十年周期説の検証

— 名古屋大学最終講義 —

松本耕二 （多元数理科学研究科）

私の略歴

1957年　大阪府豊中市にて出生

～1976年　高校卒業まで大阪、神戸で過ごす

1976年～1987年　大学、大学院、ポスドク時代を東京で過ごす

（1982年　最初の論文が公表される）

1987年　岩手大学教育学部数学科に就職

1995年　名古屋大学大学院多元数理科学研究科に移る

2001年　教授昇進、現在に至る

数学者になるまでの話は：

豊橋技術科学大学　第５回リベラルアーツ連続講演会（2022年11月26日）における講演

「数学者という生き方」

を参照。

Youtube:

https://www.youtube.com/watch?v=msOhhrtLaB4

にて公開されている。

駆け出しの頃

1981年4月：立教大学の大学院に入学

入学前に Prachar, Primzahlverteilung を読む。

指導教員：藤井昭雄先生

まず Iwaniec の sieve の論文を読む。

- Almost-primes represented by quadratic polynomials
- Rosser's sieve

その後、ゼータ関数の論文に：Balasubramanian　の $\zeta(1/2+it)$ の二乗平均の論文を読む。

最初の研究：Balasubramanian の定理を Dirichlet の L 関数に拡張(Proc Japan Acad (1982))：修士論文前半

（藤井先生から示唆された問題）

$\Rightarrow$ しかし、間違いが発覚（ないはずの $T^{1/2}$ のオーダーの項がある）

$\Rightarrow$ 一年くらいかけて修正し、修正版を公表： Proc Japan Acad (1990) と、詳細は unpublished manuscript

(cf. Motohashi, Proc Japan Acad (1985))

$\Rightarrow$ 決定版は Katsurada–KM, RIMS 国際集会報告集、Kluwer, 1999.

第二の研究：等差数列中の約数問題についての Lavrik の誤差項評価を改良：修士論文後半

$\Rightarrow$ しかし、Smith (Math Ann, 1982) にほぼ含まれていた。知らずに Math Ann に投稿したが reject.

$\Rightarrow$ しかし、一点だけ、両方の議論を組み合わせると Smith が脚注で述べていた予想が解ける

$\Rightarrow$ Smith に手紙で知らせると、奥さんから返信

C R Math Rep Acad Sci Canada (1984)

Nagoya Math J (1985)

1983年の春に修士号を取得して、博士後期課程に進む。

第三の研究：Riemann zeta 関数 $\zeta(s)$ の分数ベキの $1/2 < \Re s < 1$ における平均値定理

（なぜ $1/2 < \Re s < 1$ を考えたか？ $\Leftarrow$ 少し前に、Titchmarsh の本で、$1/2 < \Re s < 1$ における $\zeta(s)$ の値分布についての Bohr の理論を読んでいた）

$\Rightarrow$ しかし、本質的なミスを Heath-Brown に指摘される

$\Rightarrow$ ボツ！

第四の研究：Bohr–Jessen の極限定理の精密化

着想：Bohr–Jessen が使っている一様分布の結果を、discrepancy 評価で置き換えれば、定量的な精密化ができるだろう。

⇒（D1 の９月）ベッドでゴロゴロしていたら鹿野氏から電話があり、翌年１月の Erdös Conference での講演を誘われる

⇒ 無謀にも引き受けてしまう

⇒ Bohr–Jessen のドイツ語の原論文を解読

$\Rightarrow$ デンマーク語の 80 ページの文章ばかりの論文も読まねばならないことが判明

$\Rightarrow$ デンマーク語の文法書と辞書を買い込み、デンマーク語を勉強

$\Rightarrow$ 年末に論文解読を終える

$\Rightarrow$ 徹夜につぐ徹夜、朝までファミレス

$\Rightarrow$ １月末の Erdös Conference になんとか間に合う

Acta Arith (1987)

Acta Arith (1988) $\Leftarrow$ 博士学位論文

ありがたかったこと：

- 藤井先生の放任主義

（しかし、最初の問題は与えてくれる；時折の励まし）

- 周囲の人々の暖かさ

立教大学：遠藤先生、佐藤文広先生、荒川先生....

