Riesz (リース)の表現定理

（吉田・河田・岩村『位相解析の基礎』岩波書店 pp. 116〜119 を参照）

Hilbert space X 上の 有界線形汎関数 $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto f(x)$$

すなわち, $\exists M(\geq 0) \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ |f(x)| \leq M\|x\|$.

に対して, $\forall x \in X$, $f(x) = \langle v_f, x \rangle$ となるような $v_f \in X$ が一意的に存在する。

すなわち, 線形汎関数 $f \in X^*$ は, $v_f \in X$ で表現される.

線形汎関数の値 $f(x)$ は, 内積 $\langle v_f, x \rangle$ で表現される.

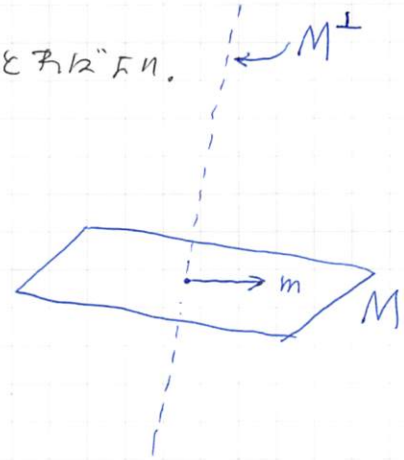
証明の方針

f が恒等的に 0 だったら, $v_f = 0$ (null vector) にとればよい.

f が恒等的に 0 ではなければ,

$$\mathrm{Ker}\, f := \{ m \in X \mid f(m) = 0 \} = M$$

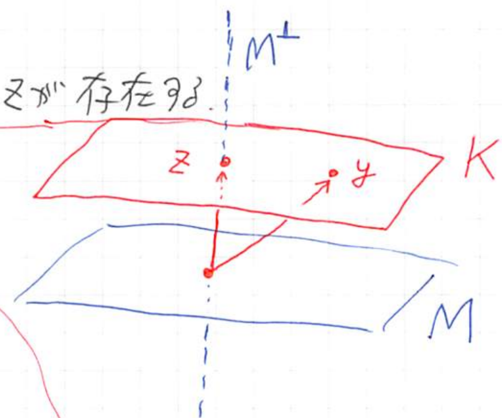
とおくと, M は X の閉部分空間であり, $M \neq X$.



なので, $y \in X$ で, $y \notin M$ なる y が存在する.

y を通り, M に平行な面 $K = y + M$ が定まり,

そのような $z \in K$ でノルム $\|z\|$ が最小になるような z が存在する.

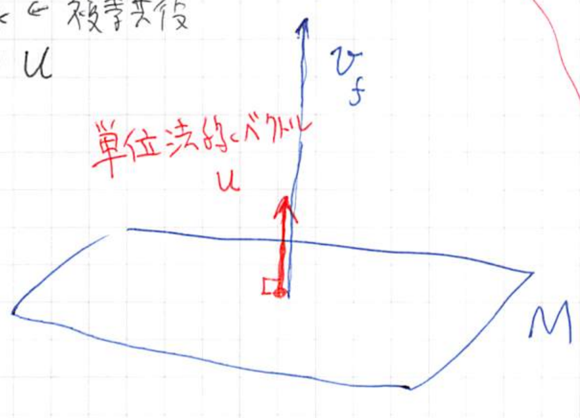


このとき $z \in M^{\perp}$ かつ $z \neq 0$

さらに ~~$\|z\| = 1$~~ $u = \dfrac{z}{\|z\|}$ とおいて,

$$v_f := f(u)^{*} u \quad (* \leftarrow \text{複素共役})$$

と定めればよい.



これを示すときに X が完備であることを使う。
（M が X の閉部分空間になり, 極限操作で閉じている）

リースの定理を順を追って証明する。

1. 有界線形汎関数は連続写像である。
(一様)

$^\forall \varepsilon\,(>0) \in \mathbb{R}$ に対しても、$\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ とおけば

