質点の運動 ver.20230419

１．質点系

高校物理では，ボールや星の運動について考えるときは，それらの中心の位置とその運動を考えたはずである．同様に，この授業でも，物体の大きさを無視して，質量をもった点の位置とその運動を考える．そのような仮想的な物体を「質点」と呼ぶ．高校物理でも普通にそう呼んでいたはずである．地球などの惑星も，太陽のまわりの公転だけを考えるときにはその大きさを無視して質点として扱うことができる．そのような二つ以上の質点からなる系（システム）のことを質点系と呼ぶ．太陽と地球も質点系とみなしうるというのがニュートンの驚くべき洞察のひとつである．地球の中心に地球の全ての質量が集中していると仮定しても地表から上の物体にはたらく万有引力の大きさが同じであることを数学的に示すのにニュートンは悩んだとされるのではあるが（これについては後で扱います）．

一方，たとえ小さな物体でも，コマのような有限の大きさの形のある物体の回転を含む運動を考えるときにはそれを質点とみなすことはできない．そのような，力を加えても変形せず，運動するときも変形しない仮想的な物体を「剛体」と呼ぶ．一般に理学部物理学科の古典力学の授業では剛体の運動も扱うが，この授業では時間を割くことができない．さらに，物体の変形を考える理論としては，弾性体や塑性体の理論がある。 また，気体や液体は比較的自由に変形するが，それらの流れについて研究するのが流体力学である。 これらの物質の集まりの変形や流れを考える分野は連続体力学と呼ばれる。これらは工学上必須の分野であるため，工学部では時間をかけて講義が行われる．

さらに近年では，形や大きさのある粒子，人の集まり（群衆），車などの集まりとその流れ（交通流）を，「粉粒体」として研究する分野も発展している．前回配布のマインドマップの中でも交通流について言葉だけ紹介したが，毎年時田が所属する多自由度システム情報論講座の杉山先生（現在は退職して名誉教授）は「交通流と自己駆動粒子系のシンポジウム」を主催してきており，名古屋大学は交通流研究のメッカでもある．シンポジウムには無料で参加できるので，興味のある人はぜひ参加してみて欲しい．

いずれにしても，大学で最初に古典力学を学ぶときには，必ず質点系に対する理論から始める．その理由は，質点系の研究には古典力学の本質が凝縮されているからである．一般に，形や大きさのある物体の運動を扱うのは難しい．また解析的な手計算ができないことも多く，数値シミュレーションをせざるをえない．そもそも地球の形は正確にはわかっていないし（変形している），エベレストの正確な高さも最近修正されたりしているくらいである（インド洋の海面の高さがエベレストの質量の影響を受けてしまう！）．上記の，地球の中心に地球の全ての質量が集中していると仮定しても地表から上の物体にかかる万有引力の大きさが同じであるという事実は，その積分計算をやってみるとわかるが，偶然にしては出来すぎで，それこそ神のメッセージとしか思えないほど奇跡的に感じられる（これも後の授業で扱います）．脱線ついでに書いてしまうと，全然関係ない（かも知れない）けれども，エベレストの高さは，人間の無酸素登頂可能な限界の高さと一致しているが，これは偶然なのか，それとも必然なのだろうか．

閑話休題，以下では，（すでに資料「ベクトル」で予告したことであるが）質点の運動を記述する位置ベクトル，変位，速度，加速度についてまとめる．

２．質点の運動

一般に，質点の位置を，直交座標系における位置ベクトル

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z) \tag{1}$$

で表すことにしよう．このベクトルは始点を原点に固定するベクトルであることに注意．質点が運動している場合は，位置ベクトルが時間 t の関数であり

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t)) \tag{2}$$

のように，各成分が時間 t の関数で表される．

図１のように，点線の軌道に沿って質点が運動しており，その位置が，時刻 t では点 A にあって，短時間（Δt）後の時刻 $t + \Delta t$ には点 B に移動したとする．このとき，