解析数論の先輩：村田さん、江上さん、塩川さん、田村純一さん....

「若手の会」の整数論メンバー：中村憲さん、広中由美子さん....

$\Rightarrow$ 1987 年、岩手大学に職を得る

1990 年ごろの研究

（1）Japanese J Math (1989)

（2）Nagoya Math J (1989)

東京日仏シンポジウム報告集、Springer Lecture Note, 1990

（3）Katsurada–KM, Math Z (1991)

（4）Kiuchi–KM, Acta Arith (1992)

(1) Japanese J Math (1989): $\zeta(s)$ の $1/2 < \Re s < 3/4$ での二乗平均の Atkinson の方法による平均値定理

$$\int_0^T |\zeta(\sigma+it)|^2 dt$$
$$= \zeta(2\sigma)T + \frac{\zeta(2\sigma-1)\Gamma(2\sigma-1)}{1-\sigma}\sin(\pi\sigma)T^{2-2\sigma} + E_\sigma(T)$$

誤差項 $E_\sigma(T)$ の $\sigma = 3/4$ での挙動の変化を初めて発見

$\Rightarrow$ Ivić の Tata LN で紹介される（$3/4 \le \Re s < 1$ については KM-Meurman, Acta Arith (1993)）

- イタリア、Amalfi での国際会議に参加（初の海外渡航）$\Leftarrow$ 英語力の不足を痛感

（2）：Bohr–Jessen の極限定理の一般化

Nagoya Math J (1989)：保型 L 関数の場合

東京日仏シンポジウム報告集、Springer Lecture Note, 1990：一般の ”Matsumoto zeta” 関数の場合（確率論の Prokhorov の定理を用いる）

その後、

J Number Theory (1992): Lévy の定理による別証明

⇒ 後年、伊原–KM による M 関数の理論展開においてひとつの礎石となる。

Harman–KM, J London Math Soc (1994):

極限測度への収束のスピードの discrepancy 評価（学位論文の改良）

Hattori–KM, Acta Arith (1995),

J Reine Angew Math (1999):

極限測度そのものの定量的評価

近年：Lamzouri, Radziwiłł, 井上らにより更なる改良が次々と進められている

（3）Katsurada–KM, Math Z (1991):

$\displaystyle\sum_{\chi \bmod q} |L(s,\chi)|^2$ の（$0 < \Re s < 1$ での）q に関する漸近展開公式（Heath-Brown の $s = 1/2$ の場合の結果の一般化、および展開係数の決定；based on the Atkinson-Motohashi method)

$s = 1$ の場合：Katsurada–KM, Nagoya Math J (1994)

Hiurwitz zeta でのアナロジー：

$\zeta_1(s,\alpha) = \zeta(s,\alpha) - \alpha^{-s}$ と定義して、$\displaystyle\int_0^1 |\zeta_1(\sigma+it,\alpha)|^2 d\alpha$ の t に関する挙動

特に $\sigma = 1/2$ の場合、1950 年代からの古典的問題。Andersson や Zhang の結果を改良して、t についての漸近展開を示す。(Katsurada–KM, Math Scand (1996)), また導関数版はKatsurada–KM, Compositio Math (2002)

証明の出発点で $\zeta(s_1,\alpha)\zeta(s_2,\alpha)$ の「調和積分解」により、二変数関数 $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(m+\alpha)^{-s_1}(m+n+\alpha)^{-s_2}$ の解析接続の問題に遭遇

$\Rightarrow$ のちに多重ゼータ関数の解析的理論へと研究を進めるきっかけとなる

（4）Kiuchi–KM, Acta Arith (1992):

