演習問題：単振り子と振り子の等時性　ver.20230524

ここでは振り子の問題を考える．プリンキピア第２編Section 6は「振り子」の章である．ニュートンは，さまざまな素材（金属，ガラス，木，水，小麦など）のおもりを付けた振り子を使って，1/1000 の精度で，振り子の周期がおもりの質量にはよらないことを実証した．さらに，おもりにはたらく重力がおもりの質量にのみ比例し，その素材にはよらないことを示した．

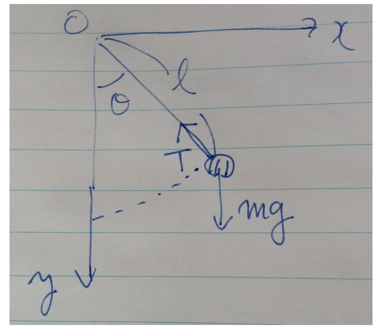

Figure 1: 単振り子

図１のように，長さ ℓ の軽い棒（あるいはたるまないひも）の先端に質量 m のおもりをつけ，他端を O に固定して鉛直面内で振動させる振り子を**単振り子** (simple pendulum) という．おもりは支点 O から一定の距離の円周上を運動するので，単振り子の運動は本質的には１次元の運動である．以下では重力加速度 g は一定とする．

問 1 図１のように xy 平面上を運動するおもり（質量 m）の運動方程式の x 成分と y 成分を，時間に依存する棒の角度 $\theta(t)$，棒の張力 T などをもちいてそれぞれ書け．

問 2 時刻 t におけるおもりの座標 $x(t)$ と $y(t)$ を棒の長さ ℓ と $\theta(t)$ を使って円座標で表わせ．

問 3 問２の答の両辺を２回時間 t で微分して，おもりの加速度の x 成分 $\ddot{x}(t)$ と y 成分 $\ddot{y}(t)$ を，それぞれ ℓ, θ などをもちいて表わせ．

問 4 問３の結果を問１の結果に代入して，張力 T を消去して，円座標で表したおもりの運動方程式，すなわち，単振り子の角度 θ の微分方程式を導け．

問 5 問４で得られた運動方程式の両辺に $\dot{\theta}$ をかけてエネルギー積分して，エネルギー保存則を導け．ただし，$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)((1/2)(\dot{\theta})^2) = \dot{\theta}\,\ddot{\theta}$ や，$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(-\cos\theta) = \sin\theta \cdot \dot{\theta}$ などの関係式を使ってよい．

問 6 おもりのふれる角度が十分小さいとき，すなわちあらゆる時刻で $\theta(t) \ll 1$ のとき，問４で得られた運動方程式が**単振動**の微分方程式の形になることを示せ．

問 7 問６で得られた単振動の運動方程式の解は，$\theta(t) = a\sin(\omega t + \phi)$（$a > 0$ は**振幅**：おもりが一番高く振れたときの $\theta(t)$ の最大値．ϕ は初期位相）の形をしている．運動方程式に代入して運動方程式を満たすことを確認せよ．

問 8 $\phi = 0$ の場合の解 $\theta(t) = a\sin(\omega t)$ の時間的な変動を考えると，まず角度 $\theta(t)$ は時刻 $t = 0$ で $\theta(0) = 0$ である（おもりの位置は最下点）．$\omega t_1 = \pi/2$ を満たす時刻 t_1 でおもりは x 座標が正の最高点に達し，折り返す．$\omega t_2 = \pi$ を満たす時刻 t_2 でおもりは最下点を通過する．おもりが x 座標が負の最高点に達する時刻 t_3 と次に最下点に戻る時刻，すなわち周期 T を求め，単振動の周期がおもりの質量によらないこと，すなわちニュートンの実験の結果を再現することを示せ．この振動の様子を図示せよ．

[解答例]

問 1

$$m\ddot{x}(t) = -T\sin\theta(t) \tag{1}$$
$$m\ddot{y}(t) = -T\cos\theta(t) + mg \tag{2}$$

問 2

$$x(t) = \ell\sin\theta(t) \tag{3}$$
$$y(t) = \ell\cos\theta(t) \tag{4}$$

問 3 (3)(4) 式の両辺を t で微分すると（以下適宜 (t) を省略する）.

$$\dot{x} = \ell\cos\theta\cdot\dot{\theta} \tag{5}$$
$$\dot{y} = -\ell\sin\theta\cdot\dot{\theta} \tag{6}$$

(ここでは $\cdot$ は内積ではなく通常の積を明示するためにもちいる)．もういちど両辺を t で微分すると

$$\ddot{x} = -\ell\sin\theta\cdot(\dot{\theta})^2 + \ell\cos\theta\cdot\ddot{\theta} \tag{7}$$
$$\ddot{y} = -\ell\cos\theta\cdot(\dot{\theta})^2 - \ell\sin\theta\cdot\ddot{\theta} \tag{8}$$

