

プラズマ理工学 第 11 回

エネルギー理工学科 3 年秋学期

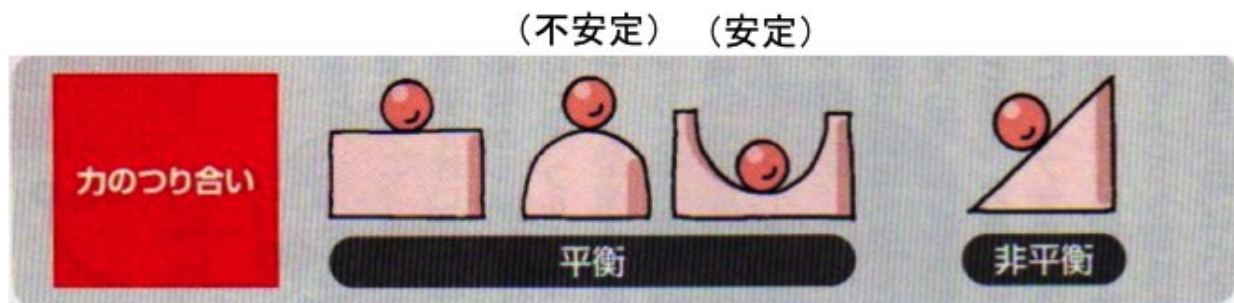
日時: 月曜日 午前 10 時 30 分～12 時 00 分、場所: 522 講義室

教員: 藤田隆明(ふじたたかあき) 工学部 8 号館南棟4階

7. プラズマの平衡(続き)

7-2. 磁気閉じ込めの原理

ここでの平衡は、「力学的平衡」、すなわち力が釣り合っている状態を意味する。(プラズマは「熱力学的平衡」にはない。常に熱の流れがある。その意味で「非平衡系」と呼ばれる。)



参考文献[1]

一流体 MHD 方程式系の運動方程式を考える。

$$\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

平衡状態では時間的な変化がない。つまり $\partial/\partial t = 0$ 。ここでは、さらに $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ (静止した平衡) を考える。

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (7-1)$$

これがプラズマ平衡の基本方程式。マクスウェル方程式より $\mathbf{j}$ と $\mathbf{B}$ は以下を満たす。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (7-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7-3)$$

(7-1)式は、圧力勾配を支えるには磁場に垂直方向の電流が必要であることを示している。電流を磁場に平行な成分と磁場に垂直な成分に分けて $\mathbf{j} = j_{\parallel} \mathbf{B}/B + \mathbf{j}_{\perp}$ と置いて、(7-1)と $\mathbf{B}$ との外積を取ると

$$(j \times B) \times B = (j_{\perp} \times B) \times B = (j_{\perp} \cdot B)B - (B \cdot B)j_{\perp} = -B^2 j_{\perp}$$

より

$$j_{\perp} = -\frac{\nabla p \times B}{B^2}$$

これは反磁性ドリフト(イオンと電子とで逆向き)により生じる反磁性電流に等しい(Appendix A)。つまり、圧力勾配によるイオン流体・電子流体のドリフトによって生じる電流に働く電磁力がちょうど圧力勾配による力と釣り合っている。

また、電気抵抗率 η がゼロでない場合、一般化オーム則 $E + V \times B = \eta j$ より

$$V_{\eta} = -\frac{\eta \nabla p}{B^2}$$

なる圧力勾配方向のゆっくりした流れがあり、平衡状態を維持するには、これによる損失を補充する粒子・熱の補給が必要である(つまり、熱的には非平衡である)。(V_{η} は 5-5-4 節の(5-22)式(の第2項)で紹介済み)

圧力 p が一定となる面 $p(x, y, z) = \text{const.}$ が存在する場合を考える。これを等圧面(等圧力面)という。等圧面は圧力勾配ベクトル ∇p に直交する。一方、(7-1)式と B または j との内積を取ることで

