演習問題：単振動と質量の相対測定　ver.20230517

1．単振動

x 軸上で，原点からの距離に比例する力 $-kx\,(k>0)$ を受けている質量 m の質点の運動を考える．これは一端が固定されたバネ定数 k のバネの反対の端点に取り付けられた質点の運動と同等である．（弾性限界以下の）バネののび x に比例する力は，ニュートンと同時代の物理学者フックが発見したので，フックの法則（弾性の法則）と呼ばれることは，高校物理の教科書にも書かれていたはずである．以下では単振動の運動方程式を解析しよう．

問 1 質点の運動方程式（単振動の運動方程式）を書け．

問 2 $\omega=\sqrt{k/m}$ とおいて，運動方程式を $\ddot{x}=...$ の形に書き直せ．

問 3 a,ϕ を任意定数として，$x(t)=a\cos(\omega t+\phi)$ が運動方程式の解であること，つまり運動方程式を満たすことを実際に代入して確認せよ．この解は任意定数を 2 つ含むので，2 階の微分方程式である運動方程式の一般解である．振幅 a と初期位相 ϕ は，初期条件によって決まる．

問 4 $t=0$ において $x(0)=C,\dot{x}(0)=0$（ばねを C だけのばした状態から静かに質点を離す）場合に，解の式 $x(t)=a\cos(\omega t+\phi)$ とそれを微分した速度の式 $\dot{x}(t)=-a\omega\sin(\omega t+\phi)$ に初期条件を代入することにより，$\phi=0,a=C$ と定数が定まることを示せ．

2．質量の相対測定

自然長 ℓ，のびに比例する張力を示す軽いばね（ばね定数 k）の両端に，質量 m_1 と m_2 の質点 $1,2$ をとりつけ，なめらかな水平面上に置く，ばねの長さが $\ell+C$ になるまで質点をひっぱって静かに離したときの質点の運動を考えよう．

問 5 ばねの方向に x 軸をとり，両質点の位置を x_1,x_2 とする．$x_1>x_2$ のように x 軸の向きを定義すると，$x_1-x_2-\ell$ がばねののびを表す．向きまで考えて，両質点の運動方程式をそれぞれ書け．

問 6 運動方程式を辺々加えて積分することにより運動量保存則を導け．

問 7 質点 1 の運動方程式の両辺を m_1 で割ったものと質点 2 の運動方程式を m_2 で割ったものの差をとると，単振動の式に帰着することを示せ．

問 8 問 2 の結果から，問 7 で得られた単振動の一般解は，$x_1-x_2-\ell=a\cos(\omega t+\phi)$ で与えられる．t で微分した式に初期条件 $(t=0$ で $\dot{x}_1=\dot{x}_2=0,\ x_1-x_2-\ell=C)$ を入れて，a と ϕ を決定せよ．

問 9 x_1 と x_2 をべつべつに求めるには，問 6 で得られた式を積分した $m_1x_1+m_2x_2=D$ の積分定数 D を初期条件から決定する必要がある．$t=0$ で $x_2=0,x_1=\ell+C$ とすることにより，D が定まり $m_1x_1+m_2x_2=m_1(\ell+C)$ となることを示せ．さらにこの式と問 8 で求めた $x_1-x_2-\ell=C\cos(\omega t)$ の式を連立させて，両質点の $t=0$ の位置からの変位 $x_1-(\ell+C)$ と x_2 をそれぞれ求めよ．

問 10 問 9 の結果から,

$$\frac{x_1 - (\ell + C)}{x_2} = -\frac{m_2}{m_1} \tag{1}$$

のように，両質点の変位が質量に逆比例することを示せ.

[答]

問 1 $m\ddot{x}(t) = -kx(t)$

問 2 $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$

問 3 $x(t) = a\cos(\omega t + \phi)$ を 2 回時間 t で微分すると，$\ddot{x}(t) = -a\omega^2\cos(\omega t + \phi)$ なので，これらを運動方程式に代入すると，両辺が等しく，運動方程式を満たすことがわかる.

問 4 初期条件を解と速度の式に入れると，$C = a\cos\phi$, $0 = \sin\phi$ となるので，$\phi = 0, a = C$.

問 5

$$m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2 - \ell) \tag{2}$$
$$m_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2 - \ell) \tag{3}$$

問 6 (2)(3) を辺々加えて，$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$．両辺を t で積分すれば，$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = C'$（積分定数）となり，系全体の運動量が保存されることがわかる．（静かに離した）初期条件 $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ を入れると $C' = 0$ と積分定数が定まる．よって $m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = 0\,(t \geq 0)$.

問 7 (2) 式の両辺を m_1 で割ったものと (3) 式の両辺を m_2 で割ったものの差をとると

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_1 - x_2) = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(x_1 - x_2 - \ell) \tag{4}$$

となるが，$x_1 - x_2 - \ell = \xi$, $k/m_1 + k/m_2 = \omega^2$ とおけば,

$$\ddot{\xi} = -\omega^2\xi \tag{5}$$

となり単振動の式に帰着する.

問 8 一般解を t で微分すると $\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -a\omega\sin(\omega t + \phi)$ であるから，この式と解に初期条件を代入することにより，$a = C, \phi = 0$ となる．したがって,

$$x_1 - x_2 - \ell = C\cos(\omega t) \tag{6}$$
$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -C\omega\sin(\omega t) \tag{7}$$

となる．これで，ばねののびの式と質点の相対速度の式が求まった.

問 9 $t=0$ で $x_2=0, x_1=\ell+C$ として，$m_1x_1+m_2x_2=D$ に代入すると，$D=m_1(\ell+C)$ だから，$m_1x_1+m_2x_2=m_1(\ell+C)$ となる．これと (6) 式を連立させて x_1, x_2 について解けば，両質点の $t=0$ の位置からの変位が

$$x_1-(\ell+C)=-\frac{m_2C}{m_1+m_2}(1-\cos(\omega t)) \tag{8}$$

$$x_2=\frac{m_1C}{m_1+m_2}(1-\cos(\omega t)) \tag{9}$$

と求まる．

問 10 問 9 の結果を辺々割ればよい．この式から，加速度の比を求めることが困難な場合でも，変位の比を測りやすいことがあるので，このような方法で質量の相対測定が可能である．

なお，このノートには，間違い，事実誤認，不正確な表現，タイポが含まれている可能性がある．それらを指摘してくれた人にはボーナス点を与えるので，積極的に「バグ取り」に協力してください．