

プラズマ理工学 第 10 回

エネルギー理工学科 3 年秋学期

日時: 月曜日 午前 10 時 30 分～12 時 00 分、場所: 522 講義室

教員: 藤田隆明(ふじたたかあき) 工学部 8 号館南棟4階

6. プラズマの波動(続き)

6-3-2. 外部磁場がある場合

6-3-2-1. 外部磁場に平行な電子・イオンの静電振動

摂動速度場 V_1 が B に平行なので $V \times B$ はゼロとなり、磁場に平行な電子・イオンの静電振動は磁場がない場合と同じである。

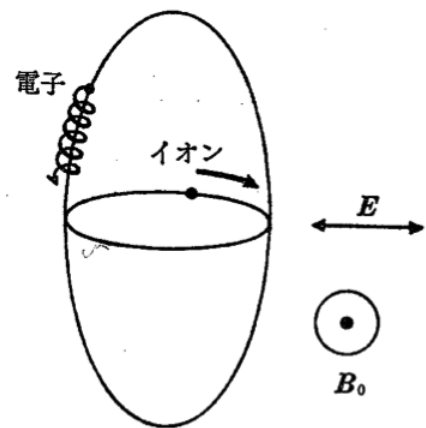
6-3-2-2. 外部磁場に垂直な電子の静電振動

電子密度の疎密により発生する静電場によるプラズマ振動 (ω_{pe}) に磁場によるローレンツ力(旋回運動) (ω_{ce}) の効果が加わり、 $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2$ の角周波数の振動が発生する(高域混成波振動、高域混成周波数)。

6-3-2-3. 外部磁場に垂直なイオンの静電振動

伝播方向が磁場に対して完全に垂直でないときは、磁力線に沿う電子の熱運動が効いて、 $\omega^2 = \omega_{ci}^2 + kV_s^2$ となる。

伝播方向が磁場に対して完全に垂直のときは、低域混成周波数 $\omega^2 = \omega_{ci} \omega_{ce}$ の低域混成波となる(右図)。



参考文献[1]の図 12.2.1

6-4. 変動磁場を伴うプラズマ波(電磁波)

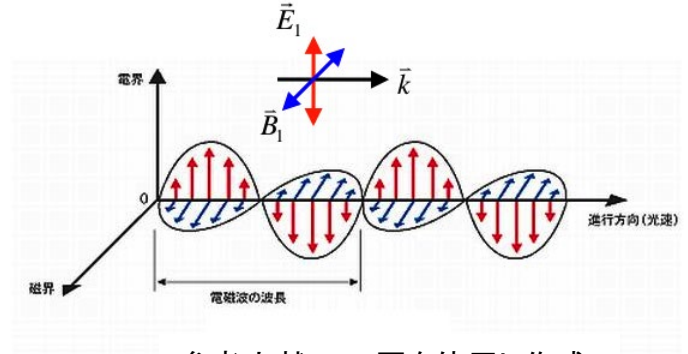
6-4-1. 磁場のないプラズマ中の電磁波

真空中を伝わる電磁波(光、電波)がプラズマ中に入射されたらどうなるか? まず真空中での電磁波を考える。マクスウェル方程式より

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,$$



参考文献[2]の図を使用し作成

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

第4式と第2式から

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

摂動量が $\exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\}$ の形で振動するとすると複素振幅について

$$-\epsilon_0 \mu_0 (-\omega^2 \vec{E}_1) = i\vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{E}_1) = -(\vec{k} \cdot \vec{E}_1)\vec{k} + (\vec{k} \cdot \vec{k})\vec{E}_1 = k^2 \vec{E}_1$$

(ここで、 $\nabla \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ を用いた)。よって

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \quad (6-5)$$

(c は光速)。これが真空中の電磁波の分散関係式である。

プラズマ中を伝わる電場 E が k に垂直な波 ($k \cdot E = 0$) を考える。イオンは静止していると考え。なお $k \parallel E$ の場合は 6-3-1-1 の電子プラズマ波であり、磁場のないプラズマ中を伝わる E と k が斜めの波は存在しないことが知られている。

