物理学基礎１　第９回

２次元平面上の中心力と運動方程式

時田恵一郎

名古屋大学情報学部

June 7, 2023

2024 年度は，大きさ $f(r)$ の解釈について改訂する

太陽と惑星

1. 2 次元，外力あり，中心力
2. 太陽の質量 $\gg$ 惑星の質量 $\Rightarrow$ 太陽は動かないと考えてよい．
3. 惑星間の万有引力 $\ll$ 太陽の引力 $\Rightarrow$ 他の惑星の影響は無視．
   cf.) 実際の惑星は木星の引力の影響も受けている．
4. 惑星にはたらく力は太陽の引力のみと考えてよい $\Rightarrow$ 中心力

ひとつの中心力のもとでの運動（第６回授業）

4-1. 力の中心を含むひとつの平面内

4-2. 角運動量保存則

4-3. 面積速度一定（ケプラーの第２法則）

cf.) ティコ・ブラーエのデータを分析してケプラーが発見した．
これにより，ケプラーは力の中心が太陽であることを確信した．

2 次元極座標での運動方程式

質量 m の質点 P が原点 O から中心力を受けて運動している．

- φ 一定で $r(\equiv|\vec{r}|)$ の増す方向：動径方向
- $\vec{r}$ に直角に φ の増す向き：方位角方向
- 極座標

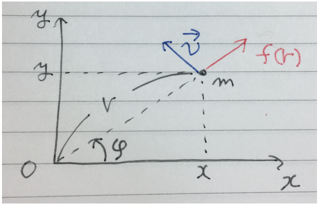
$$x = r\cos\varphi \tag{1}$$

$$y = r\sin\varphi \tag{2}$$

- 速度

$$v_x = \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi} \tag{3}$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi} \tag{4}$$



中心力の２次元極座標表示

2次元極座標での運動方程式

- 加速度

$$
\begin{aligned}
a_x &= \dot{v}_x && (5)\\
&= \ddot{r}\cos\varphi - \dot{r}\sin\varphi\,\dot{\varphi} - \dot{r}\sin\varphi\,\dot{\varphi} - r\cos\varphi(\dot{\varphi})^2 - r\sin\varphi\ddot{\varphi} && (6)\\
&= \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r(\dot{\varphi})^2\cos\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi && (7)\\
a_y &= \dot{v}_y && (8)\\
&= \ddot{r}\sin\varphi + \dot{r}\cos\varphi\,\dot{\varphi} + \dot{r}\cos\varphi\,\dot{\varphi} - r\sin\varphi(\dot{\varphi})^2 + r\cos\varphi\,\ddot{\varphi} && (9)\\
&= \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi - r(\dot{\varphi})^2\sin\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi && (10)
\end{aligned}
$$

2 次元極座標での運動方程式

動径方向にはたらく中心力を $\vec{f}(r) = (f_x, f_y)$（大きさ $f(r)$）とすると

運動方程式

$$m\dot{v}_x = f_x = f(r)\cos\varphi \tag{11}$$

$$m\dot{v}_y = f_y = f(r)\sin\varphi \tag{12}$$

(11)$\times \cos\varphi$+(12)$\times \sin\varphi$

$$m(\dot{v}_x\cos\varphi + \dot{v}_y\sin\varphi) = f(r)\cos^2\varphi + f(r)\sin^2\varphi = f(r) \tag{13}$$

(11)$\times \sin\varphi$−(12)$\times \cos\varphi$

$$m(\dot{v}_x\sin\varphi - \dot{v}_y\cos\varphi) = f(r)\cos\varphi\sin\varphi - f(r)\cos\varphi\sin\varphi = 0 \tag{14}$$

2次元極座標での運動方程式

(13) 式の左辺に (7)，(10) 式を代入

$$m\left\{(\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r(\dot{\varphi})^2\cos\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi)\cos\varphi \right. \\ \left. +(\ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi - r(\dot{\varphi})^2\sin\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi)\sin\varphi\right\} = f(r) \tag{15}$$

(14) 式の左辺に (7)，(10) 式を代入

$$m\left\{(\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r(\dot{\varphi})^2\cos\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi)\sin\varphi \right. \\ \left. -(\ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi - r(\dot{\varphi})^2\sin\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi)\cos\varphi\right\} = 0 \tag{16}$$

2 次元極座標での運動方程式

運動方程式

$$m(\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2) = f(r) \qquad \text{(動径方向の運動方程式)} \tag{17}$$

$$m(-2\dot{r}\dot{\varphi} - r\ddot{\varphi}) = 0 \qquad \text{(方位角方向の運動方程式)} \tag{18}$$

(18) の両辺に $-r/m$ をかけて，

$$2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \tag{19}$$

$$r^2\dot{\varphi} = h\,\text{(一定)} \tag{20}$$

- $r^2\dot{\varphi}$ は時間によらない保存量.
- 軌道の種類（楕円，放物線，双曲線）によらず成立する.
- 中心力の著しい特徴のひとつ.

