物理学基礎１　第１０回

ケプラーとニュートンの偉業
ケプラーの法則から万有引力の法則を導く

時田恵一郎

名古屋大学情報学部

June 14, 2023

ヨハネス・ケプラー（1571-1630）

1571. 神聖ローマ帝国の自由都市ヴァイル・デア・シュタット生
1594. グラーツの学校で数学と天文学を教えた．
1596. 「宇宙の神秘」刊行．地動説．
1599. 失職，プラハのティコの弟子に．
1601. ティコ死去．当時最も難しいとされた火星の運行データの解析をティコから託された．
1601- 地球の公転面と火星の公転面が交差する直線上に太陽があることを発見し，惑星に運動をさせるものが太陽であることを確信．
1609. 「新天文学」刊行．
- 火星の軌道が楕円であることを発見．（ケプラーの第１法則）．
- 近日点と遠日点における地球の速さの関係を一般化して，面積速度の原理を発見 (ケプラーの第２法則)．

1618. 惑星の周期と楕円軌道の長半径の関係を発見
1619. 「宇宙の調和」刊行．（ケプラーの第３法則）．
1627. 「ルドルフ星表」完成．
1630. レーゲンスブルクにて死去．

ケプラーの業績

1. 惑星の運動は円ではなく楕円であると主張し，地動説を確立→ケプラーが作成した『ルドルフ星表』は『プロイセン星表』の 30 倍の精度．
2. 数学モデルの提唱（→ガリレイ，ニュートン→古典物理学）
3. 太陽が惑星を距離の２乗に反比例した力で引いていることも知っていた．→「太陽と惑星の間に，磁力のような力が存在する」
4. 球の最密充填が面心立方格子であることを予想（ケプラー予想）→ 1998 年にヘイルズが計算機を用いて証明．

ケプラーの法則

ケプラーの法則

第１法則 惑星は太陽を焦点のひとつとする**楕円軌道**を描く

第２法則 太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に掃過する面積（**面積速度**）は一定である．

第３法則 惑星が太陽のまわりをまわる周期 T の２乗は楕円軌道の長軸半径 a の３乗に比例する．

$$T^2 \propto a^3 \tag{1}$$

比例定数は惑星によらず一定！

ケプラーの法則から

万有引力の法則を

導く

ケプラーの第１法則

- 惑星の軌道は楕円
- 楕円軌道の極座標表示　(cf. 第８回授業資料「楕円」(21) 式)

$$\frac{\ell}{r} = 1 + \varepsilon \cos\varphi \tag{2}$$

- a：楕円の長軸半径
- ℓ：半直弦（$\varphi = \pi/2$ のときの $|r|$）
- $\varepsilon = c/a$：離心率

ケプラーの第２法則

(2) 式の両辺を t で微分すると，

$$\ell \frac{\dot{r}}{r^2} = \varepsilon \sin\varphi\,\dot{\varphi} \tag{3}$$

ケプラーの第２法則（面積速度一定）の式 $r^2\dot{\varphi} = h$（第９回資料 (20) 式）を代入して，

$$\dot{r} = \frac{h}{\ell}\varepsilon \sin\varphi \tag{4}$$

運動方程式

(4) 式両辺を再度 t で微分して

$$\ddot{r} = \frac{h}{\ell}\varepsilon\cos\varphi\,\dot{\varphi} = \frac{h}{\ell}\varepsilon\cos\varphi\frac{h}{r^2} \tag{5}$$

$$= \frac{h^2}{\ell}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\ell}{r} - 1\right) \quad (\leftarrow (2)) \tag{6}$$

$$= \frac{h^2}{r^3} - \frac{h^2}{\ell r^2} \tag{7}$$

これを２次元平面上で中心力を受ける質量 m の質点の動径方向の運動方程式（第９回資料 (28) 式）に代入すると

$$f(r) = m\left(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}\right) = m\left(\frac{h^2}{r^3} - \frac{h^2}{\ell r^2} - \frac{h^2}{r^3}\right) \tag{8}$$

$$= -\left(\frac{mh^2}{\ell}\right)\frac{1}{r^2} \tag{9}$$

惑星が太陽から受ける力

惑星が太陽から受ける力

ケプラーの第１法則（楕円軌道）と第２法則（面積速度一定）に従う惑星は，太陽からの距離 r の２乗に反比例する引力を受けている．

$$f(r) = -\left(\frac{mh^2}{\ell}\right)\frac{1}{r^2} \tag{10}$$

比例定数 mh^2/ℓ について
惑星の質量 m，面積速度 $h/2$，軌道の半直弦 ℓ は惑星ごとに異なるので，太陽が惑星におよぼす引力は惑星によって異なる．

ケプラーの第３法則

ケプラーの第３法則

すべての惑星の周期 T と軌道の長軸半径 a の間に成り立つ普遍的な関係

$$T^2 \propto a^3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{T^2}{a^3} = \text{すべての惑星で同じ一定値} \tag{11}$$

