物理学基礎１　第５回

保存力

時田恵一郎

名古屋大学情報学部

May 10, 2023

2次元平面上の中心力

$$\vec{F} = \underbrace{\frac{\mu}{r^2}}_{\equiv F} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (//\vec{r};\, r = |\vec{r}|,\ \mu < 0) \tag{1}$$

$$F_x = F\cos\varphi = \mu\frac{x}{r^3} \tag{2}$$

$$F_y = F\sin\varphi = \mu\frac{y}{r^3} \tag{3}$$

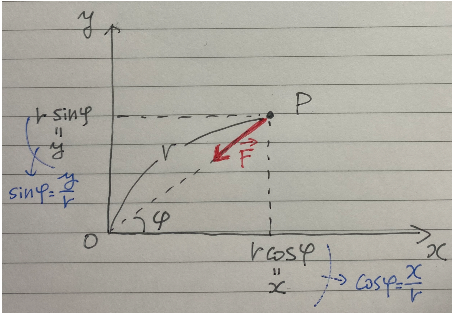


図 1: 中心力の極座標表示

2 次元平面上の中心力

ここで，$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ だから，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+y^2)^{-1/2}\right) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2}2x \tag{4}$$

$$= \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{x}{r^3} \tag{5}$$

同様に

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y}{r^3} \tag{6}$$

2次元平面上の中心力

よって，$U(r) \equiv \frac{\mu}{r}$ とおくと，(2), (3), (5),(6) 式を使って，力の成分は

保存力

$$F_x = \mu\frac{x}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{r}\right) = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{7}$$

$$F_y = \mu\frac{y}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{r}\right) = -\frac{\partial U}{\partial y} \tag{8}$$

- $U(r)$ は位置エネルギーもしくはポテンシャルエネルギー．
- cf) 第 4 回授業資料「運動の法則と運動方程式」p7, (25) 式．
- 中心力は保存力

保存力がする仕事

質点が微小時間 $\mathrm{d}t$ の間に移動する微小変位を $\mathrm{d}\vec{r}$ とすると，その間に保存力が質点にする仕事は，$\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=|\vec{F}||\mathrm{d}\vec{r}|\cos\theta$ であるから，質点が A から B まで運動する間に保存力が質点にする仕事は，

$$W\equiv\int_A^B\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\int_A^B\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \tag{9}$$

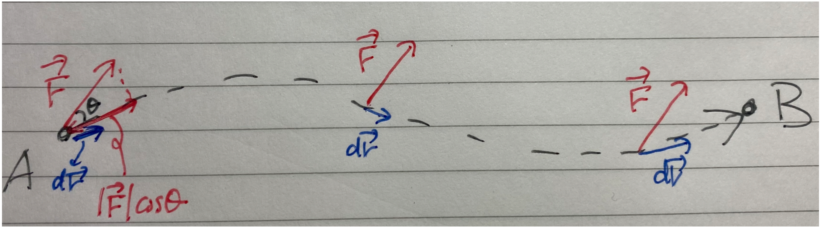


図 2: 質点の運動と保存力

保存力がする仕事

ここで，$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y$ (全微分) と書くと，$\mathrm{d}U$ は x が $\mathrm{d}x$, y が $\mathrm{d}y$ 増えたときの U の増分であり，

$$\therefore \quad \int_A^B \left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y \right) = \int_A^B \mathrm{d}U = [U]_A^B \tag{10}$$

$$= U_B - U_A \tag{11}$$

保存力がする仕事

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -(U_B - U_A) \tag{12}$$

- 保存力がする仕事は，始点 (A) と終点 (B) のポテンシャルにのみ依存する．
- 途中の経路には依らない．

3 次元空間中の保存力

3 次元空間中の保存力の定義

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{13}$$

によってひとつの関数 $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$ から力が導かれるとき，この力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ は**保存力**と呼ばれる．

3 次元空間中の保存力

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\, U(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) \tag{14}$$

保存力がする仕事 $W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -(U_B - U_A)$ も経路 A → B に依らない（保存力の定義その２）．