面積速度一定 (ケプラーの第２法則)

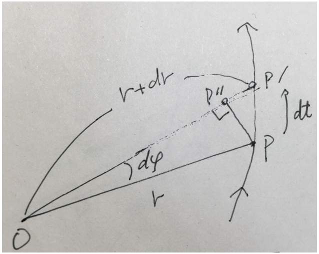
$$\overline{\mathrm{PP''}} = r\sin(\mathrm{d}\varphi) \simeq r\mathrm{d}\varphi \quad (\mathrm{d}\varphi \ll 1) \tag{21}$$

$$\triangle\mathrm{POP'} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{OP'}}\,\overline{\mathrm{PP''}} \tag{22}$$

$$\simeq \frac{1}{2}(r+\mathrm{d}r)r\mathrm{d}\varphi \tag{23}$$

$$= \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{24}$$

$$\simeq \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\varphi \tag{25}$$



面積速度

$$(\text{面積速度}) = \frac{\triangle\text{POP' の面積}}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{26}$$

$$= \frac{1}{2}h \quad (\text{一定})(\text{ケプラーの第２法則}) \tag{27}$$

動径方向の運動方程式

動径方向の運動方程式 (17) に面積速度一定の式 (20) を代入すると

$$m(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}) = f(r) \tag{28}$$

$f(r)$ が与えられれば微分方程式を解くことにより r を時間 t の関数として求めることができる（あとでやります）.

動径方向の運動方程式

$$m\ddot{r} = f(r) + \frac{mh^2}{r^3} \tag{29}$$

等速円運動のとき

軌道が半径 $r = r_0$ の円のときには，等速円運動の速さを v_0 として，$r\dot{\varphi} = v_0$（第３回授業資料「座標と座標系」の「角速度と速さの関係」参照）を $r^2\dot{\varphi} = h$ に代入して $r_0 v_0 = h$ となるので，

$$\boxed{\frac{mh^2}{r_0^3} = \frac{mv_0^2}{r_0} \quad \text{(遠心力)}} \tag{30}$$

運動エネルギー

- 極座標 (r, φ) を使って運動エネルギーを表す.
- 速さ v の２乗：$v^2 = v_x^2 + v_y^2$
- 運動エネルギー

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) \qquad (\leftarrow (3),(4)) && (31)\\
&= \frac{1}{2}m\left((\dot{r})^2 + (\dot{\varphi})^2 r^2\right) && (32)\\
&= \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\varphi^2) \quad (v_r \equiv \dot{r},\ v_\varphi \equiv r\dot{\varphi}) && (33)
\end{aligned}
$$

中心力の位置エネルギー

中心力が

$$f(r) = -\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} \tag{34}$$

で表されるとき，$U(r)$ は中心力のポテンシャル（位置エネルギー）．

力の中心が原点のとき

$$f_x = f(r)\cos\varphi \tag{35}$$
$$f_y = f(r)\sin\varphi \tag{36}$$

質点の位置ベクトルを $\vec{r} = (x, y)$ とすると

$$\vec{f} = f(r)\frac{\vec{r}}{r} \tag{37}$$

と書けるので，運動方程式 (11), (12)

$$m\dot{v}_x = f_x = f(r)\cos\varphi$$
$$m\dot{v}_y = f_y = f(r)\sin\varphi$$

はまとめて

$$m\ddot{\vec{r}} = f(r)\frac{\vec{r}}{r} \tag{38}$$

と書くことができる．

エネルギー積分

動径方向の運動方程式 (17) の両辺に $\dot{r}$ をかけて t で積分すると

$$m\int \dot{r}\ddot{r}\mathrm{d}t - m\int \dot{r}r(\dot{\varphi})^2\mathrm{d}t = \int f(r)\dot{r}\mathrm{d}t \tag{39}$$

ここで，方位角方向の運動方程式から得られる (19) の左の式の両辺に $\dot{\varphi}$ をかけた $r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -2r\dot{r}(\dot{\varphi})^2$ をもちいて

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2(\dot{\varphi})^2) = r\dot{r}(\dot{\varphi})^2 + r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \tag{40}$$

$$= -r\dot{r}(\dot{\varphi})^2 \tag{41}$$

なので，

エネルギー積分

$$m\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}(\dot{r})^2\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}m\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2(\dot{\varphi})^2)\mathrm{d}t = \int f(r)\mathrm{d}r \quad (42)$$