プラズマ中では電流があるので

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

を用いる。これらより

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow i\mu_0 \omega \vec{j}_1 - \epsilon_0 \mu_0 (-\omega^2 \vec{E}_1) = i\vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{E}) = -(\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} + (\vec{k} \cdot \vec{k})\vec{E} = k^2 \vec{E}$$

(ここで $k \cdot E = 0$ を用いた)。

$$\begin{aligned} \rightarrow i\mu_0\omega\vec{j}_1 + \varepsilon_0\mu_0\omega^2\vec{E}_1 &= k^2\vec{E}_1 \\ \rightarrow (\omega^2 - k^2c^2)\vec{E}_1 &= -\frac{i\omega}{\varepsilon_0}\vec{j}_1 \end{aligned} \quad (6-6)$$

右辺の j_1 が真空中と違う部分。電場に応じて荷電粒子が運動することで電流が生じる。その考察から j_1 と E_1 の関係を求めて(6-6)式と連立させることで分散関係式が求められる。

イオンは静止しているので、電子流体の速度を V_e として

$$\vec{j}_1 = -en_e\vec{V}_e = -en_0\vec{V}_{e1} \quad (6-7)$$

である(線形化した)。

n_e 、 V_e はポアソン方程式と電子流体の運動方程式(下記)から決定される。後者では圧力勾配の項と摩擦力の項を無視している。

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{e}{\varepsilon_0}(n_i - n_e)$$

$$m_en_e\left(\frac{\partial \vec{V}_e}{\partial t} + (\vec{V}_e \cdot \nabla)\vec{V}_e\right) = -en_e(\vec{E} + \vec{V}_e \times \vec{B})$$

$n_i = n_0, n_e = n_0 + n_{e1}, \vec{V}_e = \vec{V}_{e1}, \vec{E} = \vec{E}_1, \vec{B} = \vec{B}_1$ として線形化すると

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0}n_{e1} \quad (6-8)$$

$$m_en_0\frac{\partial \vec{V}_{e1}}{\partial t} = -en_0\vec{E}_1 \quad (6-9)$$

(6-8) 式から複素振幅について

$$ik \cdot \vec{E} = -\frac{e}{\varepsilon_0}n_{e1}$$

となるので $k \cdot \vec{E} = 0$ より $n_{e1} = 0$ である。

(6-9) 式から複素振幅について

$$-i\omega m_en_0\vec{V}_{e1} = -en_0\vec{E}_1 \rightarrow \vec{V}_{e1} = -i\frac{e}{m_e\omega}\vec{E}_1$$

これを(6-7)式に代入して

$$\vec{j}_1 = -en_0\vec{V}_{e1} = i\frac{e^2n_0}{m_e\omega}\vec{E}_1$$

これを(6-6)式に代入して

$$(\omega^2 - k^2 c^2) \mathbf{E}_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} \mathbf{j}_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} \times i \frac{e^2 n_0}{m_e \omega} \mathbf{E}_1 = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_e} \mathbf{E}_1 = \omega_{pe}^2 \mathbf{E}_1$$

$$\rightarrow \omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$$

を得る。 ω_{pe} はプラズマ(角)周波数である($\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}$)。つまり真空中の電磁波の分散関係式にプラズマ振動に伴う項 ω_{pe}^2 の補正が入る。

$$\text{位相速度は、} V_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2}} > c$$

$$\text{群速度は、} V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega} c^2 = \frac{c^2}{V_\phi} < c$$

で与えられる。

プラズマの外から角周波数 ω_{in} の電磁波(マイクロ波)をプラズマへ入射する場合を考えると、プラズマ中での波数は $\omega_{in}^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$ より

$$k^2 = \frac{\omega_{in}^2 - \omega_{pe}^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} \left(\omega_{in}^2 - \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \right)$$