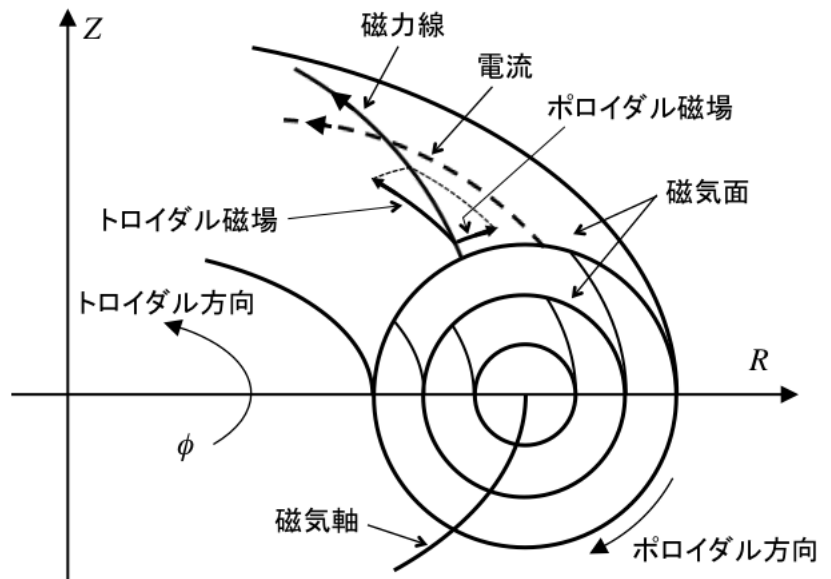
$$B \cdot \nabla p = 0, \quad j \cdot \nabla p = 0 \rightarrow B \text{ 及び } j \text{ も } \nabla p \text{ に直交}$$

→ **B 及び j は等圧面内に横たわる**(等圧面に垂直な成分を持たない)
等圧面のことを「**磁気面**」あるいは「**電流面**」とも言う。

荷電粒子は磁力線に沿っては自由に運動するから、プラズマを閉じ込めるには閉じた磁気面を形成する必要がある。磁力線に湧き出し・吸い込みがない(式(7-3))ことを考慮すると、有限な大きさの磁場で閉じた磁気面を形成することが可能なのは、トーラスのみであることが知られている。**トーラス状の磁気面を入れ子状に形成してプラズマを閉じ込めるのが磁気閉じ込めの基本原理**となる。軸対称の場合は磁気面が常に存在する。

トーラスの大周方向(ϕ 方向)をトロイダル方向、小周方向(θ 方向)をポロイダル方向と呼ぶ。トロイダル磁場(B_{ϕ})とポロイダル磁場(B_{θ})の組み合わせによりらせん状の磁力線を生成する。磁気面上ではプラズマ

圧力などいろいろな量が一定値を取る(このような量を磁気面量という)。主軸からの距離 R を大半径、またポロイダル断面におけるある磁気面の平均的な半径 ρ を小半径と呼ぶ。通常、磁気面の小半径を小さくしていった極限で磁気面はポロイダル断面上の一点に収束する。これを磁気軸という。



7-3. 圧力の釣り合いとベータ値

(7-1)式の左辺を(7-2)を用いて B だけで表すと

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \nabla B^2$$

となる(Appendix B 参照)。これを(7-1)式に代入して

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \nabla B^2 \quad (7-4)$$

右辺第1項は磁力線方向の張力、右辺第2項は磁力線に垂直な方向の圧力に由来する。磁力線がまっすぐな場合は右辺第1項はゼロになるので

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0$$

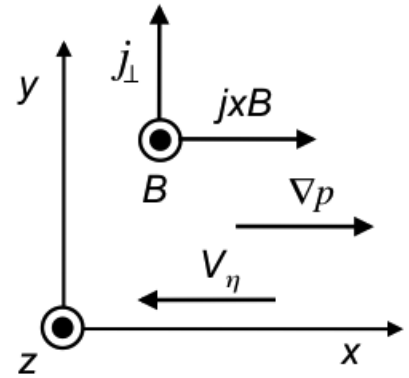
が得られる。これは、プラズマの圧力 p と磁場の圧力 $B^2/(2\mu_0)$ が釣り合っていることを示す。

