微積分 ver.20230412

古典力学の授業に入る前に，この授業で使うことになる数学的知識をまとめて解説する．以下では，高校の基礎解析の復習と，教養教育院の数学の授業でも扱われる内容のうちこの授業で使うことになる最低限の数学的知識を先取りして解説する．この資料を今後の授業を履修するときの「数学サバイバル・キット」として使って欲しい．より厳密な定義，証明，詳細については解析の授業や教科書を参照のこと．

１．微分

以下では値が実数であるような実関数 $y = f(x)$ を扱う．その実変数 x による微分は，

$$y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

$$\equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

と表記・定義する（今後 $\equiv$ を「定義」の意味で使う）．(2) 式の極限が一意に存在しない関数も考えられるが，この授業では出てこないのでとりあえずここでは無視する．プライム記号 $'$ は「ラグランジュの記法」，記号 d を用いた微分表記は「ライプニッツの記法」と呼ばれる．基本的に両者は全く同じことを意味すると思っていてよい．なお，時間 t の関数 $x(t)$ の微分を $\dot{x}$ とドット $\dot{}$ を用いて表記することもある．これは「ニュートンの記法」と呼ばれる．

２．初等関数の微分公式

以下の公式は覚えておいて欲しい．

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \qquad \text{(指数関数)} \tag{3}$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad \text{(対数関数)} \tag{4}$$

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad (a\text{ は任意の実定数}) \qquad \text{(ベキ関数)} \tag{5}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \text{(正弦関数)} \tag{6}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad \text{(余弦関数)} \tag{7}$$

$\ln x$ は自然対数 $\log_{\mathrm{e}}(x)$ のことであり，底を省略した $\log(x)$ も同じ意味で使われることがある．(5) 式は，一般に，任意の実数 a に対して成り立つ．また，この授業では三角関数のべき乗を $\cos^2 x \equiv (\cos x)^2$ のように表記する．

３．古典力学でよく使う微分公式

以下についても覚えておいて欲しい．

３－１．ライプニッツの法則

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{8}$$

３－２．合成関数の微分

合成関数 $y = f(g(x))\,(y = f(u), u = g(x))$ に対して，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{9}$$

ドット記号 $\cdot$ は，積（掛け算）であることを明示するときに用いる（今回はなくてもよい）．ドット記号 $\cdot$ はベクトルの内積を表記するときにも使われるが，それについては別の資料で解説する．

（例）$y=\sqrt{x^2+1}$ の x による微分は，$y=\sqrt{u}$, $u=x^2+1$ として

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\sqrt{u})\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+1)=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x) \tag{10}$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \tag{11}$$

$\sqrt{u}$ の u による微分では，(5) 式の公式を用いた．

３－３．商の微分

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \quad\Longrightarrow\quad y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{12}$$

（例）正接関数の微分

$$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} \tag{13}$$
$$=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x \tag{14}$$

高校数学で習った「逆数の微分公式」は，$f(x)=1$ の特別な場合である．

$$y=\frac{1}{g(x)} \quad\Longrightarrow\quad y'=\frac{-g'(x)}{g(x)^2} \tag{15}$$

４．関数の級数展開

「$\log(0.1329)$ はいくらか？」とか，「$\sin(\pi/100)$ はいくらか？」と聞かれて即答できる人はいないだろう（いたらぜひ連絡してください）．電卓を使っても良いと言われてもにわかには計算できそうにない．関数電卓（これももはや死語？）や PC がなかった時代には，あらかじめ決められた値に対する「対数表」や「三角関数表」などの「数表」を用いて，さまざまな近似計算が行われていた．

イギリスの数学者にして計算機科学の始祖であるチャールズ・バベッジ（1791-1871）が，世界で初めて「プログラム可能な」計算機である「階差機関」を設計したとき，その目的は様々な「数表」を，自動的に超高速で正確に生成する機械を作ることだった．

マクローリン展開は，ある条件を満たす任意の関数を，多項式で表すことができるという定理であり，それにより関数の近似値を四則演算のみで（がんばれば手で）計算することができる．この講義でも後で使うが，マクローリン展開を使った近似計算は，物理学者のみならず，あらゆる解析計算をする研究者が日常的に行っている．この授業でもあとでその例を示す．

x の関数 $f(x)$ があって，x のある区間で以下の無限級数に展開できたとする．「展開」とは，多項式で表すことである．展開できる条件は，とりあえずここでは無限回微分可能であることとする．古典力学に現れるたいていの関数はこの条件を満たす．

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{16}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{17}$$

このときの定数列（展開の係数列）$\{a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots\}$ がどのようなものになるか考えよう．

1. （$n=0$）$x=0$ を (16) 式に代入すると，$f(0)=a_0$.
2. （$n=1$）(16) 式の両辺を x で微分すると，

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+a_nnx^{n-1}+\cdots \tag{18}$$

   $x=0$ を代入して，$f'(0)=a_1$.