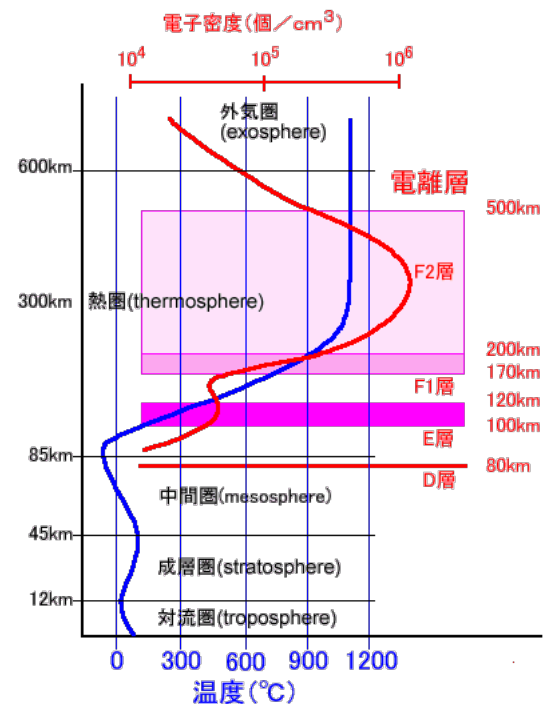
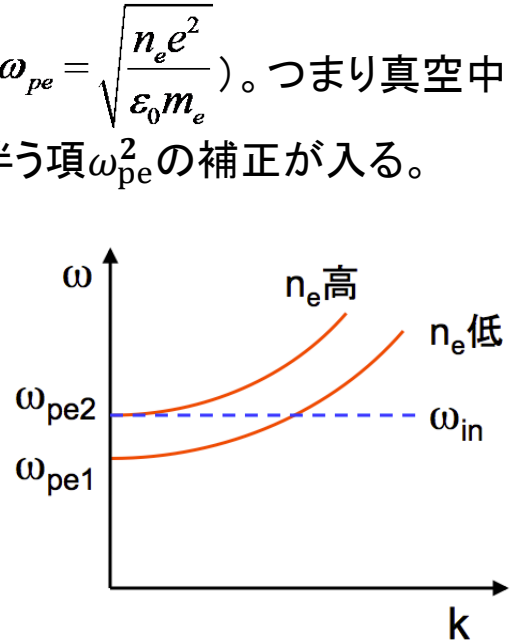
で決まる。プラズマの内部に入るとつれて電子密度 n_e が上がるとすると、 k はだんだん小さくなる(波長が長くなる)。 $k=0$ ($\omega_{in}=\omega_{pe}$)となる地点で波は伝わるのができなくなる(反射する)。これを**カットオフ**という(電離層における短波の反射)。カットオフ密度 n_{cutoff} は次式で与えられる。

$$\omega_{in}^2 = \frac{n_{cutoff} e^2}{\varepsilon_0 m_e} \rightarrow n_{cutoff} = \frac{\varepsilon_0 m_e}{e^2} \omega_{in}^2$$

$$\rightarrow n_{cutoff} [\text{m}^{-3}] = 1.24 \times 10^{16} (f_{in} [\text{GHz}])^2$$

プラズマの屈折率 $N = c/V_\phi = ck/\omega$ が0となる点で反射される。

電磁場の波数(波長)の電子密度に対する依存性は、プラズマ電子密



参考文献[3]

