

Riesz (リ-ズ) の表現定理

(吉田・河田・岩村『位相解析の基礎』岩波書店
pp. 116 ~ 199 を参照)

Hilbert space X 上の 有界線形汎関数 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$
 $x \mapsto f(x)$

すなわち, $\exists M (\geq 0) \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |f(x)| \leq M \|x\|.$

に対して, $\forall x \in X, f(x) = \langle v_f, x \rangle$ となるような $v_f \in X$ が一意に存在する。

すなわち, 線形汎関数 $f \in X^*$ は, $v_f \in X$ で表現される。

線形汎関数の値 $f(x)$ は, 内積 $\langle v_f, x \rangle$ で表現される。

証明の方針

f が "恒等的に 0" ならば, $v_f = 0$ (null vector) にとればよい。

f が "恒等的に 0" ではないならば,

$$\text{Ker } f := \{ m \in X \mid f(m) = 0 \} = M$$

とすると, M は X の閉部分空間であり, $M \neq X$.

よって, $y \in X$ で, $y \notin M$ なる y が存在する。

$y \in X$ 通り, M に平行な面 $K = y + M$ が定まり,

このように $z \in K$ で $\|z\|$ が最小になるような z が存在する。

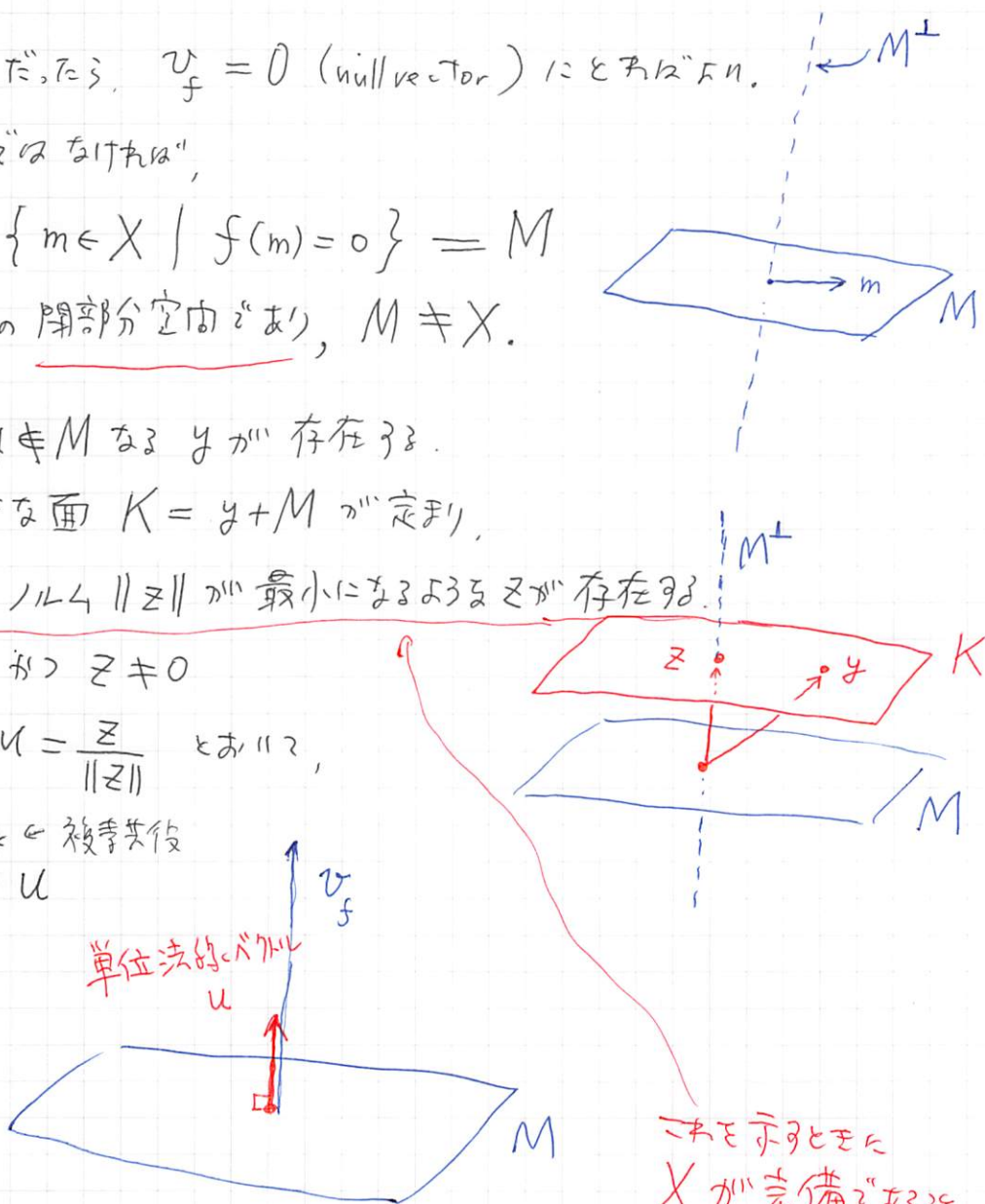
このとき $z \in M^\perp$ かつ $z \neq 0$

さらに ~~$u = \frac{z}{\|z\|}$~~ $u = \frac{z}{\|z\|}$ とおくと,

$$v_f := f(u) u$$

* ← 複素共役

と定めればよい。



これを示すために X が完備であることを使う。

(M が X の閉部分空間になり, 極限操作が成り立つ)

4-2の定理を順を追って証明する。

1. 有界線形汎関数の連続写像であること。

$\forall \epsilon (> 0) \in \mathbb{R}$ に対して $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ とおけば

$\|x_1 - x_2\| < \delta$ ならば

$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1 - x_2)| \leq M \|x_1 - x_2\|$

$\leq M \cdot \delta = M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$

