現代数学の流れ　第2回

前回の復習

A, B : 集合

和 : $A \cup B = \{x \mid x \in A$ または $x \in B\}$

共通部分 : $A \cap B = \{x \mid x \in A$ かつ $x \in B\}$

差 : $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$

これらの演算について様々な演算法則を学んだ。

ド・モルガンの法則

定理1　X, A, B : 集合

(1) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

(2) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

補集合

X: 集合　$A \subset X$: 部分集合

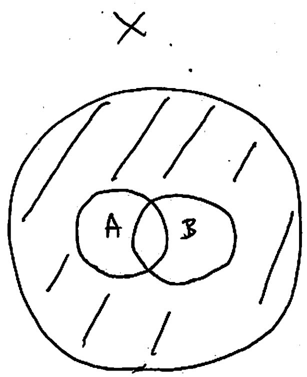
このとき、$A^c = X \setminus A$ と定義し、A^c を A の補集合という。

X を普遍集合という。

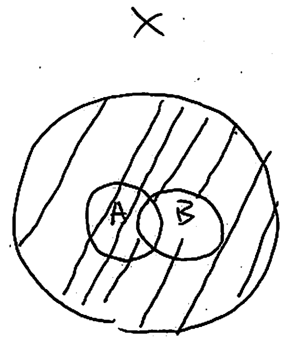
定理2　X: 集合、$A, B \subset X$: 部分集合

(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.



$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$



$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(1) 定理1より

$$(A \cup B)^c = X - (A \cup B)$$
$$= (X - A) \cap (X - B)$$
$$= A^c \cap B^c$$

(2) 省略

//

命題3 X: 集合　A、$B \subset X$: 部分集合.

このとき、以下が成り立つ.

(1) $(A^c)^c = A$　(2) $X^c = \phi$　(3) $\phi^c = X$

(4) $X = A \cup A^c$　(5) $A \cap A^c = \phi$　(6) $A \setminus B = A \cap B^c$

(7) $(A \cup B) = (A^c \cap B^c)^c$

(1)
$$(A^c)^c = \{x \in X \mid x \notin A^c\}$$
$$= \{x \in X \mid x \in A\} = A.$$

(2)、(3) 省略.

5

(4) $X = \{x \in X \mid x \in A$ または $x \notin A\}$

$= \{x \in X \mid x \in A$ または $x \in A^c\}$

$= A \cup A^c$

(5) $A \cap A^c = \{x \in X \mid x \in A$ かつ $x \in A^c\}$

$= \{x \in X \mid x \in A$ かつ $x \notin A\}$

$= \phi$

(6) $A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$

$= \{x \in X \mid x \in A$ かつ $x \in B^c\}$

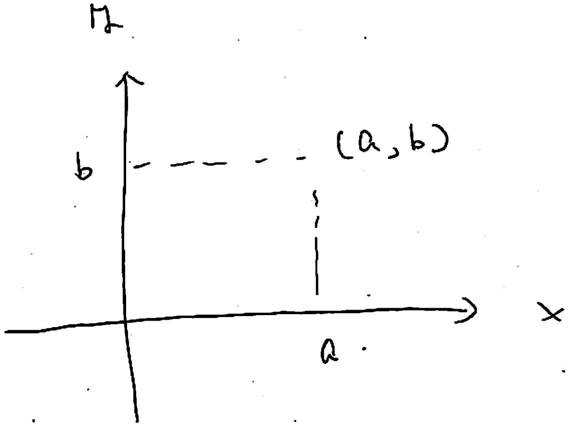
$= A \cap B^c$

(7) $(A^c \cap B^c)^c = (A^c)^c \cup (B^c)^c$

$$= A \cup B \quad //$$

直積

平面



$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

と表す.

このとき, $a \neq b$ ならば $(a,b) \neq (b,a)$ である.

このような (a,b) を順序対という.

A, B: 集合

AとBの直積とは,

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ かつ } b \in B \}$$

$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ かつ } b = b'$$

である.

例　$A = \{1, 2, 3\}$　$B = \{1, 2\}$

このとき.　$A \times B = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2) \}$

例　A のサイズが n　B のサイズが m のとき.