度の計測に用いられる(反射計、干渉計)。

＜カットオフと共鳴＞

カットオフ: 波長が無限大になる。屈折率(波数)が0になる。波動が反射される。

共鳴: 波長が0になる。屈折率(波数)が無限大になる。波動がプラズマに吸収される。

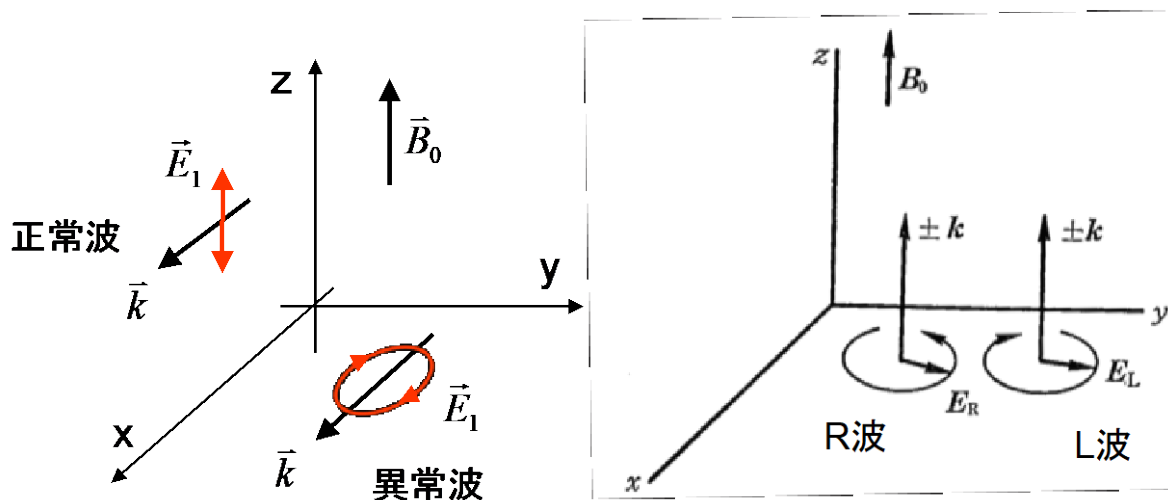
6-4-2. 外部磁場方向の電場を持つ電磁波

電子は磁場方向に動くため、その運動方程式に磁場は現れない。よって 6-4-1 と全く同じになる。「正常波」と言う。

6-4-3. 外部磁場に垂直な方向の電場を持つ電磁波

電子は磁場を横切って動くため、その運動方程式に $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の項が現れ、解析は複雑になる。磁場に垂直方向に伝播する波を「異常波」、磁場方向に伝播する波(円偏光)を「R 波」(右回り円偏光、ホイスラー波)、「L 波」(左回り円偏光)と言う。R 波は電場の回転が電子の旋回運動と同じ向きであり周波数が一致するとき共鳴する(電子を加速する)。

周波数が一致するとき共鳴する(電子を加速する)。



(右)参考文献[4]の図 4.38

6.5 変動磁場を伴う周波数が低い波

外部磁場方向に伝播する波(アルヴェン波)を考える。摂動電場は外

部磁場に垂直とし、外部磁場 B_0 の方向を z 軸に、摂動電場 E_1 の方向を x 軸に取る：

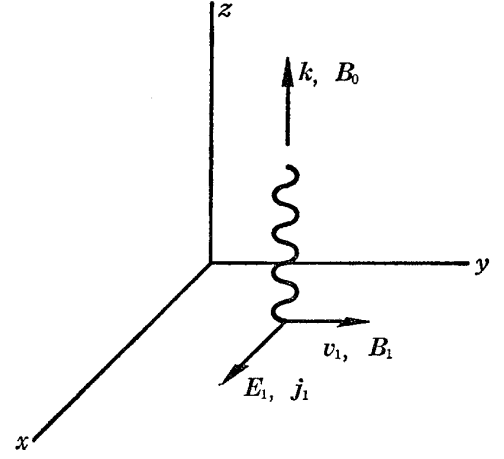
$$\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{e}_x.$$

マクスウェル方程式

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

より 6-4-1 と同様にして(6.6)式

$$(\omega^2 - k^2 c^2) \mathbf{E}_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} \mathbf{j}_1$$



参考文献[4]の図 4.45

が得られる(外部磁場 B_0 は関係しない)。 E_1 が x 成分しか持たないので、 j_1 も x 成分しか持たず $\mathbf{j}_1 = j_1 \mathbf{e}_x$ と書ける。つまり

$$(\omega^2 - k^2 c^2) E_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} j_1 \quad (6-10)$$

(上の式はベクトルではなく x 成分についての式であることに注意)。

一方、波動の周波数がイオンサイクロトロン周波数(及び電子サイクロトロン周波数)より十分低いと仮定すると一流体 MHD 方程式が適用される。線形化し抵抗を無視して

$$m_i n_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = \vec{j}_1 \times \vec{B}_0, \quad \vec{E}_1 + \vec{V}_1 \times \vec{B}_0 = \vec{0}$$

を得る。流速 V_1 は j_1 と同様 z 成分を持たないのに対して圧力勾配は z 方向の成分しか持たない($\nabla p = ikp_1 = ikp_1 \mathbf{e}_z$)ので運動方程式には現れない。上の第1式において $B_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ より V_1 は y 成分しか持たないので、 $V_1 = V_1 \mathbf{e}_y$ と置ける。時間微分を $-i\omega$ で置き換えて、

$$\begin{aligned} -i\omega m_i n_0 V_1 &= -j_1 B_0, \quad E_1 + V_1 B_0 = 0 \\ \rightarrow j_1 &= i\omega \frac{m_i n_0}{B_0} V_1 = -i\omega \frac{m_i n_0}{B_0^2} E_1 \end{aligned} \quad (6-11)$$