エネルギー保存則

- ３次元でも質点に働く力が保存力であるときには，

力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = E \tag{15}$$

cf.) 第４回資料「運動の法則と運動方程式」p7, (28) 式．

- ポテンシャルエネルギー $U(\vec{r})$ を使う理由
  - 力はベクトルなので３成分を与えなければ決まらない．
  - ポテンシャルはスカラーなので扱いやすい．
    cf.) 高校物理ではエネルギー保存則などのスカラーの式を使う．

ポテンシャルが２つある場合: $U^{(1)}, U^{(2)}$

- 保存力の x 成分

$$F_x^{(1)} = -\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x}, \qquad F_x^{(2)} = -\frac{\partial U^{(2)}}{\partial x} \tag{16}$$

- ポテンシャルの和

$$U = U^{(1)} + U^{(2)} \tag{17}$$

- 力の合成

$$F_x^{(1)} + F_x^{(2)} = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{18}$$

- y 成分も同様．ベクトルで書くと

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}^{(1)}(\vec{r}) + \vec{F}^{(2)}(\vec{r}) = -\nabla U^{(1)}(\vec{r}) - \nabla U^{(2)}(\vec{r}) \tag{19}$$

$$= -\nabla U(\vec{r}) \tag{20}$$

ポテンシャルが n 個ある場合

$$U(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{n} U^{(j)}(\vec{r}) \tag{21}$$

力の合成

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}^{(j)}(\vec{r}) = -\sum_{j=1}^{n} \nabla U^{(j)}(\vec{r}) \tag{22}$$

$$= -\nabla U(\vec{r}) \tag{23}$$

⇒　地球のように大きさをもつ広がった物体の各部分が万有引力の原因となるとき，全体がつくる力を求めるのに便利（あとでやります）.

保存力とポテンシャルの具体例

地球の重力を生み出す万有引力

- 全ての物体が互いに引き合う力
- 磁力や静電気力に比べると非常に弱いが，太陽や地球のように大きい質量の場合は顕著に現れる．
- cf.）クーロンの法則（キャベンディッシュ 1773, クーロン 1785）
  万有引力の測定（キャベンディッシュ 1797→ 1798）
  （空間を隔ててはたらく力の測定）

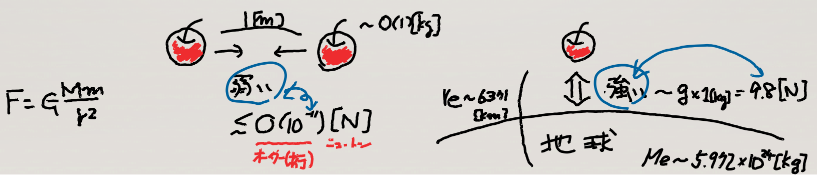


図 3: 万有引力．$G = 6.67430 \times 10^{-11}[\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}]$

地球の重力

- プリンキピア第１編第１２章命題 71, 74
  (cf. 和田純夫／プリンキピアを読む／ Blue Backs)
- 地球の密度が場所に依らず一定と仮定すると，

$$\vec{F} = G \sum_j \frac{M_j m}{r_j^2} \frac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|} \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}| = G \frac{M_e m}{r^2} \quad (r > r_e \text{ 地球半径}) \quad (24)$$

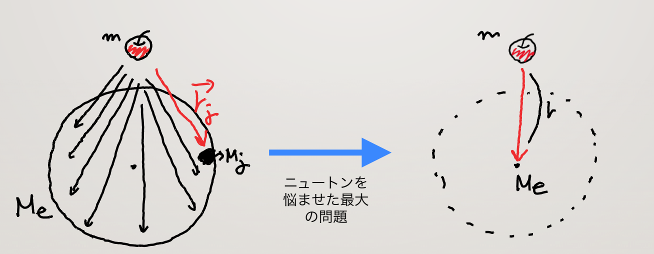


図 4: 地球の重力は，全ての質量が中心に集中した質点による万有引力に等しい

地球の重力ポテンシャル：$U_G(r)$

- 地球以外の天体（太陽，月，etc.）は無視して考える．
- 地球の質量 M_e が全て地球の中心（r 軸の原点にとる）に集中しているとする．
- 地球の中心からの距離 $r(> r_e$(地球の半径)，地球は球体であるとする）にある質量 m の物体にはたらく力の重力ポテンシャル $U_G(r)$ は r_0 を基準点として，

