演習問題：単振動の一般解と減衰振動　問 5 の補足

ここでは，複素関数の微分は，虚数単位 i を定数だと思って普通に微分してよい．実際，初回授業資料「微積分」で，複素関数の場合も実数関数と同様にテイラー展開できると書いたが，三角関数を「演習問題: 単振動の一般解と減衰振動」の (2) 式のように虚数の指数関数で書いて，指数関数のテイラー展開をしても，資料「微積分」の (27)〜(29) の三角関数の展開の式を求めることができる．

単振動の微分方程式の一般解 (4) と，それを時間 t で微分した速度の式

$$x(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{A1}$$

$$\dot{x}(t) = A\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - B\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{A2}$$

に，初期条件，たとえば $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0 (> 0)$（ばねののびがゼロの状態から質点に初速度 v_0 を与える）を代入すると，

$$0 = A + B \tag{A3}$$

$$v_0 = A\mathrm{i}\omega - B\mathrm{i}\omega \tag{A4}$$

となる．これらを A, B について解くと

$$A = \frac{v_0}{2\mathrm{i}\omega}, \qquad B = -\frac{v_0}{2\mathrm{i}\omega} \tag{A5}$$

となり，A, B が定まる．これらを (A1) に代入して，

$$x(t) = \frac{v_0}{2\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \frac{v_0}{2\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{A6}$$

$$= \frac{v_0}{\omega}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}} \tag{A7}$$

$$= \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{A8}$$

となり，実数関数による解が得られる．(A7) から (A8) へは「演習問題: 単振動の一般解と減衰振動」の (2) 式の関係式をもちいた．(A8) は明らかに初期条件 $x(0) = 0$ を満たす．(A8) を時間 t で微分した速度

$$\dot{x}(t) = v_0\cos\omega t \tag{A9}$$

が初期条件 $\dot{x}(0) = v_0$ を満たすことも明らか．これをもう一回微分して得られる加速度の式と (A8) がもとの単振動の微分方程式を満たすことも簡単に示すことができる．