これを(6-10)式に代入して、

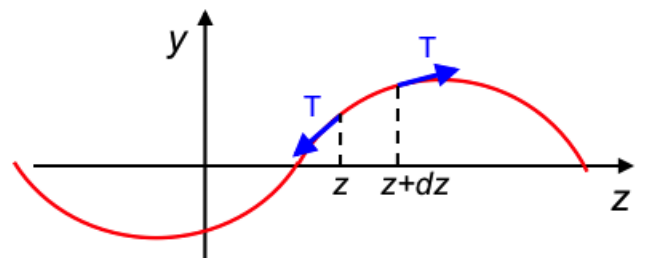
$$(\omega^2 - k^2 c^2) E_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} \left(-i\omega \frac{m_i n_0}{B_0^2} E_1 \right) = -\omega^2 \frac{m_i n_0}{\varepsilon_0 B_0^2} E_1$$

$$\rightarrow \left(1 + \frac{n_0 m_i}{\epsilon_0 B^2}\right) \omega^2 = k^2 c^2 \rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{1 + \frac{n_0 m_i}{\epsilon_0 B^2}} = \frac{c^2}{1 + \frac{\mu_0 n_0 m_i c^2}{B^2}} = \frac{c^2}{1 + \frac{c^2}{V_A^2}}$$

ここで、 $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ を用いた。また、 $V_A = B_0 / \sqrt{\mu_0 n_0 m_i} = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_m}$ と置いた (ρ_m はプラズマの質量密度)。通常、 $V_A \ll c$ であり、 $\omega/k = V_A$ となる。そのため、 V_A を **アルヴェン速度** と言う。

<磁力線の振動としてのアルヴェン波>

マクスウェルの応力テンソルにより、磁力線には B^2/μ_0 の引っぱり応力 (張力) が働いていると見なすことができる。**アルヴェン波は、「磁場の凍り付き」により質量密度 ρ_m のプラズマが磁力線と一緒に振動している状態と考えることができる。**



断面積 dS の磁束管を考えると、張力は $T = B_0^2/\mu_0 dS$ 、線密度は $\rho_l = \rho_m dS$ なので、磁束管の変位 y は

$$\rho_m dS \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{B_0^2}{\mu_0} dS \frac{d^2 y}{dz^2} \rightarrow \rho_m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{B_0^2}{\mu_0} \frac{d^2 y}{dz^2}$$

で与えられる。 $y \propto \exp[i(kz - \omega t)]$ とおいて、

$$\rho_m (-i\omega)^2 y = \frac{B_0^2}{\mu_0} (ik)^2 y \rightarrow -\rho_m \omega^2 = -\frac{B_0^2}{\mu_0} k^2 \rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_m}$$

が得られる。

-----参考-----

線密度 ρ_l 、張力 T の弦を考える。 $z=z$ と $z=z+dz$ の間の部分に働く張力による力 F_y は、弦の振幅が波長より十分小さいとき、

$$F_y = T \frac{dy}{dz}(z+dz) - T \frac{dy}{dz}(z) = T \frac{d}{dz} \left(\frac{dy}{dz} \right) dz = T \frac{d^2 y}{dz^2} dz$$

よって当該部分に関する運動方程式は、

$$\rho_l dz \frac{d^2 y}{dt^2} = T dz \frac{d^2 y}{dz^2} \rightarrow \rho_l \frac{d^2 y}{dt^2} = T \frac{d^2 y}{dz^2}$$

アルヴェン波の速度は、磁場の揺動が伝わる速度であり、プラズマ流体における最も基本的なパラメータの一つ。例えば、ITER で想定される $B=5\text{T}$, $T_e=T_i=10\text{keV}$, $n_e=n_i=1\times 10^{20}\text{m}^{-3}$ の重水素プラズマ($m_i=3.34\times 10^{-27}\text{kg}$) では、 $\rho_m = 1\times 10^{20}\times 3.34\times 10^{-27} = 3.34\times 10^{-7}\text{kg/m}^3$ より、