$A \times B$ のサイズは nm である.

$A_1, \cdots, A_n$: 集合.

$(a_1, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i$

という組を考える.

このとき、

$$(a_1, \cdots, a_n) = (a_1', \cdots, a_n')$$

$\Leftrightarrow$ 任意の $i = 1, \cdots, n$ について $a_i = a_i'$

がいえる。$A_1, \cdots, A_n$ の直積を

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{ (a_1, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i \}$$

と定める。A, B, C を集合とすると、

$$(A \times B) \times C = \{ ((a, b), c) \mid a \in A, b \in B, c \in C \}$$

だが $((a, b), c)$ と (a, b, c) を同一視して

$$(A \times B) \times C = A \times B \times C$$

とみなす。

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{個}}$ $\quad A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{個}}$

<u>命題よ</u> 集合 A、B、C について 以下が成り立つ

(1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(3) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(4) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

⊙ 省略. //

__命題6__ X, Y: 集合 $A \subset X$, $B \subset Y$: 部分集合

このとき $(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$

(証) 省略。

__写像__

A, B: 集合

写像 $f: A \to B$ とは 任意の A の元 $a \in A$ に対して $f(a) \in B$ を対応させる規則のこと。

$$\begin{array}{cccc} f: & A & \to & B \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

などと書く。A を始域または定義域, B を終域または値域という

例

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x+2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \mapsto & x+2 \end{array}$$

- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(y) = y^2+1$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ y & \mapsto & y^2+1 \end{array}$$

- $h: \{z \in \mathbb{R} \mid z \neq 1\} \to \mathbb{R}$ $\quad h(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$

$$\begin{array}{ccc} \{z \in \mathbb{R} \mid z \neq 1\} & \to & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ z & \mapsto & \dfrac{z+1}{z-1} \end{array}$$

- $k: \{w \in \mathbb{R} \mid -1 \leq w \leq 1\} \to \mathbb{R}$ $\quad k(w) = \sqrt{1-w^2}$

$$\begin{array}{ccc} \{w \in \mathbb{R} \mid -1 \leq w \leq 1\} & \to & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ w & \mapsto & \sqrt{1-w^2} \end{array}$$

例 置換

$\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$

$\sigma = (1\,2\,3)$

$$\begin{array}{ccc} \in & & \\ 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 1 \\ 4 & \mapsto & 4 \end{array}$$

例 $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2\}$

Q. AからBへの写像は何通りあるか?

A. $2^3 = 8$ 通り.

$f : A \to B$

$$\begin{array}{ccc} \in & & \in \\ 1 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 2 \end{array}$$

例 線形写像

A: $m \times n$ 行列.

$$\begin{array}{ccccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & v & \mapsto & Av \end{array} \qquad \mathbb{R}^m = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \middle| \ x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$f: A \to B$: 写像

$a \in A$ に対して　$f(a) \in B$ を　a の像という。

このとき、a を ~~ba~~ $b = f(a)$ の原像または逆像という。

$f: A \to B$
　　　　：2つの写像
$g: A \to B$

このとき f, g が等しいとは任意の $a \in A$ に対して $f(a) = g(a)$ が成り立つことをいう。

このとき、$f = g$ または $g = f$ と書く。

f, g が等しくないとき、つまり $f(a) \neq g(a)$ となる $a \in A$ が存在するとき

$f \neq g$ または $g \neq f$ と書く.

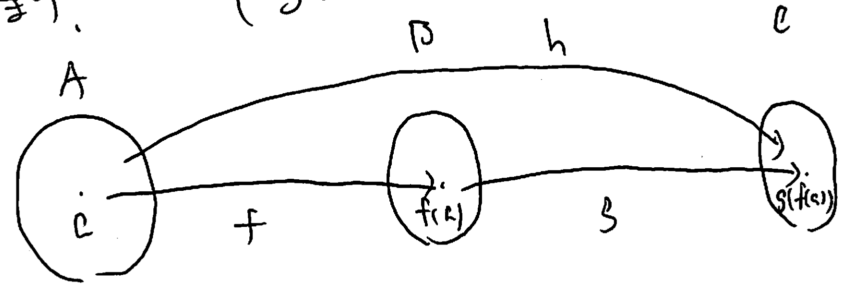
A, B, C : 集合

$f : A \to B \quad g : B \to C$: 写像

このとき、f と g の合成写像 $h = g \circ f : A \to C$ を

$$
\begin{array}{cccc}
h: & A & \to & C \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & a & \mapsto & g(f(a))
\end{array}
$$