3. （一般の n）(16) 式の両辺を x で n 回微分すると，

$$f^{(n)}(x) = a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 + a_{n+1} \cdot (n+1) \cdots 2 \cdot x + \cdots \tag{19}$$

$x = 0$ を代入して， $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$.

$$\therefore \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{20}$$

よって，展開の係数 a_n は，関数 $f(x)$ を x で n 回微分して $x = 0$ を代入したものを $n!$（n の階乗）で割れば求まる（$0! = 1$ と定義する）．(20) 式を (16) 式および (17) 式に代入することにより，関数 $f(x)$ が

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \tag{21}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{22}$$

と多項式に展開されることがわかった．これをマクローリン展開もしくはマクローリンの定理という．

同様に，$f(x)$ が，$(x-c)$（c は任意の定数）の級数として

$$f(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \cdots + b_n(x-c)^n + \cdots \tag{23}$$

のように展開されるとすると，上記と同様の議論（$x = 0$ ではなく $x = c$ を代入する）により，展開係数が $b_n = f^{(n)}(c)/n!$ となり，$f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{24}$$

と展開されることがわかる．これをテイラー展開もしくはテイラーの定理という．マクローリンの定理およびテイラーの定理は，解析学における最も重要な定理とされている．これらを用いることにより，値を求めることが難しい関数を級数で表現し，項別に積分したり，四則演算のみで値を計算したりすることができる．「無限個の項を足すことなどできないのだから，多項式で書けても全然うれしくない」という人は以下の具体例を読んでみて欲しい．なお，以下の例を含め，x が複素数の場合にも両定理が成り立つことは覚えておいてもよいかも知れない．

５．級数展開の例

５－１．正弦関数

$\sin x$ のマクローリン展開は，

$$\sin x = \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}x - \frac{\sin 0}{2!}x^2 - \frac{\cos 0}{3!}x^3 + \frac{\sin 0}{4!}x^4 + \frac{\cos 0}{5!}x^5 - \frac{\sin 0}{6!}x^6 - \frac{\cos 0}{7!}x^7 + \cdots \tag{25}$$

$$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{26}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad (|x| < \infty) \tag{27}$$

である．最後の $|x| < \infty$ は展開できる条件（収束条件）である．$\sin x$ の場合は無限大を除く全ての x の値に対して上の式が成り立つ．収束条件は関数ごとに異なることに注意しよう．

$|x| \ll 1$ の場合（$|x|$ が 1 と比べて非常に小さい場合）には有用かつ非常によく使われる近似式

$$\sin x \simeq x \tag{28}$$

が得られる．$|x| \ll 1$ のときには，(26) 式の右辺において，$x/1!$ より $x^3/3!$ は無視してもよいほど絶対値が小さく，さらに高次の項 $x^5/5! + \cdots$ の絶対値は圧倒的に小さいのでさらに無視してもよいのである．

WolframAlpha（`http://wolframalpha.com`）に，`|1-Sin[1]|`などと入力して，x の値が小さくなると近似がよくなっていくことを確認してみよう．例えば，$x = 1$ のときは $\sin(1) \simeq 0.84$ なので，誤差は $1 - \sin(1) \simeq 0.16$ である．これが $x = 0.1$ に対しては誤差が $0.1 - \sin(0.1) \simeq 0.00017$ となり，$x = 0.01$ に対しては誤差は $0.01 - \sin(0.01) \simeq 1.7 \times 10^{-7}$ ほどになる．$|x| \ll 1$ のときには，$\sin x$ は x で置き換えてよいと覚えておいて欲しい．

ちなみに，(26) 式右辺で 3 次の項まで残した近似式 $\sin x \simeq x - x^3/3!$ は，同じ x の値に対しては，$\sin x \simeq x$ よりずっとよい近似となっていることは，たとえば，WolframAlpha に

Plot[{|x-Sin[x]|,|x-x^3/6-Sin[x]|},{x,0,1}]

