\Delta x}{4\Delta t} (n(x_0 - \Delta x) + n(x_0))$$

と書ける(積分の台形公式を用いた)。同様に



$$\Gamma^- = \frac{1}{2\Delta t} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} n(x) dx \approx \frac{\Delta x}{4\Delta t} (n(x_0) + n(x_0 + \Delta x))$$

となるので

$$\begin{aligned} \Gamma(x_0) &= \Gamma^+ - \Gamma^- \approx \frac{\Delta x}{4\Delta t} (n(x_0 - \Delta x) - n(x_0 + \Delta x)) \\ &\approx \frac{\Delta x}{4\Delta t} \times \left(-\frac{\partial n}{\partial x}(x_0) \times 2\Delta x \right) = -\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial n}{\partial x}(x_0) \end{aligned}$$

つまり

$$\Gamma = -\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial n}{\partial x}$$

であり、粒子束は密度勾配に比例する(Fick の法則)。比例係数を拡散係数 $D[\text{m}^2/\text{s}]$ と言う((8.1)式)。上の場合

$$D = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \quad (8-10)$$

である。

(8-10)式を用いて、プラズマにおける衝突過程の Δx , Δt よりプラズマの拡散係数を評価することができる。電場も磁場もなくプラズマ粒子(荷電粒子)が自由に飛び回って背景の中性原子と衝突する場合、 Δt は衝突時間、 Δx は平均自由行程 λ_{mfp} となる。衝突時間の逆数である衝突周波数 ν を使うと、 $D \approx \lambda_{mfp}^2 \nu$ となる。 λ_{mfp} は粒子の速度(熱速度)と衝突時間の積であるから

$$D \approx \left(\frac{V_{th}}{\nu} \right)^2 \nu = \frac{V_{th}^2}{\nu} = \frac{2k_B T}{m \nu}$$

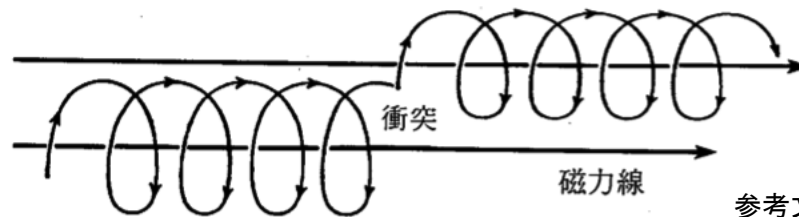
となり、衝突周波数が高いほど拡散係数は小さくなる。つまりこの場合は衝突が拡散を妨げている。

磁場があって荷電粒子が旋回運動をしているときは、磁力線に垂直な方向については衝突がなければ荷電粒子は拡散しない。また、1回の衝突で移動する距離は、旋回半径 r_c 程度である。よって、

$$D_{\perp} \approx r_c^2 \nu = \left(\frac{m V_{th}}{|q| B} \right)^2 \nu = \frac{2m k_B T}{q^2 B^2} \nu \quad (8-11)$$

となる。磁場 B を強くすれば旋回半径が小さくなって拡散係数を小さくす

ることができる。これが磁場閉じ込めの基本的な考え方。



参考文献[1] 図 6.6

次節 8-4 以降では、磁場がある場合とない場合、衝突の相手が中性粒子の場合と荷電粒子の場合(クーロン衝突)に分けて見ていく。

Appendix A

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0$$

は 0 次のベッセルの微分方程式であり、第1種ベッセル関数 $J_0(x)$ 及び第2種ベッセル関数 $Y_0(x)$ を解に持つ。 $x = 0$ で有限なのは $J_0(x)$ (下図)である。 $J_0(x)$ の最小のゼロ点は $x = 2.4048 \dots$ である。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + K^2 y = 0$$