$\|x_1 - x_2\| < \delta$ ならば

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1 - x_2)| \le M\,\|x_1 - x_2\|$$

$$\le M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

これは写像 f が一様連続であることに他ならない ■

2. $M := \mathrm{Ker}\, f := \{ m \in X \mid f(m) = 0 \} \subset X$

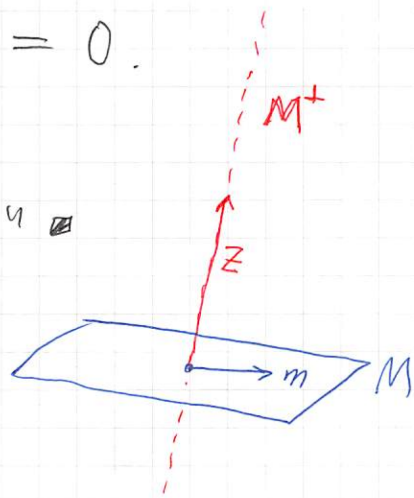
とおいたものは X の閉部分空間である。

vectorspace として subspace になっていることは明らか。

M の点列 $m_1, m_2, m_3, \cdots \in M$ が X の中で収束点 $m_\infty \in X$ を持つならば

$$f(m_\infty) = f\left(\lim_{i\to\infty} m_i\right) \underset{f\text{の連続性}}{=} \lim_{i\to\infty} f(m_i) = 0.$$

よって $m_\infty \in M$. これは M が閉であることに他ならない ■



3. $\underset{M\text{の直交補空間}}{M^\perp} := \{ z \in X \mid {}^\forall m \in M,\ \underset{X\text{の内積}}{\langle z, m \rangle} = 0 \}$

とおいたものは、X の閉部分空間である。

∵ 内積の連続性から明らか。

4. f が恒等的に 0 $\left({}^\forall x \in X,\ f(x) = 0\right)$ でなければ、

$\mathrm{Ker}\, f$ は X と一致しない。

つまり $y \in X$ で $f(y) \neq 0$ となるものが存在する。

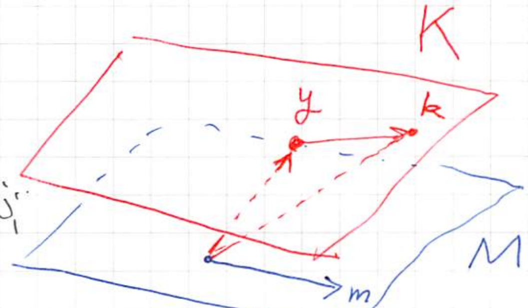
そりゃそうだ。

以下、f は恒等的に 0 ではないとして、$M := \mathrm{Ker}\, f \subsetneq X$ とする。

5. $f(y) \neq 0$ なる $y \in X$ を一つ選んで

$$K := y + M := \{ y + m \mid m \in M \}$$
$$= \{ k \in X \mid k - y \in M \}$$

とおく。これを「y を通り M に平行な超平面」と呼ぶ



このとき,

$\forall k_1, \forall k_2 \in K, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\alpha k_1 + (1-\alpha) k_2 \in K$$

が成り立つ.

(:) $k_1 - y \in M$ かつ $k_2 - y \in M$ であり, M は vector subspace なので

$\alpha(k_1 - y) \in M$ かつ $(1-\alpha)(k_2 - y) \in M$ であり

$$\alpha(k_1 - y) + (1-\alpha)(k_2 - y) = \{\alpha k_1 + (1-\alpha) k_2\} - y \in M.$$

ゆえに $\alpha k_1 + (1-\alpha) k_2 \in K$ ■

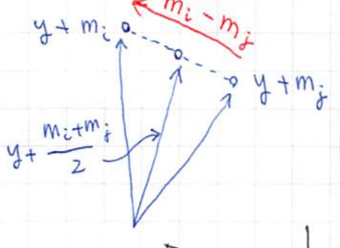
6. $$d := \inf_{k \in K} \|k\| = \inf_{m \in M} \|y + m\|$$

は有限値として存在し,

M の点列 $m_1, m_2, \cdots$ で $\lim_{i \to \infty} \|y + m_i\| = d$ を満たすものが存在する.

このとき, 平行四辺形定理(中線定理) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$

で $w = \dfrac{m_i - m_j}{2}$, $v = y + \dfrac{m_i + m_j}{2}$ とおいて.

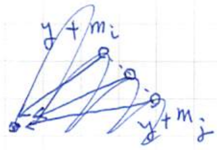


$$\|y + m_i\|^2 + \|y + m_j\|^2 = 2\left(\left\|\frac{m_i - m_j}{2}\right\|^2 + \left\|y + \frac{m_i + m_j}{2}\right\|^2\right)$$

よって

$$\frac{1}{2}\|m_i - m_j\|^2 = \underbrace{\|y + m_i\|^2}_{i \to \infty \text{ で } d^2 \text{ に近づく}} + \underbrace{\|y + m_j\|^2}_{j \to \infty \text{ で } d^2} - \underbrace{2\left\|y + \frac{m_i + m_j}{2}\right\|^2}_{i,j \to \infty \text{ で } -2d^2 \text{ に近づく}}$$

$\frac{m_i + m_j}{2} \in M$ ゆえに K の点



したがって $i, j \to \infty$ で $\|m_i - m_j\| \to 0$ であり $\{m_i\}$ は Cauchy 列。

M は閉(完備)なので m_∞ が存在。 $m_\infty \in M$

7. $k_\infty = y + m_\infty$ とおくと, $k_\infty \in M^\perp$.