例えば、 (x, y, z) 座標系において $x < 0$ が真空中で $x > 0$ にプラズマがあり、圧力 p が x のみの関数 $p(x)$ で与えられ

$$p(x) = 0, \mathbf{B}(x) = B_0 \mathbf{e}_z \text{ for } x < 0$$

のときの平衡を考えよう。 $x > 0$ で明らかに $\mathbf{j}$ 及び $\mathbf{B}$ も x のみの関数であり

$$\begin{aligned}\mu_0 j_x &= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \\ \mu_0 j_y &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{dB_z}{dx} \\ \mu_0 j_z &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{dB_y}{dx}\end{aligned}$$



また、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = dB_x/dx = 0$ と $B_x(0) = 0$ より $x > 0$ でも $B_x(x) = 0$ なので

$$\frac{dp}{dx} = j_y B_z - j_z B_y = -\frac{B_z}{\mu_0} \frac{dB_z}{dx} - \frac{B_y}{\mu_0} \frac{dB_y}{dx} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{dB^2}{dx}$$

となり

$$\frac{d}{dx} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0$$

が成り立っている。つまり図の状況において $\mathbf{B}$ は実は一様ではない。また $j_z \neq 0$ であれば $dB_y/dx \neq 0$ より $\mathbf{B}$ の向きも変わる。

プラズマの圧力と外部(全)磁場 B_0 の圧力の比をベータ値と呼び、 β で表す。

$$\beta = \frac{p}{B_0^2/(2\mu_0)} = \frac{2\mu_0 p}{B_0^2}$$

圧力 p はプラズマ内で分布を持つので、その体積平均値 $\langle p \rangle$ を使うことが多い。これを特に平均ベータ値ということがある。

$$\beta = \frac{\langle p \rangle}{B_0^2/(2\mu_0)} = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_0^2}$$

ここで $\langle \cdot \rangle$ はプラズマ内部での体積平均値を表す：

$$\langle X \rangle = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a X \cdot 2\pi r dr = \frac{2}{a^2} \int_0^a X r dr$$

核融合炉の実現のためには $\beta \sim 5\%$ が必要とされている。例えば、 $B=5\text{T}$, $n_i=n_e=1 \times 10^{20} \text{m}^{-3}$, $T_i=T_e=15\text{keV}$ のとき

$$\frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{5^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 9.9 \times 10^6 \text{Pa} \sim 99 \text{atm}$$

$$p = n_i k_B T_i + n_e k_B T_e = 2 \times 10^{20} \times 15 \times 10^3 \times 1.6 \times 10^{-19} = 4.8 \times 10^5 \text{Pa} \sim 4.8 \text{atm}$$

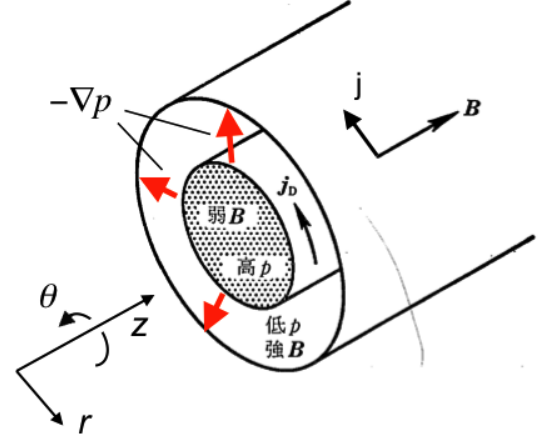
で $\beta = 4.8\%$ となる。

7-4. 円柱プラズマの平衡

右図のように、円筒座標系 (r, θ, z) で z 方向に無限に長く z 軸を中心とする円柱状(半径 a)のプラズマを考え、 z 方向、 θ 方向の依存性がないとする。 z 軸を軸とする半径 r 高さ1の円柱 V の表面を S とすると