$$U_G(r) = -\int_{r_0}^{r} F(r')\mathrm{d}r' = GM_e m \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2} = -GM_e m \left[\frac{1}{r'}\right]_{r_0}^{r} \tag{25}$$

$$= GM_e m \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \tag{26}$$

基準点 r_0 は，∞（無限遠）とする場合と，地表（地球の半径）r_e とする場合がある．

地球内部の物体にはたらく重力

- プリンキピア第１編第１２章命題 73
- 地球の密度は場所に依らず一定（平均密度 ρ_0）として，

$$F = G\frac{M(r)m}{r^2} \tag{27}$$

$$= \frac{4\pi\rho_0 Gm}{3} r \tag{28}$$

$$\propto r \quad (r \text{ に比例}) \tag{29}$$

$$(M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3 \tag{30}$$

→　黄色い部分の質量)

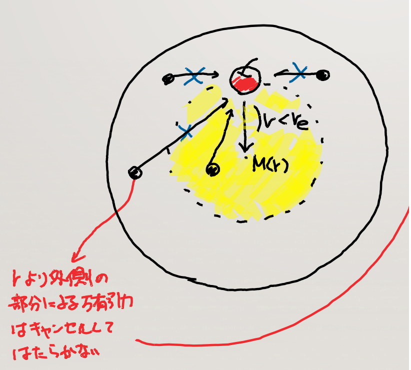


図 5: 地球内部の物体にはたらく重力

月の公転周期

- 地表 r_e で質量 m' の質点にはたらく重力
  $F = G\frac{M_e m'}{r_e^2} = m'g$
- 地球が月を引く力
  $f = G\frac{M_e m}{R^2} = g\frac{m}{(R/r_e)^2}$

  $R/r_e = \frac{384400[\mathrm{km}]}{6371[\mathrm{km}]} \simeq 60$

$$\therefore \quad f \simeq \frac{mg}{(60)^2} \tag{31}$$

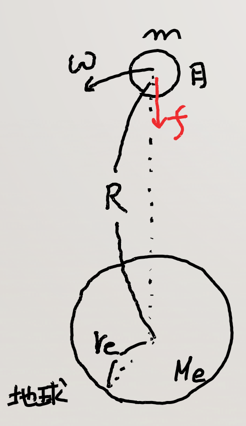
- f は月を軌道にとどめる中心力に等しい
  資料「ベクトル」演習問題問４

$\rightarrow \quad \vec{a}(t) = -\omega^2\vec{r}(t)$

$\rightarrow \quad a = |\vec{a}| = \omega^2|\vec{r}(t)| = \omega^2 r = \omega^2 R$

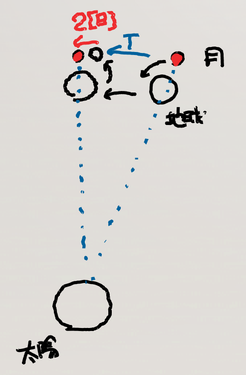
$$f = ma = m\omega^2 R \tag{32}$$

月の公転軌道は円で，月は地球を中心とする等速円運動をしているとする．



月の公転周期：T

$$
\begin{aligned}
T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{60^2 R}{g}} &= 120\pi\sqrt{\frac{R}{g}} && (33)\\
&\simeq 120\pi\sqrt{\frac{3.84\times10^8[\mathrm{m}]}{9.8[\mathrm{m/s^2}]}} && (34)\\
&\simeq 2.36\times10^6[\mathrm{s}] && (35)\\
&\simeq 27.3[\text{日}] \quad (\text{観測値 } 27.32[\text{日}]) && (36)
\end{aligned}
$$



・地球が月と一緒に太陽のまわりを公転しているため，満月の周期は月の公転周期 T より約２日長く，29.5[日] となる．

ニュートンを悩ませたこと

- はじめ月までの距離 R が正しく測定されていなかったため，月の公転周期 T も正しい値が求まらなかった．
- 地球の引力は全質量が中心に集中しているとしてもよい（(24) 式）ことの数学的証明
  → これが証明できたのでニュートンはプリンキピアの執筆を決断したといわれる．