(∵) 任意の $m \in M$ に対して, また $^\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$m_\infty + \lambda m \in M$ であり,

$$d^2 \leq \| y + (m_\infty + \lambda m) \|^2 = \| k_\infty + \lambda m \|^2$$
$$= \|k_\infty\|^2 + \lambda \langle k_\infty, m \rangle + \lambda \langle m, k_\infty \rangle + \lambda^2 \|m\|^2$$

$\|k_\infty\| = \|y + m_\infty\| = d$ なので

$$\lambda^2 \geq -2\lambda \operatorname{Re} \langle k_\infty, m \rangle$$

これが任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ について成り立つので $\operatorname{Re} \langle k_\infty, m \rangle = 0$.

~~$\operatorname{Im} \langle k_\infty, im \rangle = \operatorname{Im} i \langle k_\infty, m \rangle = \operatorname{Re} \langle k_\infty$~~

$$0 = \operatorname{Re} \langle k_\infty, im \rangle = \operatorname{Re} i \langle k_\infty, m \rangle = -\operatorname{Im} \langle k_\infty, m \rangle$$

なので $\langle k_\infty, m \rangle = 0$. つまり $k_\infty \in M^\perp$ ■

8. 任意の $y \in X$ は, $y = \underset{\substack{\cap \\ M^\perp}}{k_\infty} + \underbrace{(y - k_\infty)}_{\substack{\cap \\ M}}$ に一意的に分解できる.

9. $M^\perp \neq \{0\}$ なので $u \in M^\perp$ かつ $\|u\| = 1$ なる u が存在する.

このとき $v_f := f^*(u) u$ とおく。

$x \in M$ ならば $f(x) = 0$ かつ $\langle v_f, x \rangle = f^*(u) \langle \underset{M^\perp}{u}, \underset{M}{x} \rangle = 0$.

$x = tu \ (t \in \mathbb{C})$ ならば $f(x) = t f^*(u) = \langle v_f, x \rangle$.

$^\forall x \in X$ に対して $x_0 := x - \dfrac{f(x)}{f(u)} u$ とおけば

$$f(x_0) = 0 \quad \text{であり,} \quad x_0 \in M$$

ゆえに $0 = f(x_0) = \langle v_f, x_0 \rangle = \left\langle v_f, x - \dfrac{f(x)}{f(u)} u \right\rangle$

$$= \langle v_f, x \rangle - \frac{f(x)}{f(u)} \underbrace{\langle v_f, u \rangle}_{f(u)} = \langle v_f, x \rangle - f(x)$$

$\therefore f(x) = \langle v_f, x \rangle$.

10, $\forall x \in X$ に対して $\langle v_f, x \rangle = \langle v_f', x \rangle$ ~~とある~~るとなるから

$$v_f = v_f' \quad \blacksquare$$

$\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ に対して $\psi = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる $v, w, x, y \in \mathbb{C}$ が存在する

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$\iff \quad ad - bc = 0$

$(\Rightarrow)$ $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vx \\ vy \\ wx \\ wy \end{pmatrix}$ なので $ad - bc$

$$= (vx)(wy) - (vy)(wx)$$
$$= vwxy - vwxy$$
$$= 0.$$

$(\Leftarrow)$ $a \neq 0$ ならば $d = \dfrac{bc}{a}$

このとき $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \frac{bc}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix} \\ c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ b/a \end{pmatrix}.$

$a = 0$ ならば $bc = 0$

$b = 0$ ならば $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$c = 0$ ならば $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

魔法陣の計算は やれば必ずできます.

感想・ご意見ありがとうございました。

講義が講義ノートどおりではなかった、というクレームを
多々いただきましたが、
講義ノートの作成が時間に合わなかった、ということと、
講義ノートどおり~~の~~に講義するのであれば
ノートだけ配布して講義は必要ないと私は考えており、
講義のライブ感・アドリブ感を大切に
したいと考えています。

谷村省吾