のときは $t = Kx$ と置くと

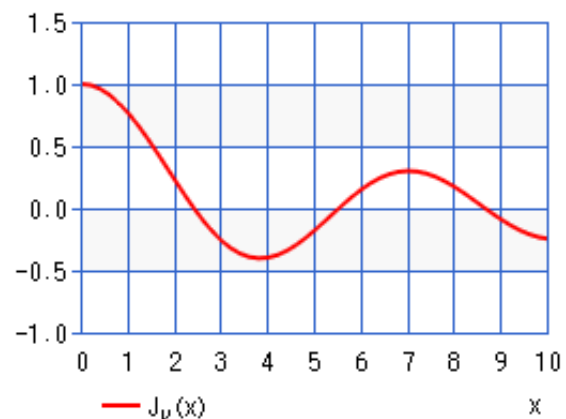
$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= K^2 \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} &= K^2 \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

となり

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + y = 0$$

が得られるから、解は $J_0(t) = J_0(Kx)$ と $Y_0(t) = Y_0(Kx)$ である。

参考文献[2]



レポート課題(第 5 回)

1 月 22 日(月)の講義開始時に提出すること。冒頭に学生番号と氏名を記入すること。

問 1 半径 a の円柱プラズマの平衡を考える。円柱の軸を z 軸とする円筒 (円柱) 座標系 (r, θ, z) を取る。全ての物理量は θ, z に依存せず、 r のみの関数とする。プラズマ内の圧力分布が

$$p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

で与えられ、プラズマ内の電流密度 $\mathbf{j}$ 、磁場 $\mathbf{B}$ が

$$\mathbf{j} = j_\theta(r) \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{B} = B_z(r) \mathbf{e}_z, \quad B_z(a) = B_{za}$$

で与えられるとする。ただし、 $p_0 \geq 0$, $B_{za} > 0$ である。また、真空の透磁率を μ_0 とする。 B_{za} は十分大きく、

$$B_z(r) \geq 0 \text{ in } 0 \leq r \leq a$$

が成り立つとする。

- (1) プラズマの平均圧力 $\langle p \rangle$ とプラズマ中心の圧力 p_0 の比、 $\langle p \rangle / p_0$ を求めよ。
 - (2) マクスウェルの方程式 (アンペールの法則の微分形) に基づき、 $j_\theta(r)$ を $B_z(r)$ を用いて表せ。
 - (3) 径方向 (r 方向) の力の釣り合いから、 $B_z(r)$ が満たす方程式を求めよ。それを解いて $B_z(r)$ および $j_\theta(r)$ を求めよ。
 - (4) $B_{za} = 1 \text{ T}$, $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ のとき、 $B_z(0)$ およびベータ値 $\beta = 2\mu_0 \langle p \rangle / B_{za}^2$ を有効数字 2 桁で求めよ。 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ である。
- (2) のヒント 円筒座標系においてベクトル $\mathbf{A}$ の rotation は以下で与えられる。

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial z \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix}$$

問2 半径 a の円柱プラズマにおける電子の輸送について考える。拡散係数 D は空間的に一様で、電子密度 $n(r)$ は定常で半径 r のみに依存する。プラズマ表面での電子密度を $n(a) = 0$ とする。粒子源 S が

$$S(r) = S_0 (r/a)^2$$

で与えられている。ここで、粒子源とはプラズマ内の単位体積・単位時間あたりに発生する電子数を表す。

- (1) プラズマと同軸の半径 r の円筒内において軸方向単位長さ・単位時間あたりに発生する電子数 $F(r)$ を求めよ ($0 < r \leq a$)。また、その円

筒内に含まれる電子数が時間的に一定であることから、円筒表面における粒子束(単位面積・単位時間あたりに通過する電子数) $\Gamma(r)$ を求めよ。

- (2) 粒子束が電子密度勾配と拡散係数を用いて $\Gamma(r) = -D \frac{dn}{dr}$ と表されることから、 $n(r)$ を求めよ。
- (3) 電子密度の中心値 $n(0)$ と体積平均値 $\langle n \rangle$ の比 $n(0)/\langle n \rangle$ を求めよ。円筒の軸方向単位長さの部分 V に含まれる電子の総数を N 、 V への電子供給率を $F_{\text{tot}} = F(a)$ とすると、粒子閉じ込め時間は $\tau = N/F_{\text{tot}}$ で与えられる。 N , τ を求めよ。

出典

[1] 高村秀一「プラズマ理工学入門」森北出版(1997)

[2] <https://keisan.casio.jp/exec/system/1173919505>