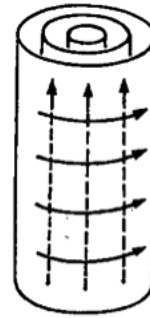
$$V_A = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_m} = 5 / \sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 3.34 \times 10^{-7}} = 7.72 \times 10^6 [\text{m/s}]$$

アルヴェン波が ITER プラズマ(大半径 6m)を一周する時間
 $= 2\pi \times 6 / 7.72 \times 10^6 \sim 5\mu\text{s}$ 。

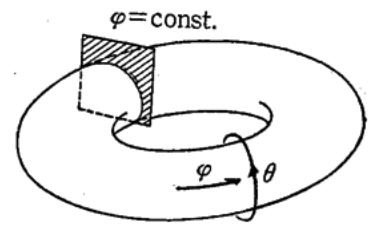
7. プラズマの平衡

7-1. 円筒座標系でのベクトル公式(準備)

プラズマの平衡や今後の輸送の議論では、円柱状のプラズマやトーラス状(ドーナツ形)のプラズマを取り扱う。この場合、円筒(円柱)座標系を使うのが便利である。



円柱状



トーラス状

参考文献[1]の図 14.1.1 と図 14.1.4 を元に作成

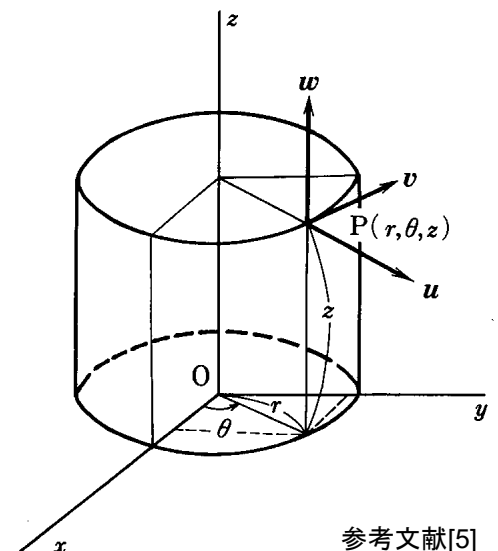
円筒(円柱)座標系(r, θ, z) または(R, ϕ, Z): 直交曲線座標系の一つ。一般に、直交曲線座標系(u, v, w)に対して計量係数 h_1, h_2, h_3 が以下で定義される。

$$h_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|, h_2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|, h_3 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right|$$

$\mathbf{r}$ は点 $P(u, v, w)$ の位置ベクトル。例えば、 u が微少量 du 変化したときの点 P の移動距離は $h_1 du$ 。

基本ベクトルは、この移動方向の単位ベクトルとして以下のように定義される。

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \mathbf{e}_v = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \mathbf{e}_w = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$



参考文献[5]

直交曲線座標系では基本ベクトルの向きが場所によって変わらう。

u, v, w の微少量 du, dv, dw に対応する点 P を含む領域(体積要素)の体積は $dV = h_1 h_2 h_3 du dv dw$ 。

スカラー場、ベクトル場に対する勾配、発散、回転などは以下で与えられる。

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{e}_v + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial w} \mathbf{e}_w$$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &= \nabla \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_3 h_1 A_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 A_w) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_u & h_2 \mathbf{e}_v & h_3 \mathbf{e}_w \\ \partial/\partial u & \partial/\partial v & \partial/\partial w \\ h_1 A_u & h_2 A_v & h_3 A_w \end{vmatrix}$$

円筒(円柱)座標系 (r, θ, z) の場合は、 $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$ なので

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (r A_z) \right\} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial z \\ A_r & r A_\theta & A_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial z} \right\} \mathbf{e}_r + \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right\} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \mathbf{e}_z \\ &= \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right\} \mathbf{e}_r + \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right\} \mathbf{e}_\theta + \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\int f dV = \int f r dr d\theta dz$$

となる。

特に、 θ, z 座標に依存しない場合 (1 次元、 $\partial/\partial\theta = 0, \partial/\partial z = 0$) は