これは写像 f が連続であることを示す。

2. $M := \text{Ker } f := \{m \in X \mid f(m) = 0\} \subset X$

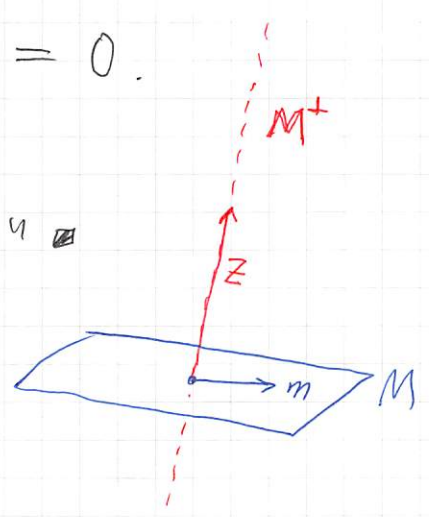
とおいたものは X の閉部分空間である。

vector space としての subspace であることを示す。

M の点列 $m_1, m_2, m_3, \dots \in M$ が X の中で収束する点 $m_\infty \in X$ を持つならば

$f(m_\infty) = f(\lim_{i \rightarrow \infty} m_i) \stackrel{f \text{ の連続性}}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} f(m_i) = 0$

よって $m_\infty \in M$ 。これは M が閉であることを示す。



3. $M^\perp := \{z \in X \mid \forall m \in M, \langle z, m \rangle = 0\}$

M の直交補空間

とおいたものは X の閉部分空間である。

∵ 内積の連続性から示す。

4. f が恒等的に 0 ($\forall x \in X, f(x) = 0$) となれば、

$\text{Ker } f$ は X と一致する。

つまり $y \in X$ として $f(y) \neq 0$ となるものが存在する。

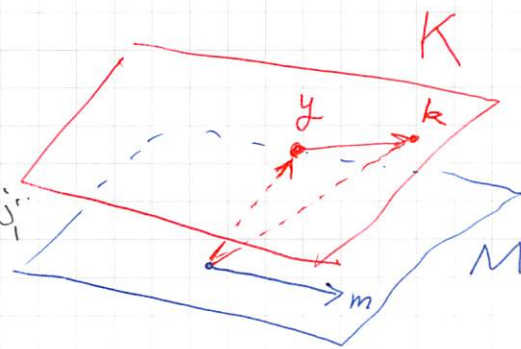
とすると

以下、 f は恒等的に 0 ではないとして、 $M := \text{Ker } f \subsetneq X$ とする。

5. $f(y) \neq 0$ なる $y \in X \ni \rightarrow$ 選んじ

$$K := y + M := \{ y + m \mid m \in M \}$$

$$= \{ x \in X \mid x - y \in M \}$$



とある。これは、 $y \in X$ に対し $M =$ 平行な超平面と呼び

このとき、

$\forall k_1, \forall k_2 \in K, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ に対し

$$\alpha k_1 + (1-\alpha)k_2 \in K$$

が成り立つ。

(\odot) $k_1 - y \in M$ かつ $k_2 - y \in M$ である、 M は vector subspace である

$\alpha(k_1 - y) \in M$ かつ $(1-\alpha)(k_2 - y) \in M$ である

$$\alpha(k_1 - y) + (1-\alpha)(k_2 - y) = \{ \alpha k_1 + (1-\alpha)k_2 \} - y \in M$$

