現代数学への流れ　第4回

復習　置換　$n \in \mathbb{N}$

置換とは 全単射 $\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$ のこと.

$$S_n = \{ \sigma : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\} : \text{全単射} \}$$

$\sigma, \tau \in S_n$ に対する積を

$$\sigma\tau = \sigma \circ \tau$$

で定める.

巡回置換　$k_1 \to k_2 \to \cdots \to k_r \to k_1$ と写し, 他を固定する

置換を巡回置換といい, $(k_1 k_2 \cdots k_r)$ と書く.

定理1　全ての置換は巡回置換の積で書ける.

次に巡回置換は互換の積で書けた.

$$(k_1 k_2 \cdots k_r) = (k_1 k_r) \cdots (k_1 k_2)$$

∴

<u>系2</u> 任意の置換は互換の積で書ける.

<u>定義3</u> $\sigma \in S_n$ が m 個の互換の積で書けるとき,

σ の符号を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$$

で定める.

<u>定理4</u> $\sigma \in S_n$ に対して $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は互換の積の取り方に依らず一意に決まる.

命題5　$\sigma, \tau \in S_n$ に対し.

(1)　$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$.

(2)　$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$

(1)　σ が m 個の互換の積, τ が n 個の互換の積で書けたとき.

$\sigma\tau$ は $m+n$ 個の互換の積で書ける.

$$\therefore\ \mathrm{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^{m+n} = (-1)^m(-1)^n = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau).$$

(2)
$$\mathrm{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(e) = 1$$
$$\| $$
$$\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}).$$

より.　$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$　//

$\mathrm{sgn}(\sigma)=1$ となる $\sigma\in S_n$ を 偶置換

$\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$ となる $\sigma\in S_n$ を 奇置換 という.

命題1 $n\geq 2$

$$\underbrace{\{\sigma\in S_n \mid \sigma:\text{偶置換}\}}_{=A_n} \text{ と } \underbrace{\{\sigma\in S_n \mid \sigma:\text{奇置換}\}}_{=B_n}$$

のサイズは $\dfrac{n!}{2}$

S_n のサイズは $n!$ であった.

$$F: A_n \to B_n,\quad \sigma \mapsto (12)\sigma$$

$$G: B_n \to A_n,\quad \tau \mapsto (12)\tau$$

とおくと, $G\circ F = \mathrm{id}_{A_n}$, $F\circ G = \mathrm{id}_{B_n}$ がいえる.

$\therefore$ F, G は全単射.

∴ A_n と B_n のサイズは同じ.

また. $S_n = A_n \sqcup B_n$ より.

$$|A_n| = |B_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$$

//

16 パズル

二項関係 X: 集合

$(x, y) \in X \times X$ がある規則 ρ をみたすとき, $x \rho y$ と書くとする.

$(x, y) \in X \times X$ に対して (x, y) が ρ を満たすか満たさないかが一意に決まるとき.

ρ を二項関係という.

例 X: 集合 $(x, y) \in X \times X$ に対し.

$$x \rho y \iff x = y$$

で ρ を定めると. ρ は二項関係.

例 $\mathbb{R}$

$(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ に対して $x \rho y \iff x \leq y$

でρを定めて ρは 二項関係.

例 E: 集合 $X = P(E)$

$(A, B) \in X \times X$ に対して

$A \rho B \iff A \subseteq B$

でρを定めて. ρは 二項関係.

X: 集合 ρ: X上の 二項関係.

$$P(\rho) = \{ (x, y) \in X \times X \mid x \rho y \}$$

を ρのグラフという.

逆に $P \subset X \times X$ に対して

$$x \rho y \iff (x, y) \in P$$

で ρ を定めることにより、P をグラフとして持つ二項関係 ρ が定まる。

よく、ρ と $G(\rho)$ は同一視することが多い。

<u>定義</u> X: 集合　ρ: X 上の二項関係

(1) 任意の $x \in X$ に対して $x \rho x$ が成り立つとき、ρ は反射律をみたすという。

(2) $x \rho y \Rightarrow y \rho x$ が成り立つとき、ρ は対称律をみたすという。

(3) $x \rho y$, $y \rho z \Rightarrow x \rho z$ が成り立つとき、ρ は推移律をみたすという。

(4) $x \rho y$ かつ $y \rho x \Rightarrow x = y$ が成り立つとき、ρ は反対称律をみたすという。

ρが反射律，対称律，推移律をみたすとき，ρは同値関係という．

このとき ρを $\sim$ などで表す．

ρが反射律，推移律，反対称律をみたすとき，ρは順序関係という．

ρを $\leqq$ など表す．

例 X：集合　$(X, =)$ は同値関係

例 $(\mathbb{R}, \leqq)$ は順序関係

例 $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ は順序関係．

例 $\mathbb{Z}$　~~対して~~　$n \in \mathbb{Z}$

$x, y \in \mathbb{Z}$ に対して　$x \sim y \iff n \mid x-y$

つまり ある $k \in \mathbb{Z}$ が存在し $x-y = nk$

で ～ を 定めると. ～は 同値 関係.