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left\{ -\frac{\partial A_z}{\partial r} \right\} \mathbf{e}_\theta + \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} \right\} \mathbf{e}_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

また、 (x, y, z) 座標系の基底ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ は場所によらないが、円筒座標系での $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ は場所(θ)によって向きが変わるので $\partial \mathbf{e}_r / \partial \theta, \partial \mathbf{e}_\theta / \partial \theta$ はゼロではない。

$$\mathbf{e}_r = (\cos \theta) \mathbf{e}_x + (\sin \theta) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta) \mathbf{e}_x + (\cos \theta) \mathbf{e}_y$$

より

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_r = (-\sin \theta) \mathbf{e}_x + (\cos \theta) \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = (-\cos \theta) \mathbf{e}_x + (-\sin \theta) \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_r$$

となる。

出典

[1] 核融合とプラズマの制御(下)、内田岱二郎・井上信幸著、東京大学出版会(1982)

[2]https://www.soumu.go.jp/main_sosiki/joho_tsusin/policyreports/chousa/tsushin_houseikikaku/pdf/061121_1_3.pdf

[3]https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/178167/1/iugonet_20130820_shinbori1.pdf

[4] F.F. Chen 著(内田岱二郎訳)、プラズマ物理入門、丸善(1977)

[5] 寺田文之ほか「演習ベクトル解析」サイエンス社(2012)p.128

プラズマ理工学レポート(第4回)課題

次回 12 月 25 日(月)の講義開始時に提出すること。学生番号、氏名を冒頭に記入すること。

問 1 電気抵抗率が無視できるプラズマ中で、磁束密度 B は以下の微分方程式に従う。

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (V \times B)$$

ここで V はプラズマの流速である。磁束密度 B は z 成分のみを有し、かつ y, z に依存しないとする。すなわち $B = B_z(x, t)e_z$ 。また、流速 V は x 軸方向の一様一定な流れとし、 $V = V_0 e_x$ と表す (V_0 は定数)。

- (1) $\partial B_z / \partial t$ と $\partial B_z / \partial x$ の間の関係式を求めよ。
- (2) B_z が $x - V_0 t$ のみの関数のとき、すなわちある関数 f を用いて $B_z = f(x - V_0 t)$ と書けるととき、(1) で求めた関係式が満たされることを示せ。
- (3) B_0, k を定数として、時刻 $t = 0$ における B_z が以下の式で表されとする。時刻 $t = 0$ における電場ベクトル E 及び電流密度ベクトル j を求めよ。ただし真空の透磁率を μ_0 とする。

$$B_z(x, 0) = B_0 \cos(kx)$$

- (4) 上記(3)において、プラズマが有限な幅の領域 ($|x| \leq w$) に存在し、時刻 $t = 0$ 以降に中心 ($x = 0$) に向かって下記の流速 V で収縮したとする (α は正の定数)。

$$V = -\alpha x e_x \quad (|x| \leq w)$$

$t = 0, x = 0$ における $\partial B_z / \partial t$ を求めよ。

問 2 外部磁場 $B_0 = B_0 e_z$ のあるプラズマ中を外部磁場方向に伝わり ($k = k e_z$)、電場 E が k に垂直な ($k \cdot E = 0$) 高周波の波を考える。イオンは静止していると考え。電子密度、電子圧力の振動はない。

- (1) $n_e = n_0, V_e = V_1, E = E_1, B = B_0 + B_1$ として電子の運動方程式

$$m_e n_e \left(\frac{\partial V_e}{\partial t} + (V_e \cdot \nabla) V_e \right) = -e n_e (E + V_e \times B)$$

を線形化せよ。

- (2) 振動成分を $\exp[i(kz - \omega t)]$ の形と仮定して、(1) で求めた式から、

V_1 の x, y 成分の複素振幅 V_{x1} , V_{y1} および電場 E_1 の x, y 成分の複素振幅 E_{x1} , E_{y1} についての代数方程式を求めよ。それを V_{x1} , V_{y1} について解いて、 V_{x1} , V_{y1} を E_{x1} , E_{y1} を用いて表せ。ただし、 $\omega_{ce} = eB_0/m_e$ (電子サイクロトロン角周波数) において B_0 を消去すること。