で定める. つまり、$(g \circ f)(a) = g(f(a))$



例) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x+2$ $\quad g(x) = x^2+1$

このとき、

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = x^2+3$$

$$g \circ f(x) = g(x+2) = x^2+4x+5$$

$$f \circ f(x) = f(x+2) = x+4$$

$$g \circ g(x) = g(x^2+1) = x^4+2x^2+2$$

例) A: $m \times n$ 行列

B: $n \times l$ 行列

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & v & \mapsto & Av \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}^l & \to & \mathbb{R}^n \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & w & \mapsto & Bw \end{array}$$

$f \circ g: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ $\qquad f \circ g(w) = f(g(w)) = f(Bw) = ABw.$

定理7　X, Y, Z, W：集合

$f: X \to Y$，$g: Y \to Z$；$h: Z \to W$：写像

このとき、

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

がいえる。

$x \in X$ について

$$
\begin{aligned}
(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\
&= h(g(f(x))) \\
&= h \circ g(f(x)) \\
&= (h \circ g) \circ f(x) \quad //
\end{aligned}
$$

$f: A \to B$ 写像　　$A_1 \subset A$：部分集合

このとき、$f(A_1) := \{ f(a) \mid a \in A_1 \}$ を A_1 の f による像という。

$B_1 \subset B$: 部分集合

$$f^{-1}(B_1) := \{ a \in A \mid f(a) \in B_1 \}$$

を B_1 の f による逆像または原像という.

命題8　$f : A \to B$: 写像　$A_1, A_2 \subset A$: 部分集合

$B_1, B_2 \subset B$: 〃

このとき以下がいえる.

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(4) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(5) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$

(6) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$

(7) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$

(8) $f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$

(1) $f(A_1 \cup A_2) = \{f(a) \mid a \in A_1 \cup A_2\}$

$= \{f(a) \mid a \in A_1$ または $a \in A_2\}$

$= \{f(a) \mid a \in A_1\} \cup \{f(a) \mid a \in A_2\}$

$= f(A_1) \cup f(A_2)$

(2) $b \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow$ ある $a \in A_1 \cap A_2$ が存在して $b = f(a)$

このとき、$f(a) \in f(A_1)$ かつ $f(a) \in f(A_2)$ より

$b = f(a) \in f(A_1) \cap f(A_2)$ $\therefore f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = \{a \in A \mid f(a) \in B_1 \cup B_2\}$

$= \{a \in A \mid f(a) \in B_1$ または $f(a) \in B_2\}$

$= \{a \in A \mid f(a) \in B_1\} \cup \{a \in A \mid f(a) \in B_2\}$

$= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(4) 全て省略.

(5) $a \in A_1$ について $f(a) \in f(A_1)$ より, $a \in f^{-1}(f(A_1))$

∴ $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$

(6) $b \in f(f^{-1}(B_1))$ について ある $a \in f^{-1}(B_1)$ が存在し

$b = f(a) \in B_1$

∴ $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$

(7) $b \in f(A_1) \setminus f(A_2)$ について

$b = f(a)$ となる $a \in A_1$ が取れる.

しかし $b \notin f(A_2)$ より, $a \notin A_2$ がいえる.

∴ $a \in A_1 \setminus A_2$ より $b = f(a) \in f(A_1 \setminus A_2)$

∴ $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$

(8) $f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) = \{a \in A \mid a \in f^{-1}(B_1)$ かつ $a \notin f^{-1}(B_2)\}$

$= \{a \in A \mid f(a) \in B_1$ かつ $f(a) \notin B_2\}$

$= \{a \in A \mid f(a) \in B_1 \setminus B_2\}$

$= f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$

//