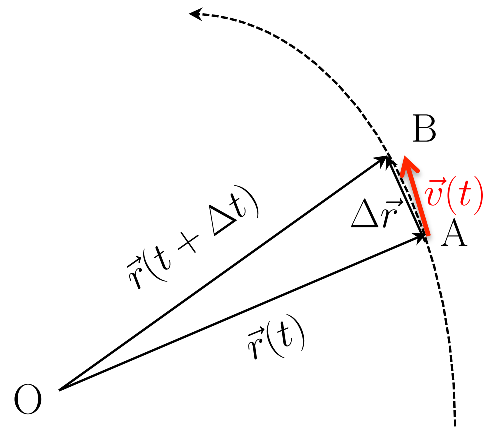

Figure 1: 質点の変位と速度

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \tag{3}$$

を，質点の変位と呼ぶ（$\Delta\vec{r}$ は厳密には A から B への軌道と一致しないが，Δt が十分小さいときは，一致するとしてもよい近似になることは図からも明らかであろう）．このとき，単位時間あたりの変位 $\Delta\vec{r}/\Delta t$ をもちいて，質点の速度 $\vec{v}(t)$ を以下のとおり定義する．

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{4}$$

ニュートンの記法では $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ である．速度ベクトルは，向きが点 A における接線方向であり，その大きさを速さ（$v(t) \equiv |\vec{v}(t)|$）という．２次元以上の空間で運動する質点の速度はベクトルであり，速さがスカラーであることに注意．速度を成分と基本ベクトルを使って書けば，

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} \tag{5}$$

となる．$\vec{v}(t) = \vec{c}$（定ベクトル）の場合，質点は $\vec{c}$ 方向への速さ $|\vec{c}|$ の等速直線運動をしていることになる．直交座標系における速度の各成分および速さの単位は MKSA 単位系では m/s（メートル毎秒）である．

さらに，点 A では質点は速度 $\vec{v}(t)$ で運動しており，短時間（Δt）後の時刻 $t + \Delta t$ の点 B での速度が $\vec{v}(t + \Delta t)$ であるとすると，質点の単位時間あたりの速度の変化 $\Delta\vec{v}/\Delta t = (\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t))/\Delta t$ をもちいて，質点の加速度 $\vec{a}(t)$ を以下の通り定義する．

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \tag{6}$$

加速度を成分を使って書けば，

$$\vec{a}(t) = (a_x, a_y, a_z) = (\dot{v}_x(t), \dot{v}_y(t), \dot{v}_z(t)) \tag{7}$$

$$= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) \tag{8}$$

である．２次元以上の空間で運動する質点の加速度はベクトルである．直交座標系における加速度の各成分の単位は MKSA 単位系では m/s^2 である．

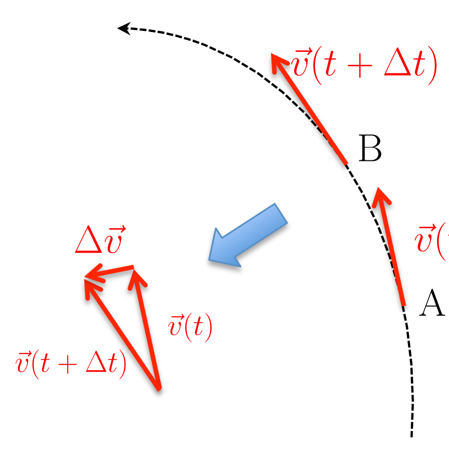

Figure 2: 質点の速度の変化

演習問題

問 1 3 次元直交座標系における軌道が $\vec{r}(t) = (c_x t, c_y t, c_z t)$ である質点の運動は，等速直線運動であることを示せ．ただし，c_x, c_y, c_z は定数.

問 2 ガリレオは斜面に球を転がす実験を行い（ガリレオの実験），球の斜面に沿った移動距離が時間の 2 乗に比例すること，すなわち，時刻 0 から時刻 t の間の斜面に沿った球の変位（軌道）が $x(t) = at^2$（a は正の実定数）となることを発見した．このこと，および (5) 式や (6) 式の定義に従って，球の速さと加速度（この場合は 1 次元の運動なのでスカラー）を a などを使って表わせ．さらに，斜面，球，重力とその斜面に沿った力の成分 F を図示して，運動方程式（$m\tilde{a} = F$）を使って，加速度 $\tilde{a}$ が斜面の角度 θ と重力加速度 g のみで表わされ，球の質量 m には依らないことを示せ.