ゆえに $\alpha k_1 + (1-\alpha)k_2 \in K$ \square

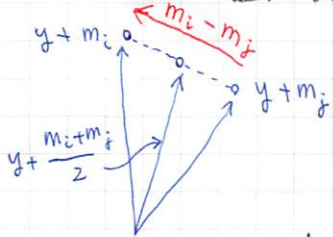
6. $d := \inf_{k \in K} \|k\| = \inf_{m \in M} \|y + m\|$

は有限値とて存在し、

M の点列 m_1, m_2, \dots として $\lim_{i \rightarrow \infty} \|y + m_i\| = d$ を満たすものが存在する。

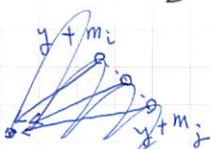
このとき、平行四辺形定理 (中線定理) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$

とある。 $v = \frac{m_i - m_j}{2}, w = y + \frac{m_i + m_j}{2}$ とある。



$$\|y + m_i\|^2 + \|y + m_j\|^2 = 2 \left(\left\| \frac{m_i - m_j}{2} \right\|^2 + \left\| y + \frac{m_i + m_j}{2} \right\|^2 \right)$$

$$\text{よって } \frac{1}{2} \|m_i - m_j\|^2 = \|y + m_i\|^2 + \|y + m_j\|^2 - 2 \left\| y + \frac{m_i + m_j}{2} \right\|^2$$



$i \rightarrow \infty$ として d^2 とある。 $j \rightarrow \infty$ として d^2 とある。 $i, j \rightarrow \infty$ として $\frac{m_i + m_j}{2} \in M$ である、 K の点である。

よって $i, j \rightarrow \infty$ として $\|m_i - m_j\| \rightarrow 0$ である、 $\{m_i\}$ は Cauchy 列。

M は閉 (完備) である、 m_∞ が存在し、 $m_\infty \in M$

7. $k_\infty = y + m_\infty$ とおくと, $k_\infty \in M^\perp$.

① 任意の $m \in M$ に対し, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対し

$$m_\infty + \lambda m \in M \text{ であり,}$$

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|y + (m_\infty + \lambda m)\|^2 = \|k_\infty + \lambda m\|^2 \\ &= \|k_\infty\|^2 + \lambda \langle k_\infty, m \rangle + \lambda \langle m, k_\infty \rangle \\ &\quad + \lambda^2 \|m\|^2 \end{aligned}$$

$$\|k_\infty\| = \|y + m_\infty\| = d \text{ であり}$$

$$\lambda^2 \geq -2\lambda \operatorname{Re} \langle k_\infty, m \rangle$$

よって 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し成立する $\operatorname{Re} \langle k_\infty, m \rangle = 0$.

~~$$\operatorname{Im} \langle k_\infty, im \rangle = \operatorname{Im} i \langle k_\infty, m \rangle = \operatorname{Re} \langle k_\infty, m \rangle$$~~

$$0 = \operatorname{Re} \langle k_\infty, im \rangle = \operatorname{Re} i \langle k_\infty, m \rangle = -\operatorname{Im} \langle k_\infty, m \rangle$$

よって $\langle k_\infty, m \rangle = 0$. よって $k_\infty \in M^\perp$.

8. 任意の $y \in X$ は, $y = \underbrace{k_\infty}_{M^\perp} + \underbrace{(y - k_\infty)}_M$ に一意に分解される.

9. $M^\perp \neq \{0\}$ である $u \in M^\perp$ かつ $\|u\| = 1$ なる u が存在する.

このとき $v_f := f^*(u)u$ とおくと,

$$x \in M \text{ ならば } f(x) = 0 \text{ かつ } \langle v_f, x \rangle = f^*(u) \langle u, x \rangle = 0.$$

$$x = tu \text{ (} t \in \mathbb{C} \text{) ならば } f(x) = t f^*(u) = \langle v_f, x \rangle.$$

$$\forall x \in X \text{ に対し } x_0 := x - \frac{f(x)}{f(u)} u \text{ であり,}$$

$$f(x_0) = 0 \text{ であり, } x_0 \in M^\perp$$

$$\text{よって } 0 = f(x_0) = \langle v_f, x_0 \rangle = \left\langle v_f, x - \frac{f(x)}{f(u)} u \right\rangle$$

$$= \langle v_f, x \rangle - \frac{f(x)}{f(u)} \underbrace{\langle v_f, u \rangle}_{f(u)} = \langle v_f, x \rangle - f(x)$$

