物理学基礎１　第１５回

質点系 (2)

時田恵一郎

名古屋大学情報学部

July 19, 2023

期末試験

- 日時：2023 年 7 月 26 日 (水) 10:30-12:00（いつもと同じ）
- 場所：全学教育棟 A 館 A31 教室（いつもと同じ）
- 範囲：授業で扱ったこと全て（ただし，「球殻による万有引力のポテンシャル」，「楕円」，「第１０回」，「第１１回」，「第１５回」の内容は除く）
  演習問題も簡単なもの以外は出しません。
- 授業資料，ノート，教科書等全て持ち込み不可
- スマホも電源を消してカバンにしまってもらいますので，時計を忘れずに持ってきてください。
- やむを得ない理由で受験できない場合は，試験開始前までに TACT のメッセージか，tokita@i.nagoya-u.ac.jp まで連絡してください。

質点系：運動エネルギー

- 質点系の運動エネルギーを重心の運動によるエネルギーと残りの部分に分ける．
- j 番目の質点の位置 $\vec{r}_j$ を重心 $\vec{r}_G$ からの相対座標 $\vec{r'}_j$ で表すと，

$$\vec{r}_j = \vec{r}_G + \vec{r'}_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, N) \tag{1}$$

- 全系の質量を $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$ として，重心の定義から

$$M\vec{r}_G = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j (\vec{r}_G + \vec{r'}_j) \tag{2}$$

$$= M\vec{r}_G + \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r'}_j \tag{3}$$

質点系：運動エネルギー

よって，

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r'}_j = 0 \tag{4}$$

これを微分して

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\mathrm{d}\vec{r'}_j}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5}$$

質点系の全運動エネルギーを K として，

$$K = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_j}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_G}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r'}_j}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{6}$$

質点系：運動エネルギー

$$= \frac{1}{2} M \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_G}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \frac{\mathrm{d}\vec{r}_G}{\mathrm{d}t} \cdot \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\mathrm{d}\vec{r'}_j}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r'}_j}{\mathrm{d}t} \right)^2 \tag{7}$$

(5) 式より第２項は 0 であるから，

$$\boxed{K = K_G + K'} \tag{8}$$

質点系の運動エネルギー

質点系の全運動エネルギーは，重心の運動エネルギーと重心に対する相対運動のエネルギーの和に等しい．

質点系：角運動量

質点系の運動方程式（第１４回授業資料 (8) 式）

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_j}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\vec{F}_j}_{\text{外力}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{kj}}_{\text{内力}} \qquad (j = 1, 2, \cdots, N) \tag{9}$$

ただし，$\vec{F}_{ii} = 0$ であり，今回は質点 k が j に及ぼす内力を $\vec{F}_{kj}$ と書くこととする．左から $\vec{r}_j$ とのベクトル積をとって j についての和をとると，

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_j}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_j + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{kj} \tag{10}$$

質点系：角運動量

ここで最後の項の j と k を入れ替えて作用反作用の法則 $\vec{F}_{kj} = -\vec{F}_{jk}$ をもちいると

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{kj} = \sum_{j}\sum_{k} \vec{r}_k \times \vec{F}_{jk} \tag{11}$$

$$= -\sum_{j}\sum_{k} \vec{r}_k \times \vec{F}_{kj} \tag{12}$$

等しいものを加えて２で割っても同じだから，左辺と右辺を加えて２で割ると

$$\sum_{j}\sum_{k} \vec{r}_j \times \vec{F}_{kj} = \frac{1}{2}\sum_{j}\sum_{k} (\vec{r}_j - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{kj} = 0 \tag{13}$$

となる．最後の等式では，ベクトル $\vec{r}_j - \vec{r}_k$ とベクトル $\vec{F}_{kj}$ が平行なので，それらのベクトル積が０になることをもちいた．

質点系：角運動量

よって，(10) 式は

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_j}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_j \tag{14}$$

となり，右辺は内力に無関係で外力だけで決まる．ここで，全系の角運動量

$$\boxed{\vec{L} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{p}_j} \tag{15}$$

を定義して，微分すると

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{r}_j}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}_j + \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_j}{\mathrm{d}t} \tag{16}$$