と入力して，x に対する誤差のグラフを描かせることで確認することができる．

５－２．幾何級数

$f(x)=1/(1-x)$ をマクローリン展開してみよう．微分公式 (5) もしくは (15) を使って微分すると，

$$f(0)=1=0! \tag{29}$$

$$f'(0)=\left.\frac{1}{(1-x)^2}\right|_{x=0}=1=1! \tag{30}$$

$$f''(0)=\left.\frac{-2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}\right|_{x=0}=2=2! \tag{31}$$

$$f'''(0)=\left.\left(\frac{2}{(1-x)^3}\right)'\right|_{x=0}=\left.\frac{-2\cdot 3(1-x)^2(-1)}{(1-x)^6}\right|_{x=0}=6=3! \tag{32}$$

であるから，

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3\cdots \tag{33}$$

$$=1+x+x^2+x^3+\cdots \tag{34}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (|x|<1) \tag{35}$$

となることがわかる．これは，高校数学でやった「無限等比級数の和」の公式の「逆」である（高校では，$I=1+x+x^2+x^3+\cdots$ として，$xI=x+x^2+x^3+\cdots$ を辺々引き算して $(1-x)I=1$ として I を求めたはず）．

５－３．指数関数

指数関数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ は何度微分しても元のままだから，マクローリン展開はカンタンである．$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=1$ だから，

$$f(x)=\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \tag{36}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \quad (|x|<\infty) \tag{37}$$

となる（ここでは $0^0=1$ と定義する．２変数関数などでは定義できない場合もあるので注意）．特に $|x|\ll 1$ のときの近似式

$$\mathrm{e}^x\simeq 1+x \tag{38}$$

は非常によく使われるので，覚えておいて欲しい．また，WolframAlpha に

Plot[|1+x-Exp[x]|,{x,0,1}]

と入力して，x が小さくなると誤差が小さくなる様子を確認してみて欲しい．

５－４．対数関数

最後に演習問題として，$f(x)=\log(1+x)$ のマクローリン展開を答えだけ示すことにしよう．各自手を動かして計算して，以下のようになることを確認してみて欲しい．

$$f(x)=\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \tag{39}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \quad (|x|<1) \tag{40}$$

この関数についても，$|x| \ll 1$ に対する近似式

$$\log(1+x) \simeq x \tag{41}$$

は非常によく使われるので，覚えておくとよいだろう．

ちなみに，WolframAlpha は関数の級数展開をして，高次の項（$n=4$）まで残した近似式のグラフまで描いてくれるので，上の例や $\cos x$ なども手で計算した結果の答え合わせをしてみるとよいだろう．たとえば，上の対数級数の場合は，

```
Series[Log[1+x]]
```

と入力すればよい．

WolframAlpha は，理論物理学者・複雑系科学者のスティーブン・ウルフラムが創業して開発した数式処理システム Mathematica のオンライン・フリー・サブセット版ともいえるものである．Mathematica は LISP に似たプログラミング言語と強力なグラフィックで知られる．時田も手計算の答え合わせや研究で得られた結果の可視化などに日常的に Mathematica を使用している．名古屋大学はキャンパスサイトライセンス契約をしているので，学生も SIS ラボ等学内のラボのパソコンで Mathematica を使用することができる．数式処理システムに興味のある人は，ぜひ使ってみて欲しい．

６．積分

積分については，この授業においては，とりあえずは，たとえば「(3)-(7) 式の右辺の積分はそれぞれの左辺のかっこの中」と覚えておくくらいで構わない．今後の配布資料の中でも，必要に応じて初学者向けの説明を行うので心配しなくてよい．より詳細な，定義，証明などについては，解析の授業や教科書を参照して欲しい．ちなみに，WolframAlpha における積分は，たとえば，`Integrate[1/Cos[x]^2,x]` などとすれば，積分が存在するものに関しては答えてくれる．

なお、このノートには、不正確な表現、間違い、タイポが含まれている可能性がある。それらを指摘してくれた人にはボーナス点を与えるので、積極的に「バグ取り」に協力してください．

付録．収束条件の求め方

収束条件について補足する．マクローリン展開の収束条件を $|x| < R$ とすると，R の値は以下のダランベールの判定法により決まる．R は収束半径とも呼ばれる．

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \tag{42}$$

$\sin x$ の場合，$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ なので，

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{(-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 \tag{43}$$

となり，$R=\infty$ となる．同様の計算により，例えば，$\log(1+x)$ の収束半径は

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \tag{44}$$

なので，$R=1$ となる．