演習問題

演習問題

問１． 平面内ではたらく力 $\vec{F}(x,y) = (F_x(x,y), F_y(x,y))$ が保存力ならば，

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{37}$$

が成り立つことを示せ．（ヒント：(7), (8) 式を使う）

問２． 平面内ではたらく力 $\vec{F}(x,y) = (axy, \frac{1}{2}ax^2)$ は保存力か？
（ヒント：F_x, F_y を積分して同じ U になるかをチェック）

問３． 任意の実定数 a, b に対して，$F_x = axy, F_y = by^2$ であるような力は保存力か？

演習問題

問４． (26) 式の地球の重力ポテンシャルを考える．基準点を地表 $r_0 = r_e$（地球の半径）にとる．このとき，地表付近 $r \equiv r_e + h\,(h > 0, h \ll r_e)$ で，

$$U_G(r) \simeq mgh \tag{38}$$

となることを示せ．ただし

$$g \equiv \frac{GM_e}{r_e^2} \tag{39}$$

は地表での重力加速度．
（ヒント：$s \equiv h/r_e \ll 1$ として，U_G を s の関数として s の１次の項までマクローリン展開する）

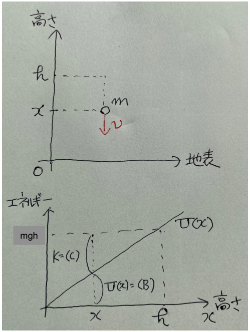
演習問題

問５． 地表を基準にとり，鉛直上方へ x 軸をとると，質量 m の質点にはたらく重力は，地表付近の重力加速度 g を用いて $f = \boxed{\text{(A)}}$ と書ける．このとき重力の位置エネルギーは地表付近 ($x \ll r_e$ ：地球の半径) では

$U(x) = \boxed{\text{(B)}}$ と書ける．高さ h で静止していた質量 m の質点が自由落下したときのエネルギー保存則の式を質点の位置 x，速さ v，m, h, g を用いて書き，速さが

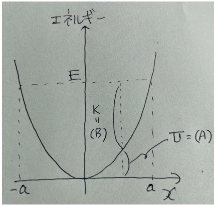
$v = \sqrt{2g(h-x)}$ と表されることを示せ．図の

$K = \boxed{\text{(c)}}$ はどのような量を表しているか？



演習問題

問 6． バネの力がその伸び x に比例するとき，その力 f は，$f = -kx$（k：バネ定数）と書ける．f は保存力であり，そのポテンシャルエネルギーは，$U(x) = \boxed{\text{(A)}}$ である．ただし，$x = 0$ を基準にとって $U(0) = 0$ とする．このバネにつながれた質量 m の質点の運動を考える．バネを $a(> 0)$ だけ伸ばして静かに離したときの，バネの伸びが x での質点の速さを v として，エネルギー保存則の式は，



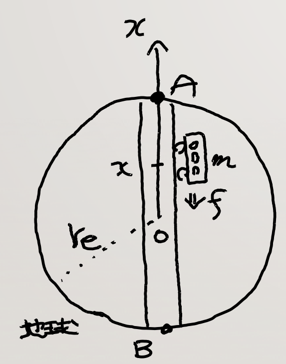
$$\boxed{\text{(B)}} + \boxed{\text{(A)}} = E\,(\text{一定}) \tag{40}$$

となる．E を k と a で表せ．

演習問題

問 7.　「重力列車」

- 重力を利用して推進する架空の列車
- １７世紀にフックがニュートンに送った手紙の中で提案された．
- 「ルイス・キャロル／シルヴィとブルーノ／1893」
- x で質量 m の列車が受ける力 f は，(28) 式から
  $f = -(4\pi\rho_0 Gm/3)x = -kmx$
- 運動方程式：$m\ddot{x} = f \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = -kx$
  - 一般解：$x(t) = r_e \cos(\sqrt{k}t)$, $(\sqrt{k} = \omega)$ (角速度)