楕円

- 楕円の面積： $$A = \pi ab \tag{12}$$
- 惑星の周期： $$T = \frac{\text{楕円の面積}}{\text{面積速度}} = \frac{A}{h/2} = \frac{2\pi ab}{h} \tag{13}$$

ケプラーの第３法則

(13) 式に，$a = \ell/(1-\varepsilon^2), b = \ell/\sqrt{1-\varepsilon^2}$（第８回授業資料 (34) 式）を代入して，

$$T = \frac{2\pi\ell^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}h} \tag{14}$$

$$\therefore \quad T^2 = \frac{4\pi^2\ell^4}{(1-\varepsilon^2)^3 h^2} = \frac{4\pi^2\ell}{h^2}\left(\frac{\ell}{(1-\varepsilon^2)}\right)^3 = \frac{4\pi^2\ell}{h^2}a^3 \tag{15}$$

(11) 式と (15) 式を比べると，

$$\frac{4\pi^2\ell}{h^2} = k\,(\text{惑星によらず一定}) \tag{16}$$

$$\Rightarrow \quad (10)\ \text{式の比例定数の}\frac{h^2}{\ell} = \frac{4\pi^2}{k}(\text{惑星によらず一定}) \tag{17}$$

惑星が太陽から受ける力

ケプラーの第１，第２，第３法則をニュートンの第２法則（運動方程式）に適用することにより，

惑星が太陽から受ける力

$$f(r) = -\frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{r^2} \quad (k : \text{惑星によらない定数}) \tag{18}$$

惑星に太陽がおよぼす力は，惑星の軌道や面積速度などによらず，惑星の質量 m に比例し，太陽からの距離 r の２乗に反比例する．

ニュートンの第３法則（作用・反作用の法則）

- 作用・反作用の法則（相互作用の対称性）により，太陽が惑星を引くのであれば，惑星も太陽を引く．
- 力 (18) は惑星の質量に比例しているので，反作用には太陽の質量 M が入っている必要がある．
- 太陽と惑星が引き合う力は m と M の両方に比例する．
- (17) の定数 $h^2/\ell = 4\pi^2/k = GM$

万有引力の法則（Newton, 1665）

$$f(r) = -G\frac{mM}{r^2} \tag{19}$$

$G = 6.67430 \times 10^{-11}[\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2)]$ （万有引力定数）

重力加速度

地上で地球が質量 m の物体を引く力 mg の比例定数 g.

重力加速度

$$g = \frac{GM_e}{R_e^2} = 9.8[\mathrm{m/s^2}] \tag{20}$$

$$M_e = 5.98 \times 10^{24}[\mathrm{kg}] \quad \text{：地球の質量} \tag{21}$$

$$R_e = 6.37 \times 10^{6}[\mathrm{m}] \quad \text{：地球の半径} \tag{22}$$

地球の重力下での運動

地球の重力のもとで運動する質量 m の物体の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -G\frac{M_e m}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \tag{23}$$

- 運動は地球の中心を含むひとつの平面内で起こる．
- 軌道の形は，円，直線，楕円，双曲線，放物線のいずれか．

円軌道の場合，重力と遠心力がつり合う必要があり，その条件は軌道半径を r，角速度を ω として，

$$\frac{GM_e}{r^2} = r\omega^2 \tag{24}$$

周期 $T = 2\pi/\omega$ をもちいて，

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_e}{(2\pi)^2} \quad \text{(地球ー物体系におけるケプラーの第３法則)} \tag{25}$$

地球の重力ポテンシャル

地球の重力ポテンシャル

$$U_G(r) = -\frac{GM_e m}{r} \tag{26}$$

$$U(\infty) = 0 \quad (r = \infty \text{ が基準点の場合。第５回資料 P14)} \tag{27}$$

$$U_1(r) = GM_e m\left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{r}\right) \tag{28}$$

$$\tilde{U}(R_e) = 0 \quad (r = R_e \text{ が基準点の場合)} \tag{29}$$

$$U_2(r) \simeq \frac{GM_e m}{R_e^2} h = mgh \quad (h \equiv r - R_e \ll R_e \text{ のとき} \tag{30}$$

$$\text{第５回資料演習問題問４)} \tag{31}$$

演習問題

以下数値計算は WolframAlpha を使ってよい．

1. 地球をまわる月の公転周期は 27.3 日である．地球から月までの距離 r_m と地球の半径 R_e の比 $r_m/R_e = 60$ および「地球ー月系」におけるケプラーの第３法則 (25) をもちいて地球の平均密度を推定せよ．
2. 1. の答と (20) 式を使って，地球の質量は使わずに地球の半径を推定せよ．
3. 静止衛星は，周期 T が１日 ($= 24 \times 60 \times 60[\mathrm{s}]$) の人工衛星である．「地球ー静止衛星系」におけるケプラーの第３法則 (25) および地球の半径 R_e(22) の値をもちいて，静止衛星の軌道半径 r_a を求めよ．さらにその結果をもちいて静止衛星が（地球の中心に原点を固定した座標系において）秒速 3km 程度で運動していることを示せ．