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = B_r \times 2\pi r = 0$$

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = j_r \times 2\pi r = 0$$



参考文献[2] 図 6.5 を元に作成

より(ここで z 方向の依存性がないことから円柱の上下底面での積分が打ち消すことを用いている)、 $B_r = 0$ 、 $j_r = 0$ である。つまり

$$\mathbf{B} = B_\theta \mathbf{e}_\theta + B_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{j} = j_\theta \mathbf{e}_\theta + j_z \mathbf{e}_z$$

このとき

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = (j_\theta \mathbf{e}_\theta + j_z \mathbf{e}_z) \times (B_\theta \mathbf{e}_\theta + B_z \mathbf{e}_z) = (j_\theta B_z - j_z B_\theta) \mathbf{e}_r$$

より(7-1)式は

$$\frac{dp}{dr} = j_\theta B_z - j_z B_\theta \quad (7-5)$$

となる。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial z \\ 0 & rB_\theta & B_z \end{vmatrix} = \left\{ -\frac{\partial B_z}{\partial r} \right\} \mathbf{e}_\theta + \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} \right\} \mathbf{e}_z$$

を用いて、(7-2)式は

$$-\frac{\partial B_z}{\partial r} = \mu_0 j_\theta \quad (7-6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \mu_0 j_z \quad (7-7)$$

となる。5 つの変数 ($p, j_\theta, j_z, B_\theta, B_z$) に対して式が 3 つあるので、独立な変数は 2 つである。例えば、(7-6), (7-7)を用いて(7-5)から j_θ, j_z を消去すると

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{B_z}{\mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{B_\theta}{\mu_0 r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r}$$

となり、 p, B_θ, B_z のうち 2 つを決めれば残り 1 つは決まることになる。ただし、 p と B_z にはプラズマ表面 ($r = a$) での境界条件が必要である。通常、 $p(a) = 0$ であるが、 $B_z(a)$ は外部コイル (ソレノイド) が作る磁場で決まる。

例として、プラズマ電流が円柱の軸に沿って一様 (j_{z0}) に流れているとし、外部の縦磁場 (z 方向の磁場) がいない場合を考える。

$$j_z(r) = j_{z0}, j_\theta(r) = 0, B_z(a) = 0, B_\theta(0) = 0, p(a) = 0$$

このとき(7-6)式、(7-7)式より

$$B_\theta(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \mu_0 j_{z0} r' dr' = \frac{\mu_0 j_{z0}}{r} \frac{r^2}{2} = \frac{\mu_0 j_{z0}}{2} r \quad (7-8)$$

$$B_z(r) = 0$$

((7-2) 式の積分形である $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$ (アンペールの法則) を用いても良い)。

特に、プラズマ表面のポロイダル磁場は

$$B_{\theta a} = B_\theta(a) = \frac{\mu_0 j_{z0}}{2} a$$

(7-5)式に(7-8)式を代入して

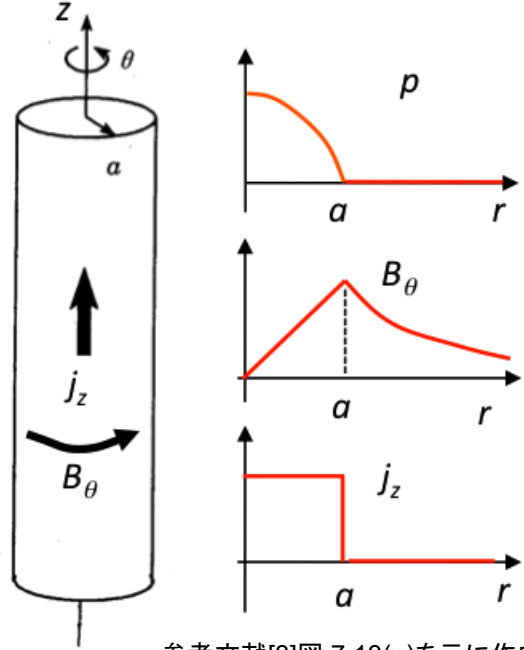
$$\frac{dp}{dr} = j_\theta B_z - j_z B_\theta = 0 - j_{z0} \frac{\mu_0 j_{z0}}{2} r = -\frac{\mu_0 j_{z0}^2}{2} r$$

