2023 年度物理学基礎１（時田）

球殻による万有引力のポテンシャル　ver.20230524

図１のような，半径 a，厚さ δ の球殻が，その外にある質点におよぼす万有引力のポテンシャルについて考える．これが，球殻の質量がすべて中心 O に集中しているときのポテンシャルと同じになることを示す（プリンキピア命題 71 と同等）．そのことを示すことができれば，それらの球殻をすべて足し合わせることにより，球がその外にある質点におよぼす万有引力のポテンシャルが，球の質量がすべて中心 O に集中しているときのポテンシャルと同等であること（同命題 74 と同等）は自明である．

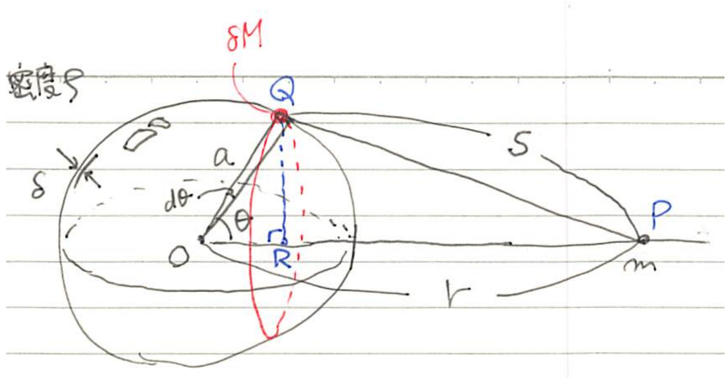

Figure 1: 球殻外部の質点にはたらく万有引力のポテンシャル

以下では，まず点 Q にある「質量素片（質量 δM）」が点 P にある質量 m の質点におよぼす万有引力のポテンシャルを考える．さらに，それを赤線で示した円環に沿って足し合わせることにより，円環によるポテンシャルを計算する（円環上の質量素片は点 P までの距離がすべて等しく s であることを用いる）．さらに，それを $\theta = 0$ から π まで積分することで，球殻によるポテンシャルを求める．

球殻の中心から質点までの距離を $\overline{OP} = r$，$\angle QOP = \theta$ とする．$\overline{QR} = a\sin\theta$, $\overline{OR} = a\cos\theta$ であることを使って，直角三角形 QRP に関する三平方の定理から，質量素片のある点 Q から点 P までの距離 s は，

$$s^2 = \overline{QR}^2 + \overline{RP}^2 = \overline{QR}^2 + (r - \overline{OR})^2 = a^2\sin^2\theta + (r - a\cos\theta)^2 \tag{1}$$

$$= a^2\sin^2\theta + r^2 - 2ra\cos\theta + a^2\cos^2\theta \tag{2}$$

$$= a^2 + r^2 - 2ra\cos\theta \tag{3}$$

と r, a, θ を使って表される．このとき，点 Q にある質量素片（質量 δM）が点 P にある質量 m の質点におよぼす万有引力のポテンシャルは，基準点を無限遠にとり，

$$U(r; a, \theta) = -G\frac{m(\delta M)}{s} \tag{4}$$

である．ここで，

$$(\text{円環の質量}) = (\text{円環の体積}) \times (\text{円環の密度}) \tag{5}$$

$$(\text{円環の体積}) = (\text{円環の周の長さ}) \times (\text{円環の厚さ}) \times (\text{円環の幅}) \tag{6}$$

$$(\text{円環の周の長さ}) = 2\pi\overline{QR} = 2\pi a\sin\theta \tag{7}$$

$$(\text{円環の厚さ}) = \delta \tag{8}$$

$$(\text{円環の幅}) = a\sin(\mathrm{d}\theta) \simeq a\mathrm{d}\theta \tag{9}$$

$$(\text{円環の密度}) = \rho \tag{10}$$

であるから，

$$(\text{円環の質量}) = 2\pi a^2\delta\rho\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{11}$$

となり，円環によるポテンシャルは

$$U(r;a,\theta) = -\frac{Gm2\pi a^2\delta\rho\sin\theta}{s}\mathrm{d}\theta \tag{12}$$

である．これを θ について 0 から π まで積分すれば球殻によるポテンシャルが求まる．すなわち，

$$U_a(r) = -Gm\int_0^{\pi}\frac{2\pi a^2\delta\rho\sin\theta}{s}\mathrm{d}\theta \tag{13}$$

ここで，(3) 式より $0 \leq \theta \leq \pi$ に対して s は θ の単調増加関数であるので，積分変数を θ から s に変換する．(3) 式の両辺を s で微分すると，

$$2s = 2ra\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \tag{14}$$

であるから, 形式的に $\mathrm{d}\theta \to \frac{s}{ra\sin\theta}\mathrm{d}s$ と置き換える．いま, $r > a$ だから, 積分範囲は $s = r-a \to r+a$ である．よって，(13) 式は

$$\begin{aligned} U_a(r) &= -Gm\int_{r-a}^{r+a}\frac{2\pi a^2\delta\rho\sin\theta}{s}\frac{s}{ra\sin\theta}\mathrm{d}s && (15)\\ &= -Gm\frac{2\pi a\delta\rho}{r}\int_{r-a}^{r+a}\mathrm{d}s = -Gm\frac{2\pi a\delta\rho}{r}\left[s\right]_{r-a}^{r+a} = -Gm\frac{4\pi a^2\delta\rho}{r} && (16)\\ &= -G\frac{mM(a)}{r} && (17)\end{aligned}$$