地球の中心を通る重力列車の場合，A 駅から初速ゼロで発車した列車が B 駅に到着するまでに約４０分かかることを示せ．ただし，走行中列車には重力以外の力ははたらかないとする．地球の平均密度 ρ_0 は各自調べた値を使うこと．

略解

問１． (7) 式を (37) 式左辺に代入すると，

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \tag{41}$$

同様に (8) 式を (37) 式右辺に代入すると，

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \tag{42}$$

偏微分の順序は交換してもよい（$\partial^2 U/\partial x \partial y = \partial^2 U/\partial y \partial x$）ので，題意 ((37) 式) が満たされることがわかる．

略解

問２． 第４回授業資料「運動の法則と運動方程式」の (24) 式から，

$$U_x = -\int_0^x ax'y\mathrm{d}x' = \left[-\frac{1}{2}ax'^2y\right]_0^x = -\frac{1}{2}ax^2y \tag{43}$$

$$U_y = -\int_0^y \frac{1}{2}ax^2\mathrm{d}y' = \left[-\frac{1}{2}ax^2y'\right]_0^y = -\frac{1}{2}ax^2y \tag{44}$$

同じポテンシャル $U = U_x = U_y$ から導かれるので，$\vec{F}$ は保存力である．

略解

問３． 問２と同様にそれぞれ積分すると

$$U_x = -\int_0^x ax' y \mathrm{d}x' = \left[-\frac{1}{2} a x'^2 y \right]_0^x = -\frac{1}{2} a x^2 y \tag{45}$$

$$U_y = -\int_0^y b y'^2 \mathrm{d}y' = \left[-\frac{1}{3} b y'^3 \right]_0^y = -\frac{1}{3} b y^3 \tag{46}$$

$U_x \neq U_y$ で，同じポテンシャルから導かれないので保存力ではない．

略解

問４． $r_0 = r_e$ に対する (26) 式の $U_G(r) = GM_em(1/r_e - 1/r)$ に対して，$s \equiv h/r_e (\ll 1)$ として，U_G を s の関数として書くと，

$$U_G(s) = GM_em\frac{1}{r_e}\left(1 - \frac{r_e}{r}\right) = GM_em\frac{1}{r_e}\left(1 - \frac{h/s}{h + h/s}\right) \tag{47}$$

$$= GM_em\frac{1}{r_e}\frac{s}{1+s} \tag{48}$$

$f(s) = s/(1+s)$ について，$f(0) = 0, f'(0) = 1$ だから，$f(s)$ の s の１次の項までのマクローリン展開は，$f(s) \simeq s$ であり，

$$\therefore \quad U_G(s) \simeq GM_em\frac{1}{r_e}s = GM_em\frac{1}{r_e}\frac{h}{r_e} = \frac{GM_e}{r_e^2}mh = mgh \tag{49}$$

略解

問５． 問４の結果から，(A) $-mg$, (B) mgx エネルギー保存則は

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgx \tag{50}$$

これを v について解くと，$v = \sqrt{2g(h-x)}$. $K = (c)$ は位置 x における質点の運動エネルギー．

問６．

$$U(x) = -\int_0^x (-kx')\mathrm{d}x' = \left[\frac{1}{2}kx'^2\right]_0^x = \frac{1}{2}kx^2 \tag{51}$$

運動エネルギーは $(1/2)mv^2$ なので，エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E\,(\text{一定}) \tag{52}$$

である．初期値 $x = a$，$v = 0$ を代入して，$E = \frac{1}{2}ka^2$．

略解

問 7． 運動方程式やその一般解から，列車は単振動する．求める時間 t は，半周期 $T/2 = (2\pi/\omega)/2 = \pi/\omega$ である．よって

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{k}} = \frac{\pi}{\sqrt{4\pi\rho_0 G/3}} \tag{53}$$

これに，地球の平均密度 ρ_0 や万有引力定数 G の値を代入して求める．

注意

・到着時間 t は列車の質量（乗客の数）に依存しない．
・B 駅が地球の反対側でなく，任意の地表の地点であっても，線路が A 駅と B 駅を結ぶ直線である場合は，やはり到着時間 t は同じ約 40 分になる．これを示した人はボーナス点追加．