質点系：角運動量

となるが，$\mathrm{d}\vec{r}_j/\mathrm{d}t = \vec{v}_j$ は質点 j の速度であり，その運動量 $\vec{p}_j$ に平行なので，それらのベクトル積はゼロであり，(14) をもちいて

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_j \tag{17}$$

右辺は外力のモーメントの総和 $\vec{N}$ であるから，

質点系の角運動量の時間変化

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{N} \tag{18}$$

質点系の角運動量の時間的変化の割合は外力のモーメントの総和に等しい．

質点系：角運動量

ある点のまわりの外力のモーメントの総和が常に $\vec{N} = 0$ であれば，

質点系の角運動量保存則

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{19}$$

質点系：角運動量

- 質点系の角運動量を原点に対する重心の運動による部分と，重心のまわりの運動による部分に分ける．
- j 番目の質点の位置 $\vec{r}_j$ を重心 $\vec{r}_G$ からの相対座標 $\vec{r'}_j$ で表して，

$$\vec{r}_j = \vec{r}_G + \vec{r'}_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, N) \tag{20}$$

とすると，この質点の運動量は

$$\vec{p}_j = m_j \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_G}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r'}_j}{\mathrm{d}t} \right) \tag{21}$$

であるから，質点系の角運動量 (15) は，

質点系：角運動量

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^{N} m_j(\vec{r}_G + \vec{r'}_j) \times \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_G}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r'}_j}{\mathrm{d}t} \right) \tag{22}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_G \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}_G}{\mathrm{d}t} + \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r'}_j \times \frac{\mathrm{d}\vec{r'}_j}{\mathrm{d}t} \tag{23}$$

となる．ただし，(4) 式（$\sum_j m_j \vec{r'}_j = 0$）と (5) 式（$\sum_j m_j \mathrm{d}\vec{r'}_j/\mathrm{d}t = 0$）をもちいた．右辺第１項を

$$\vec{L}_G = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_G \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}_G}{\mathrm{d}t} \tag{24}$$

と書き，全運動量 $\vec{P} = M\mathrm{d}\vec{r}_G/\mathrm{d}t$（第１４回授業資料 (17) 式）をもちいると

質点系：角運動量

$$\boxed{\vec{L}_G = \vec{r}_G \times \vec{P}} \tag{25}$$

と書くことができるが，これは全質量が重心に集中したと仮定したときに重心が原点のまわりにもつ角運動量である．

また，

$$m_j \frac{\mathrm{d}\vec{r'}_j}{\mathrm{d}t} = \vec{p'}_j \tag{26}$$

は質点 j の重心に相対的な運動量であり，

$$\vec{L'} = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r'}_j \times \frac{\mathrm{d}\vec{r'}_j}{\mathrm{d}t} \tag{27}$$

質点系：角運動量

あるいは

$$\boxed{\vec{L'} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r'}_j \times \vec{p'}_j} \tag{28}$$

は重心のまわりの角運動量である．これと (23)，(24) 式から

質点系の角運動量

$$\vec{L} = \vec{L}_G + \vec{L'} \tag{29}$$

質点系の角運動量は，重心運動によるものと，重心のまわりの運動によるものとの和で表される．

質点系：外力のモーメント

一方，外力のモーメントを重心まわりと相対座標に関するものに分けると

$$\vec{N} = \sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_G + \vec{r'}_j) \times \vec{F}_j \tag{30}$$

$$= \vec{r}_G \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j + \sum_{j=1}^{N} \vec{r'}_j \times \vec{F}_j \tag{31}$$

となる．ここで，

$$\boxed{\vec{N}_G = \vec{r}_G \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j} \tag{32}$$

は重心の位置ベクトル $\vec{r}_G$ と力の総和 $\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j$ のベクトル積であり，これは力がすべて重心に集まったと仮定したときの原点のまわりの外力のモーメントである．