$\zeta^2(s)$ の近似関数等式の残余項 $R(s)$ の二乗平均値の漸近公式

実は $R(1/2+it)$ は約数問題の誤差項 $\Delta(t)$ との類似性がある (Taylor, Jutila, 本橋)

$$R(1/2+it) \leftrightarrow \Delta(t) \leftrightarrow E(t)$$

(where $E(t)$: Riemann zeta の二乗平均値の誤差項）

しかも $R(s)$ が一番精密な結果まで出せる (木内、KM, Ivić)

• 1992–93:　イギリス留学 (Cardiff) Hooley, Huxley, Harman, Greaves, Watt

滞在中にフィンランド訪問 (Jutila, Meurman)、ドイツ訪問 (Brüdern ら)、また広中夫妻、服部夫妻、中川夫妻らの訪問を受ける

• 1995：名古屋大学に異動（初期の院生：古屋、神谷、市原、見正、鈴木（正）....）

• 1996 年、初の Palanga （リトアニア）訪問。翌年には Laurinčikas, Manstavičius が来日。リトアニア学派との交流が深まる。

2000 年ごろの研究

(5) Ivić–KM–Tanigawa, Math Proc Cambridge Phil Soc (1999)

Turku シンポジウム報告集、Walter de Gruyter, 2001

(6) Laurinčikas–KM, Acta Arith (2001)

(7) Illinois ミレニアム Conference 報告集、A K Peters, 2002

J Number Theory (2003)

(5) Rankin–Selberg L関数の研究：直接のきっかけは院生（市原）の修論指導。背景には本格的に保型形式の研究をしたい、という長年の希望もあった。

Ivić–KM–Tanigawa は Riesz 平均の考察

単著は平均値と値分布（Rankin–Selberg Lの普遍性の証明）（Ivić が Riemann zeta の平均値に応用）

$\Rightarrow$ 池田リフトの L関数の平均値の研究に接続

Proc London Math Soc (2005)

KM-Sankaranarayanan, Math Z (2006)

(6) Laurinčikas–KM, Acta Arith (2001):

ゼータ関数の普遍性理論において positive density method を導入し、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の保型 L 関数の普遍性定理を証明した。（先行研究：Kačenas–Laurinčikas, しかし不自然な条件付き）

Positive density method はその後、見正による代数体の Hecke L 関数の普遍性の証明、さらに名越–Steuding による Selberg クラスの L 関数の普遍性の証明でも利用される。

• 普遍性定理の「定量化」:

この時期に Garunkštis らの研究がある。

Šiauliai Math Sem (2006): Voronin の高次元稠密性定理を $\zeta(s)$ の Taylor 展開に応用することで「弱い普遍性」を示す、というアイデア

⇒ この弱い普遍性なら定量化が可能

Garunkštis-Laurinčikas-KM-J.Steuding-R.Steuding, Publ Mat (Barcelona) (2010)

⇒ 近年：遠藤による一般化

(7) 多重ゼータ関数の解析的理論：

1999 年に、Euler–Zagier 型の多重ゼータ関数の解析的研究に Mellin–Barnes の積分公式を応用する着想を得る（inspired by Katsurada's work)

$\Rightarrow$ 漸近展開、解析接続

Millennial Conf 報告集 (2002), J Number Theory (2003), Nagoya Math J (2003)

オーダー評価などにも有効：Ishikawa–KM, Illinois J Math (2003), 木内、谷川など

• Mellin–Barnes の公式が適用可能な他の例を探して、Mordell–Tornheim 多重ゼータ関数、Apostol–Vu 多重ゼータ関数を導入。また $\mathfrak{so}(5)$ の Witten ゼータ関数を多変数化して、それにも Mellin–Barnes を適用（Bonn 会議報告集、2003）

$\Leftarrow$ ルート系のゼータ関数の最初の実例

• 二重ゼータ関数の関数等式の発見

Math Proc Cambridge Phil Soc (2004)