問 4 問３の結果を問１の式に代入すると，

$$m(-\ell\sin\theta\cdot(\dot{\theta})^2 + \ell\cos\theta\cdot\ddot{\theta}) = -T\sin\theta \tag{9}$$
$$m(-\ell\cos\theta\cdot(\dot{\theta})^2 - \ell\sin\theta\cdot\ddot{\theta}) = -T\cos\theta + mg \tag{10}$$

(9) 式の両辺に $\cos\theta$ をかけ，(10) 式の両辺に $\sin\theta$ をかけて，辺々引き算すると，

$$m\ell\cos^2\theta\cdot\ddot{\theta} + m\ell\sin^2\theta\cdot\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \tag{11}$$
$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \tag{12}$$
$$\therefore \qquad \ddot{\theta} = -\omega^2\sin\theta \qquad (\omega\equiv\sqrt{g/\ell}) \tag{13}$$

運動方程式（に相当するおもりの運動をつかさどる微分方程式）の段階でおもりの質量 m が式から消えたことに注意．つまり，振り子の運動はおもりの質量に依存しない．また，最初に書いたように，微分方程式の変数が $\theta(t)$ のみとなり，１次元の運動であることがわかる．微分方程式 (13) は**非線形**の常微分方程式であり，初等関数で解を表すことができず，この場合には**楕円関数**が必要である．楕円関数については２年次の「計算情報学１」で扱う．

問 5 (12) 式の両辺に $\dot{\theta}$ をかけて，設問中の関係式をもちいて積分すると，

$$m\ell\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mg\sin\theta\cdot\dot{\theta} \tag{14}$$
$$\therefore \quad m\ell\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}(\dot{\theta})^2\right) = mg\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\theta) \tag{15}$$
$$\therefore \quad \frac{m\ell}{2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\theta})^2\mathrm{d}t = mg\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\theta)\mathrm{d}t \tag{16}$$
$$\therefore \quad \frac{m\ell}{2}\left[(\dot{\theta}(t))^2\right]_0^t = mg\left[\cos\theta(t)\right]_0^t \tag{17}$$
$$\therefore \quad \frac{1}{2}m\ell(\dot{\theta}(t))^2 - \frac{1}{2}m\ell(\dot{\theta}(0))^2 = -mg(\cos(\theta(0)) - \cos\theta(t)) \tag{18}$$

となる．時刻 $t = 0$ で $\theta(0) = 0$（初期条件）として，おもりの速さ $v(t) = \ell\dot{\theta}(t)$（第３回講義資料「座標と座標系」の中の「角速度と速さの関係」の項を参照）を使って書き直すと，エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m(v(t))^2 + mgh(t) = \frac{1}{2}m(v(0))^2 \tag{19}$$

が得られる．ただし，$h(t) \equiv \ell(1 - \cos\theta(t))$ は，おもりの最下点 $y = \ell$ と時刻 t におけるおもりの y 座標との差であり（図１を参照），(19) 式左辺第２項はおもりの最下点を基準点とするおもりの位置エネルギーである．

問６ $\theta \ll 1$ のとき，$\sin\theta$ をそのマクローリン展開の１次の項までで近似して $\sin\theta \simeq \theta$ とすることができるので，これを問４の結果に代入すると単振動の微分方程式

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2\theta(t) \tag{20}$$

となる．

問７ $\theta(t) = a\sin(\omega t + \phi)$ を２回微分すると，$\ddot{\theta}(t) = -a\omega^2\sin(\omega t + \phi)$ となるが，これを (20) 式の左辺に代入すると，$\theta(t) = a\sin(\omega t + \phi)$ を代入した右辺と等しく，運動方程式を満たすことがわかる．

問８ $\omega t_3 = 3\pi/2$ より $t_3 = 3\pi/(2\omega)$，$\omega T = 2\pi$ より $T = 2\pi/\omega$．振幅が小さいとき（振り子のふれが小さいとき）は，周期は振幅にもよらないことがわかる．周期が振幅によらないことを**振り子の等時性**という．

なお，このノートには，間違い，事実誤認，不正確な表現，タイポが含まれている可能性がある．それらを指摘してくれた人にはボーナス点を与えるので，積極的に「バグ取り」に協力してください．

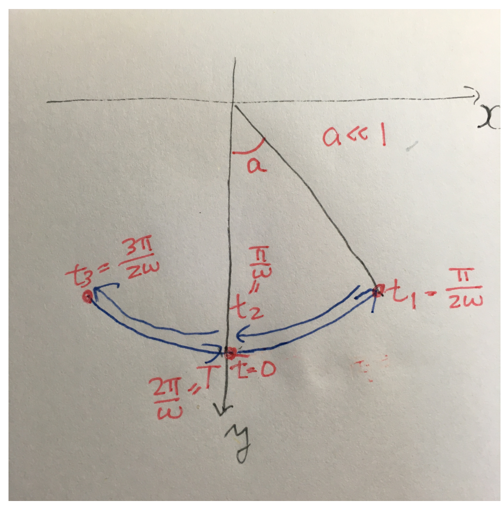

Figure 2: 単振り子の単振動