演習問題

4. 地球の周りの円軌道上を回る人工衛星の運動エネルギー K と無限遠を基準とする位置エネルギー U((26) 式) の間には $2K = -U$ の関係があることを (24) 式をもちいて示せ．また，同様のことを前回資料の (9-30) 式や有効ポテンシャル (9-46) 式などを用いて示せ．

5. (26) 式および (27) 式から，質量 m の物体が地球の重力圏から脱出するために必要なエネルギーは

$$E = U(\infty) - U(r) = \frac{GM_e m}{R_e} \tag{32}$$

である．このことをもちいて，第二宇宙速度、すなわち地球の重力圏から脱出するために必要な地表における初速度を求めよ．

演習問題（答）

1. (25) 式より月の周期の２乗は

$$T^2 = (2\pi)^2 \frac{r_m^3}{GM_e} = \frac{(2\pi)^2}{G} \frac{R_e^3}{M_e} \left(\frac{r_m}{R_e} \right)^3 \quad (33)$$

$$\therefore \quad (\text{平均密度})\, d = \frac{M_e}{(4\pi/3)R_e^3} = \frac{1}{4\pi/3} \frac{(2\pi)^2}{G} \left(\frac{r_m}{R_e} \right)^3 \frac{1}{T^2} \quad (34)$$

数値を入れると

$$d \simeq 5.5 \times 10^3 [\mathrm{kg/m^3}] = 5.5 [\mathrm{g/cm^3}] \quad (35)$$

2. (20) 式から，

$$g = \frac{GM_e}{R_e^2} = G \left(\frac{M_e}{(4\pi/3)R_e^3} \right) \frac{4\pi}{3} R_e = Gd \frac{4\pi}{3} R_e \quad (36)$$

演習問題（答）

$$\therefore \quad R_e = \frac{3}{4\pi}\frac{g}{Gd} \simeq 6400[\mathrm{km}] \tag{37}$$

3. (20) 式や (25) 式を用いて

$$\frac{r_a^3}{T^2}\frac{1}{R_e^2} = \frac{GM_e}{(2\pi)^2}\frac{1}{R_e^2} = \frac{g}{(2\pi)^2} \tag{38}$$

$$\therefore \quad r_a = \left(\frac{gT^2R_e^2}{(2\pi)^2}\right)^{1/3} \tag{39}$$

$$\simeq 4.2 \times 10^7[\mathrm{m}] = 42,000[\mathrm{km}] \tag{40}$$

静止衛星の周期 $T = 24[\text{時間}] = 2\pi r_a/v$ から，
$v = 2\pi r_a/T \simeq 3.05[\mathrm{km/s}]$．

演習問題（答）

4. 人工衛星の質量を m，軌道半径を r_0，速度を v とすると，運動エネルギーは $K = mv^2/2$，位置エネルギーは $U = -GM_e m/r_0$．(24) 式と角速度と速さの関係 $v = r_0\omega$ を用いて

$$v^2 = (r_0\omega)^2 = \frac{GM_e}{r_0} \tag{41}$$

より，$2K = -U$ となる．また，第９回授業資料 p17 より，人工衛星が円軌道上を回るためには，人工衛星の力学的エネルギーは有効ポテンシャルの「底」の $E = E_0$ でなければならない．つまり，人工衛星は $E_0 = \tilde{U}(r_0)$ となる軌道半径 r_0 に投入する必要がある (そうでないと軌道が双曲線や楕円になってしまうか地球に落下してしまう)．$U(r)$ が万有引力のポテンシャルである場合の有効ポテンシャル (9-46) 式を r で微分すると

演習問題（答）

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{U}(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{GM_e m}{r^2} - \frac{mh^2}{r^3} \tag{42}$$

$$= \frac{GM_e m}{r^3}\left(r - \frac{h^2}{GM_e}\right) \tag{43}$$

となるので，$r_0 = h^2/GM_e$ である．よって，有効ポテンシャルの「底」の値 E_0 は，

$$E_0 = \tilde{U}(r_0) = -\frac{GM_e m}{r_0} + \frac{mh^2}{2(h^2/GM_e)^2} = -\frac{GM_e m}{r_0} + \frac{GM_e m}{2r_0} \tag{44}$$

$$= -\frac{GM_e m}{2r_0} = \frac{1}{2}U(r_0) \tag{45}$$

演習問題（答）

となり，有効ポテンシャルの「底」E_0 がポテンシャル $U(r_0)$ と $E=0$ の中間に位置することがわかる．このことから遠心力のポテンシャル (9-48) が

$$\frac{mh^2}{2r_0^2} = -\frac{1}{2}U(r_0) \tag{46}$$

であることがわかる．一方，(9-30) 式から遠心力のポテンシャルは

$$\frac{mh^2}{2r_0^2} = \frac{1}{2}mv^2 = K \tag{47}$$

であるから，人工衛星の運動エネルギー K に等しい．(46) 式と (47) 式より，$2K=-U$．

演習問題（答）

5. 第２宇宙速度を v として，

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_e m}{R_e} \tag{48}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{2GM_e/R_e} = \sqrt{2gR_e} \tag{49}$$

$$\simeq 11.2[\mathrm{km/s}] \tag{50}$$