$\Leftarrow$ 若林さんの励ましによって世に出た

海外との交流：

- この頃、Steuding（ドイツ）、Bhowmik, Essouabri（フランス）らと知り合う

⇒ ドイツ、フランス滞在が増える

（特に 2008-09 年の冬、ドイツに数カ月の滞在）

- リトアニアでもより若い世代の知り合いが増える（Kačinskaitė ら）

- 金光さんの主導による定期的日中セミナーへの参加（北京、西安、済南など）

2010 年ごろの研究

(8) Komori–KM–Tsumura, J Math Soc Japan (2010)

Komori–KM–Tsumura, Proc London Math Soc (2010)

Komori–KM–Tsumura, Math Z (2011)

(9) Ihara–KM, Quart J Math (Oxford) (2011)

Ihara–KM, Moscow Math J (2011)

(8) ルート系のゼータ関数 (Komori–KM–Tsumura)：

Bonn 報告集 (2003): B_2 case

KM–Tsumura, Ann Inst Fourier (2006): A_r case

一般の場合の定義は Komori–KM–Tsumura, 福岡会議報告集 (2007)

KM による問題提起（2000 ごろ）:「多重ゼータ値の関係式は、関数としての関係式を整数点で見ているだけではないか？」

$\Rightarrow$ 津村による肯定的解答（A_2 のルート系のゼータまで広げて考えれば正しい！）

$\Rightarrow$ 中村（隆）による別証明

$\Rightarrow$ Weyl 群の作用に基づく関数関係式の一般論へ

Komori–KM–Tsumura 以外に、中村、岡本、池田・松岡らも貢献

G_2 のパリティ予想は門田・岡本・田坂が解決

• 多重ゼータ値の二重シャッフル関係式の、ルート系のゼータの部分分数分解による別証明

$\Rightarrow$ 小野・山本が有限多重ゼータの研究に適用

• 多重ゼータの B 型類似

$\Rightarrow$ 次元公式への応用（金子・田坂）

多重ゼータ関係の他の仕事としては：

- 二重ゼータ関数の平均値（KM–Tsumura, J Math Soc Japan (2015))

⇒ その後、池田・松岡、木内、南出、岡本・小野塚らが種々の類似物を計算

- 多重ゼータのp進理論と、特異点解消型多重ゼータ (Furusho–Komori–KM–Tsumura, Amer J Math (2017), Selecta Math (2017)): 原点は Komori–KM–Tsumura, Intern J Number Theory (2011) （二重の場合のp進理論）

⇒ Renormalization との関係（小見山）

新刊予告 !!

Komori–KM–Tsumura,

The Theory of Zeta-Functions of Root Systems

Springer 社より 2023 年 5 月、刊行予定 !!

(9) M関数の理論 (Ihara–KM):

Recall: Bohr–Jessen の極限定理は、$\zeta(\sigma+it)$ の、t を動かした時の値分布の極限測度の存在とその積分表示を与えていた

$\Rightarrow$ 伊原 (2008): その χ-analogue すなわち、（代数体と関数体の）Dirichlet L関数の、指標の modulus q を動かした時の値分布に関する類似の結果

M関数とはその積分表示の密度関数のこと

ただしこの伊原論文では、代数体の場合、絶対収束域 $\Re s > 1$ でしか結果が得られていない

Ihara–KM (2011) においては、J Number Theory (1992) にある平均値の方法を用いることにより、有理数体の場合に、$\Re s > 1/2$ にまで結果を広げた。またテスト関数の条件も広げた。(無条件に有界連続、RH の下では指数関数的増大関数も許容)

$\Rightarrow$ その後、Mourtada–K.Murty, Akbary–Hamieh, Gao–Zhao, 峰らによるアナロジーや一般化がなされる（保型 L 関数の場合については後述）

- 鈴木（正）: M 関数と零点分布との関係の指摘

2010 年代に入ると、アジア圏への訪問が増えた：

韓国（Choie, Ki, Lee）

台湾（Yu）

インド（Sankaranarayanan, Chatterjee, Gun）

タイ（2017 年 7 月、 Laohakosol 還暦記念会議）

⇒ 実はその翌月、KM 自身の還暦記念集会も名大で開かれる（報告集：Advanced Studies in Pure Math Vol.84）

ミャンマー（2018 年 1 月、ヤンゴン大学での集中講義、TA 門田）

⇒ しかしもう当分行けないが....