(∵) (i) 反射律

$x - x = 0 = n \cdot 0$

より. $x \sim x$

(ii) 対称律

$x \sim y \Rightarrow$ ある $k \in \mathbb{Z}$ が 存在し $x - y = nk$

$\Rightarrow y - x = -(x - y) = -nk = n \times (-k)$

$\therefore y \sim x$

(iii) 推移律

$x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow$ ある $k, l \in \mathbb{Z}$ が 存在し

$x - y = nk$

$y - z = nl$

$\therefore \quad x - z = x - y + y - z = nk + nl = n(k+l)$

$\therefore \quad x \sim z.$ //

<u>例</u> V : $\mathbb{R}$ 上の ベクトル空間.

$W \subset V$: 部分空間.

$v, w \in V$ に対して

$$v \sim w \iff v - w \in W$$

と $\sim$ を定めれば $\sim$ は同値関係.

(∵) <u>(1) 反射律</u>

$v - v = 0 \in W$

より, $v \sim v$

(ii) 対称律

$v \sim w \Rightarrow v - w \in W$

~~は~~ W は スカラー倍で 閉じているので、

$w - v = -(v - w) \in W$

$\therefore w \sim v$

(iii) 推移律

$v \sim w,\ w \sim u \Rightarrow v - w \in W \quad w - u \in W$

W は 和で 閉じているので

$v - u = v - w + w - u \in W$

$\therefore v \sim u$, //

同値関係

X: 集合　$\sim$: X 上の同値関係.

$x \in X$ に対して

$$C(x) = \{ y \in X \mid x \sim y \}$$

を x の同値類という.

このとき. $C(x) \cap C(x') \neq \phi \Rightarrow C(x) = C(x')$.

($\Leftarrow$) は明らか.

($\Rightarrow$) $y \in C(x) \cap C(x')$ を一つ取る.

このとき. $x \sim y$　$x' \sim y$ がいえる.

$\therefore$ $x \sim y$　$y \sim x'$ が従い.

推移律より $x \sim x'$ が従う.

$y' \in C(x)$ について $x \sim y'$ かつ $x' \sim x$

がいえるので、$x' \sim y'$ が従う.

$\therefore$ $y' \in C(x')$ つまり $C(x) \subset C(x')$

逆も同様にいえ, $\therefore$ $C(x) = C(x')$ が従う. //

$X/\!\sim \; = \{ C(x) \mid x \in X \}$: 同値類全体の集合.

これを X の $\sim$ による商集合という.

このとき,

$$X = \bigsqcup_{C \in X/\sim} C$$

がいえる.

また、$\lambda \in \Lambda = X/\sim$ に対し　$x_\lambda \in C_\lambda$ を一つ取ると、$C_\lambda = C(x_\lambda)$ がいえ

$$\lambda \longmapsto C_\lambda$$

$$X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} C(x_\lambda)$$

となる。このとき、$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を代表元という。

$$\begin{array}{ccc} \pi : X & \to & X/\sim \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & C(x) \end{array}$$

を自然な射という。

例　$f : X \to Y$ ：全射写像

X 上の同値関係を

$x, y \in X$ に対して　$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

で定める．これは同値関係になる．

このとき，

$$\begin{array}{rcl} h: X/\sim & \to & Y \\ C(x) & \mapsto & f(x) \end{array}$$

は well-defined で全単射．

さらに

$$\begin{tikzcd} & x \in X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ C(x) \in X/\sim \arrow[rr, "h"] \arrow[rr, bend right] & & Y \ni f(x) \end{tikzcd}$$

つまり，

$f = h \circ \pi$ が成立つ．

$\because$ $y \in C(x)$ を取ると、$x \sim y$ より、$f(x) = f(y)$ が成り立つ。

$\therefore$ $h: X/\sim \to T$ は代表元 x の取り方に依らない。

$$C(x) \mapsto f(x)$$

$\therefore$ h は well-defined.

このとき、$f = h \circ \pi$ がいえ

f が全射より、h も全射。

さらに $f(x) = f(y) \Rightarrow x \sim y \Rightarrow C(x) = C(y)$ と

がいえる。$\therefore$ h は単射。 //

例 $\mathbb{Z}$　$n \in \cancel{\mathbb{Z}}\ \mathbb{N}$

$x, y \in \mathbb{Z}$ に対して　$x \sim y \Leftrightarrow n \mid x - y$.

$C(x) = \overline{x}$ と書く.

すると, $\mathbb{Z}/\sim \; = \{ \overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1} \}$ となる.

$\mathbb{Z}/\sim$ を $\mathbb{Z}/(n)$ や $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ などと書く.

<u>例</u> V: $\mathbb{R}$上ベクトル空間

$W \subset$: 部分空間

$$v \sim w \iff v - w \in W$$

$V/\sim$ を V/W などと書く.

このとき, $C(v) = v + W$ が言える.

$$\pi : \begin{array}{ccc} V & \to & V/W \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ v & \mapsto & v + W \end{array}$$ となる,