これを積分して

$$\begin{aligned} p(r) &= -\frac{\mu_0 j_{z0}^2}{2} \int_a^r r' dr' = \frac{\mu_0 j_{z0}^2}{4} (a^2 - r^2) \\ &= \frac{B_{\theta a}^2}{\mu_0} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \end{aligned} \quad (7-9)$$

プラズマ中心での圧力 $p(0)$ 及び圧力の平均値 $\langle p \rangle$ は

$$\begin{aligned}
p(0) &= \frac{B_{\theta a}^2}{\mu_0} \\
\langle p \rangle &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a p(r) 2\pi r dr \\
&= \frac{B_{\theta a}^2}{\mu_0 a^2} \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) 2r dr \\
&= \frac{B_{\theta a}^2}{\mu_0 a^2} \left[r^2 - \frac{r^4}{2a^2} \right]_0^a \\
&= \frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0} = \frac{p(0)}{2}
\end{aligned}$$



参考文献[3]図 7.13(a)を元に作成

この平衡では、プラズマ電流は全て反磁性電流である。このような平衡を「Z ピンチ」という。上の条件では不安定（ソーセージ不安定性）であり、安定化にするには外部縦磁場を加える必要がある。

次回講義は 1 月 15 日(月)

Appendix A: 一般の場合の反磁性電流

5-2 節では、イオン温度と電子温度が等しい水素プラズマについて反磁性電流の式を求めた。一般にイオンの価数を Z 、イオン密度を n_i 、イオン温度を T_i 、電子密度を n_e 、電子温度を T_e とすると、

$$\mathbf{v}_{Dj} = -\frac{\nabla p_j \times \mathbf{B}}{q_j n_j B^2}$$

より

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}_D &= Z e n_i \mathbf{v}_{Di} - e n_e \mathbf{v}_{De} = -Z e n_i \frac{\nabla p_i \times \mathbf{B}}{Z e n_i B^2} - e n_e \frac{\nabla p_e \times \mathbf{B}}{e n_e B^2} \\
&= -\frac{\nabla p_i \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\nabla p_e \times \mathbf{B}}{B^2} = -\frac{\nabla(p_i + p_e) \times \mathbf{B}}{B^2} = -\frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{B^2}
\end{aligned}$$

となり 5-2 節で求めた反磁性電流の式は一般的に成り立つ。つまり反磁

性電流によって力学的平衡(7-1)式が満足される。

Appendix B: ベクトル公式 $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla B^2/2$

右辺の $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ はベクトルの方向微分係数を表す。

(左辺の x 成分)

$$= \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) B_z - \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) B_y$$

一方、

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} &= \left(B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\ &= \left(B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \dots \end{aligned}$$

より

(右辺の x 成分)

$$\begin{aligned} &= B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_x}{\partial z} - \left(B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ &= B_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) + B_z \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

よって、(左辺の x 成分) = (右辺の x 成分)。 y, z 成分も同様。

出典

[1] 山崎耕造「トコトンやさしいプラズマの本」日刊工業新聞社(2004)p135

[2] F.F. Chen 著(内田岱二郎訳)「プラズマ物理入門」丸善(1977)

[3] 高村秀一「プラズマ理工学入門」森北出版(1997)