2020 年ごろの研究

(10) 保型L関数についてのM関数の理論：

KM–Umegaki, J Number Theory (2019) において、保型Lの t-aspect については一定の結論。Level aspect は、Lebacque–Zykin の後、峰により満足すべき結果に到達

Symmetric power L関数の t-aspect は KM–Umegaki, Ropar Conf 報告集、2020 において一定の結論。Level aspect は、KM–Umegaki, Intern J Number Theory (2018) が先鞭をつけ、Lebacque–KM–Mine–Umegaki (preprint) が進行中

（11）多重ゼータ関数の研究：

• （非正）整数点での値の明示式：

Essouabri–KM, Acta Arith (2020)

Essouabri–KM, Intern J Math (2021)

（多項式を分母に持つ一般的な多重 Dirichlet 級数を考察；特殊値の超越性など）

KM–Onozuka–Wakabayashi, Math Z (2020)

• 零点集合の振る舞い（数値実験と理論的考察）

KM–Shōji, European J Math (2020)

KM–Matsusaka–Tanackov, J Number Theory (2022)

(12) Schur 多重ゼータ関数：

Nakasuji–Phuksuwan–Yamasaki (2018) によって、Schur 関数のゼータ的類似物として導入されたもの。近年、急発展中（Bacnmann, 大野、武田、....）

KM–Nakasuji, Publ Math Debrecen (2021): Anti-hook 型 Schur 多重ゼータとルート系のゼータとの関係式

KM–Nakasuji (preprint): content-parametrized case での類似の結果

さらに関連研究が継続中

(13) Goldbach 問題に付随する Dirichlet 級数：

$$\Phi_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_2(n) n^{-s}, \quad \text{where} \quad G_2(n) = \sum_{k+m=n} \Lambda(k)\Lambda(m),$$

the Goldbach counting function

これは Egami–KM, 日中セミナー報告集、2007 に遡る。この論文で $\Phi_2(s)$ が $\Re s = 1$ で自然境界を持つことを予測し、RH などの仮定のもとで証明

1990 年ごろに藤井が次の漸近式を証明：

$$\sum_{n \le x} G_2(n) = \frac{1}{2}x^2 - H(x) + O(x^{4/3}(\log x)^{4/3})$$

（ただし $H(x)$ は振動項）

• Egami–KM (2007) はこの誤差項が $O(x^{1+\varepsilon}), \Omega(x)$ であることを予想

⇒ Bhwmik–Schlage-Puchta, Languasco–Zaccagnini, Goldston–Yang らによって証明される

• Egami–KM の結果の合同条件付きの場合への拡張：Rüppel、鈴木（雄）

一方、Granville は RH との関係を指摘

⇒ Bhowmik–Halupczok–KM–Y.Suzuki, Mathematika (2019): 合同条件付きに拡張された $\Phi_2(s)$, $G_2(n)$ の挙動と Dirichlet L関数の零点分布との関係

最近、$G_2(n)$ の挙動と Siegel zero との関連は Fei, Bhowmik, Halupczok, Jia, Goldston, Suriajaya (Chacha), Friedlander, Iwaniec らによって深く追求されている

他方、振動項 $H(x)$ の振る舞いに Bohr-Jessen 流の議論が適用できることは既に藤井が指摘していた

$\Rightarrow$ J Ramanujan Math Soc (2021) において、その挙動を M 関数の定式化で記述

$\Rightarrow$ さらに RH との関係などについて研究が継続中

• プロフェッショナルとは？

— すごく夢中で、すごく得意で、すごく努力できたらプロフェッショナル（by 俵万智）

• 好きな数学者像：例えば Siegel, Euler

(cf. Frankfurt 大学での講演）

⇒ でも、彼らが目標というわけではない（いや、目指してなれるわけでもないが）

• 目指しているのは、「今までの誰とも異なるタイプの数学者」

ご静聴ありがとうございました