次ページ以降に解答例と解説を示すが，まずは自力で解いてみること。

解答例

問 1 (5) 式より，質点の速度は

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}(c_x t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}(c_y t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}(c_z t)}{\mathrm{d}t}\right) = (c_x, c_y, c_z) \tag{9}$$

である。c_x, c_y, c_z は定数であるから，質点は等速直線運動している。

問 2 (5),(6) 式から，斜面に沿った球の速さ $v(t)$ と加速度 $a(t)$ は，以下の通り。

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = 2at \tag{10}$$

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 2a \tag{11}$$

一方，図３から，球に働く重力の x 方向の成分は，$F = mg\sin\theta$ であるから，運動方程式は $m\tilde{a} = F = mg\sin\theta$ となる。加速度について解くと，

$$\tilde{a} = g\sin\theta \tag{12}$$

となり，球の加速度 $\tilde{a}$ は g と θ のみで表され，球の質量 m には依らない。

注

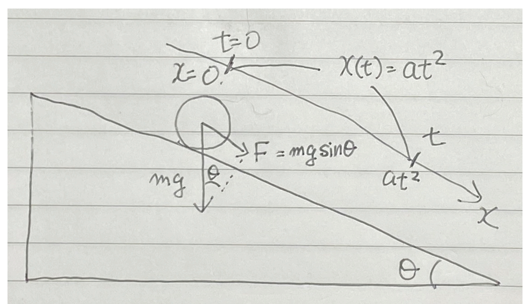

Figure 3: ガリレオの実験

(12) 式が，ガリレオによる「重力による物体の落下速度が，その物体の質量の大きさによらないこと」を数式で表現したものである。よって，空気抵抗がかからない真空中では，重い鉄球も軽い鳥の羽も同じ速度で落下する。「空気がなければ本当に羽は鉄球と同じ速度で落下するのか世界最大の真空チャンバーで実験」で検索すると，実験動画を見ることができる。数学的に証明されているのに，このような実験をいまさら行うのは馬鹿げていると考える人もいるかも知れない。もちろんこの実験は主に教育目的で行われたものだが，どんな素晴らしい理論でも１回の実験によって完全に実証されることはまれであり，精度をあげて実験を繰り返すことにより，理論に対する確信を深めていくのが自然科学の王道である。例えば，クーロンの法則は，荷電粒子間に働く反発力もしくは引力がそれぞれの電荷の積に比例し，距離の２乗に反比例することを表すが（逆２乗の法則），その逆２乗則の”２”が本当にピッタリ２なのかについては，比較的最近になっても実験が行われており，１千億分の１程度の誤差で２であることを示す論文が書かれていたりする。

なお，ガリレオは，有名な「ピサの斜塔の実験」により，重力による物体の落下速度が，その物体の質量の大きさによらないことを発見したと言われているが，実際は「ピサの斜塔の実験」は後世の弟子の創作であるという説が有力である．その理由のひとつは，当時はまともな時計がなく（ガリレオは水時計をもちいて球が転がる時間を測定したとされる．そもそも振り子時計の原理である「振り子の等時性」を発見したのがガリレオである．振り子の等時性についてはのちの授業で解説する予定），一瞬で落下する物体の落下時間を正確に計測できなかったのではないかというものである．斜面を転がす場合には球はゆっくりと運動するので，精度の悪い時計でも「落下時間」を測ることができたのであろう．１５世紀にはすでに原始的なぜんまい時計があったという話もあるけれども時田は詳細を知らない．日時計から最新の原子時計に至る「時計の歴史」は大変興味深いので，興味のある人は調べてみて欲しい（各物理量の単位や「１秒」の定義については今後の授業でも扱う予定）．

なお，このノートには，間違い，事実誤認，不正確な表現，タイポが含まれている可能性がある．それらを指摘してくれた人にはボーナス点を与えるので，積極的に「バグ取り」に協力してください．