質点系：外力のモーメント

また，

$$\boxed{\vec{N}' = \sum_{j=1}^{N} \vec{r'}_j \times \vec{F}_j} \tag{33}$$

は重心のまわりの外力のモーメントである．これと，(31)，(32) 式から，

$$\boxed{\vec{N} = \vec{N}_G + \vec{N}'} \tag{34}$$

なので，これと (18)，(29) 式から，運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t} = \vec{N}_G + \vec{N}' \tag{35}$$

となる．

質点系：外力のモーメント

ただし，$(\mathrm{d}\vec{r}_G/\mathrm{d}t) \times \vec{P} = (\vec{P}/M) \times \vec{P} = 0$ なので，(25) 式 ($\vec{L}_G = \vec{r}_G \times \vec{P}$) と第１４回授業資料 (12) 式（$\mathrm{d}\vec{P}/\mathrm{d}t = \sum_j \vec{F}_j$）により

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t} = \vec{r}_G \times \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{r}_G \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \tag{36}$$

あるいは，(32) 式 ($\vec{N}_G = \vec{r}_G \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j$) を使って

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t} = \vec{N}_G} \tag{37}$$

となる．

質点系：外力のモーメント

よって，重心のまわりの角運動量の時間変化も

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t} = \vec{N}'} \tag{38}$$

となる．
　角運動量に対する運動方程式は重心に関する式と，重心のまわりの角運動量に対する式に分けられる．

質点系の角運動量に関する運動方程式

1．(37) 式により，重心の原点のまわりの回転運動を解析する．
2．(38) 式により，重心のまわりの回転運動を解析する．

演習問題

1. 質点系全体の角運動量 (15) の各成分が以下のように与えられることを示せ．

$$L_x = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(y_j \frac{\mathrm{d}z_j}{\mathrm{d}t} - z_j \frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t} \right) \tag{39}$$

$$L_y = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(z_j \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} - x_j \frac{\mathrm{d}z_j}{\mathrm{d}t} \right) \tag{40}$$

$$L_z = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(x_j \frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t} - y_j \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} \right) \tag{41}$$

ただし，$\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$，$\vec{p}_j = (m_j \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}, m_j \frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t}, m_j \frac{\mathrm{d}z_j}{\mathrm{d}t})$ である．

演習問題

２． 第７回授業資料「演習問題：単振り子と振り子の等時性」の単振り子における角運動量 L と力のモーメント N（単振り子の場合はベクトルでなくスカラー）を書き，(18) 式のスカラー版 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = N$ に代入することにより，単振り子の運動方程式（同資料 (12) 式）

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \tag{42}$$

が得られることを示せ．

演習問題（ヒント）

1． 第２回授業資料「ベクトル」におけるベクトル積の定義(17)，(18) 式をもちいて

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{p}_j = \sum_{j=1}^{N} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_j & y_j & z_j \\ p_{jx} & p_{jy} & p_{jz} \end{vmatrix} \tag{43}$$

$$= ((39)\,\text{右辺})\vec{i} + ((40)\,\text{右辺})\vec{j} + ((41)\,\text{右辺})\vec{k} \tag{44}$$

ただし，$p_{jx} = m_j \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}$, $p_{jy} = m_j \frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t}$, $p_{jz} = m_j \frac{\mathrm{d}z_j}{\mathrm{d}t}$．

演習問題（ヒント）

2． 単振り子の場合，本質的に１次元の問題なので，$N=1$ であり，各ベクトルはスカラーとなり，ベクトル積は通常の積になる．動径方向は一定なので，(15) 式中の $\vec{r}_j$ は定数 $\vec{r}_j \to \ell$ であり，$\vec{p}_j$ は $mv = m\ell\dot{\theta}$（v はおもりの速さ（接線速度），第３回授業資料「座標と座標系」の「角速度と速さの関係」参照）なので，(15) 式の $\vec{L}$ は，$L = m\ell^2\dot{\theta}$ となる．一方，(17) 式の力のモーメントは，$\vec{r}_j \to \ell$, $\vec{F}_j \to -mg\sin\theta$（方位角方向の力，向きは θ の増す向きと逆なのでマイナス符号が付く）であるから，$N = -mg\ell\sin\theta$ である．これらを (18) 式のスカラー版 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = N$ に代入することにより求める運動方程式が得られる．