となる．$M(a)$ は半径 a の球殻の質量である．(17) 式は，球殻の質量すべてが中心 O に集中しているとしたときに点 P にある質量 m の質点におよぼす万有引力のポテンシャルに等しい．これを微分することで万有引力が求まり，プリンキピアの命題 71 が証明されたことになる．よって，

$$\begin{aligned} &(\text{半径 } R,\ \text{質量 } M \text{ の球によるポテンシャル}) && (18)\\ &= (a = 0 \to R \text{ のすべての球殻によるポテンシャルの和}) && (19)\\ &= \int_0^R U_a(r)\frac{\mathrm{d}a}{\delta} = -\frac{Gm}{r}\int_0^R 4\pi a^2\rho\mathrm{d}a = -\frac{Gm}{r}\left[\frac{4}{3}\pi a^3\rho\right]_0^R = -\frac{Gm}{r}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right) && (20)\\ &= -G\frac{Mm}{r} && (21)\\ &= (\text{半径 } R \text{ の球の質量 } M \text{ がすべて中心 O に集中したときのポテンシャル}) && (22)\end{aligned}$$

となる．(20) 式のところで，球殻の厚み δ を積分の微小量 $\mathrm{d}a$ で置き換えた．よって，質量 M の球がその中心から r だけ離れた位置にある質量 m の質点におよぼす万有引力は

$$f(r) = -\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} = -G\frac{Mm}{r^2} \tag{23}$$

となり，プリンキピアの命題７４が証明された．

この命題は，古典電磁気学において球面に一様に分布する電荷が球面の外にある電荷におよぼす力が，球面の中心からの距離の２乗に反比例するという命題と本質的に同等であり，古典電磁気学においては電場に関するガウスの法則を使って証明される（詳細は後期の物理学基礎

２の授業を参照)．そのような法則が見いだされていなかった時代に，ニュートンはこの命題を驚くべき方法をもちいて幾何学的に証明している．

図２のように, 球殻内部の点 P にある質点にはたらく万有引力がゼロ (同命題７０) であることも簡単に示すことができる．この場合は, $r < a$ であるから, (15) 式の積分範囲が $s = a-r \to a+r$ に変わることに注意して,

$$U_a(r) = -Gm\frac{2\pi a\delta\rho}{r}\int_{a-r}^{a+r}\mathrm{d}s \tag{24}$$

$$= -Gm\frac{2\pi a\delta\rho}{r}(2r) \tag{25}$$

$$= -Gm(4\pi a\delta\rho) \tag{26}$$

となる．これは r によらないので，r で微分するとゼロになる．つまり球殻内部の質点には万有引力ははたらかない．この命題については，ニュートンは比較的シンプルな幾何学的な議論によって証明している．

上記の命題７４と７０を組み合わせることにより，球体内部の質点にはたらく万有引力が球の中心から質点までの距離 r に比例すること（命題７３，第５回授業資料「保存力」１５ページの (29) 式）は明らかであろう（(17) 式で $a = r$ とすれば，$U_a(r)$ は r に比例する)．

なお，このノートには，間違い，事実誤認，不正確な表現，タイポが含まれている可能性がある．それらを指摘してくれた人にはボーナス点を与えるので，積極的に「バグ取り」に協力してください．

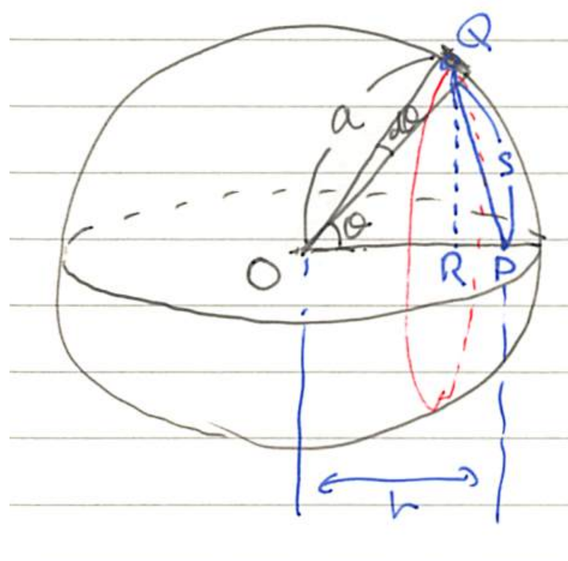

Figure 2: 球殻内部の質点にはたらく万有引力のポテンシャル