エネルギー保存則

$$K + U = \frac{1}{2}m((\dot{r})^2 + (\dot{\varphi})^2 r^2) + U(r) = E \quad (\text{一定}) \quad (43)$$

軌道の微分方程式

(20) 式の $\dot{\varphi} = h/r^2$ を (43) 式に代入して $\dot{r}$ について解くと

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2(E - (U(r) + mh^2/(2r^2)))}{m}} \tag{44}$$

となり，変数分離形であることから

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{\pm\sqrt{\frac{2(E-(U(r)+mh^2/(2r^2)))}{m}}} = \int \mathrm{d}t = t + C \tag{45}$$

となり，r と t の関係式が求まる．これを r について解いて (20) 式に入れれば φ も t の関数として求まり，軌道が求まる．
cf.) 第 4 回授業資料「運動の法則と運動方程式」の (29) 式参照．

有効ポテンシャル

$$\tilde{U}(r) \equiv U(r) + mh^2/(2r^2) \quad \text{：有効ポテンシャル} \tag{46}$$

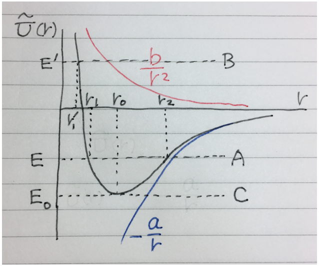
$$U(r) \quad \text{：本来のポテンシャル} \tag{47}$$

$$mh^2/(2r^2) \quad \text{：遠心力ポテンシャル（cf. (30)）} \tag{48}$$

$$U(r) = -\frac{a}{r} \quad \text{：万有引力型} \tag{49}$$

$$b/r^2 \quad \text{：遠心力ポテンシャル} \tag{50}$$

- $E \geq \tilde{U}(r)$：運動が許される範囲
- $E = E_0$：$\dot{r} = 0, r = r_0$：等速円運動
- $E_0 < E < 0$：$r_1 < r < r_2$ の範囲を運動（楕円）
- $E = 0$：無限遠から $\tilde{U}(r) = 0$ を満たす r まで接近して遠ざかる（放物線）
- $E = E' > 0$：無限遠から r_1' まで接近して遠ざかる（双曲線）



有効ポテンシャル (黒線)

演習問題

1. 遠心力ポテンシャルが角運動量の大きさ ℓ を使って以下のように表されることを示せ．ヒント：第６回授業資料「(２)ニュートンの運動の法則（続）」p13．

$$\frac{mh^2}{2r^2} = \frac{\ell^2}{2mr^2} \tag{51}$$

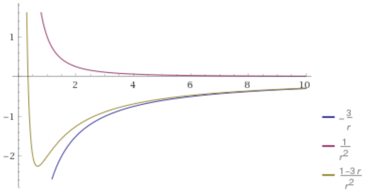
2. ひとつの中心力による質点の回転運動において，中心のまわりの回転の向きが逆転することはないことを示せ．
3. a, b の値を適当に定めて万有引力のポテンシャル (49)，遠心力ポテンシャル (50)，有効ポテンシャル (46) のグラフを WolframAlpha に描かせてみよ．

演習問題

4. 本来のポテンシャル $U(r)$ が万有引力型であれば，$r \to 0$ で有効ポテンシャルは $\tilde{U}(r) \to \infty$ と発散するため，質点は中心（太陽）に限りなく接近することはない．$U(r)$ が r のどのような関数なら質点が中心に限りなく近づくことがあるか，WolframAlpha にいろいろな $U(r)$ と $\tilde{U}(r)$ を描かせて考察せよ．

演習問題（答）

1. 第６回授業資料「（２）ニュートンの運動の法則（続）」p13 より面積速度 $s = \ell/(2m)$ であり，(27) 式 $s = h/2$ を用いる．
2. (20) 式から $\dot{\varphi}$ の符号は一定なので，回転の向きが逆転することはない．ただし，r が無限大になることがあれば φ の変化は止まり，質点の軌道は $\varphi =$ 一定の直線に漸近する．
3. 右図は $a = 3, b = 1$ として，WolframAlpha に
   `Plot[{-3/r,1/r^2,-3/r+1/r^2},{r,0,10}]`
   と入力した結果．



演習問題（答）

4. $U(r)$ が $r \to 0$ で遠心力ポテンシャルよりも速く負の方向に発散する関数ならば質点が限りなく中心に近づく場合がありえる．右図は $U(r) = -1/r^3$ として，WolframAlpha に
`Plot[-1/r^3,-1/r^3+1/r^2,{r,0,10}]`
と入力した結果．$E \gtrsim 0.15$ のとき遠方から接近してきた質点は中心に限りなく接近する．