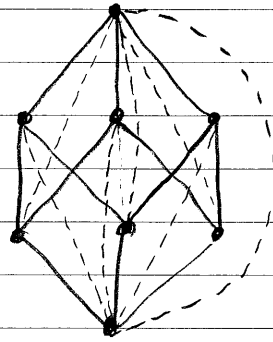
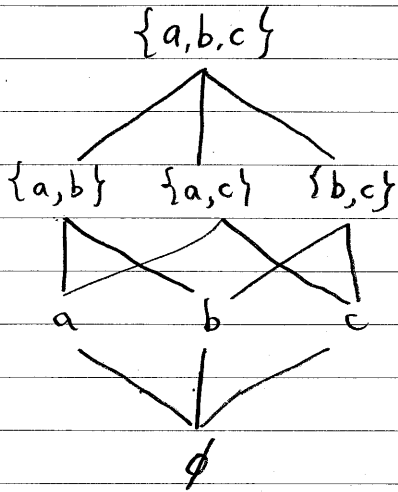
$$\therefore f(x) = \langle v_f, x \rangle.$$

$$10, \forall x \in X \text{ に対して } \langle v_f, x \rangle = \langle v_{f'}, x \rangle \text{ であるならば}$$
$$v_f = v_{f'}$$

5

レポート課題

集合 $X = \{a, b, c\}$ の部分集合の包含関係を



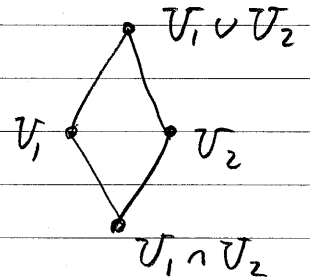
と示す。

位相の条件は,

(i) $\phi, X \in \mathcal{O}$

(ii) $U_1, U_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$

(iii) $\forall \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{\lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$



(いま、 X は有限集合なので、有限個 (結局は 2 個) の合併だけを考へればよい。
 $U_1 \cup U_2$

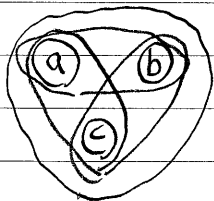
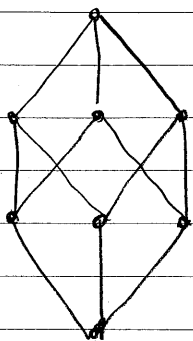
問題

3つの元からなる集合 $X = \{a, b, c\}$

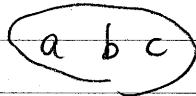
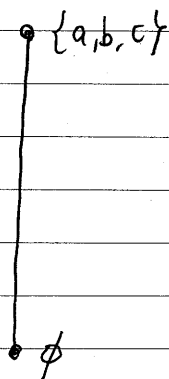
の位相が互いに同相でないものを \mathcal{O} と列挙せよ。

$X = \{a, b, c\}$ の位相の分類

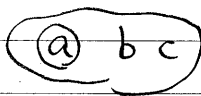
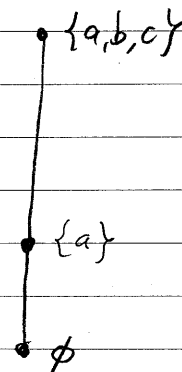
1. 離散位相



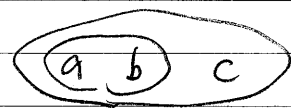
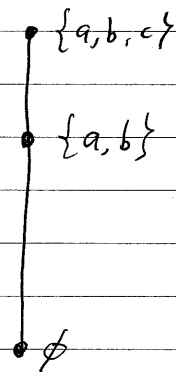
2. 密着位相



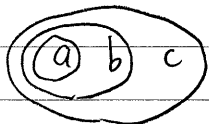
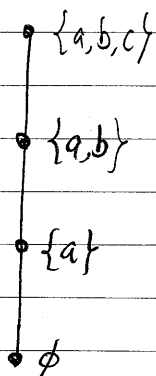
3. 一点だけ開



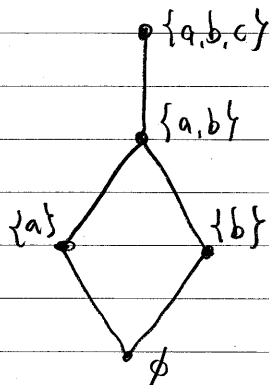
4. 二点だけ開



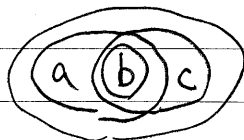
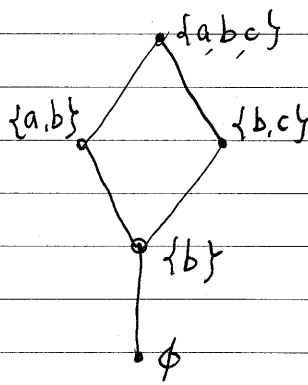
5. 一点成長型



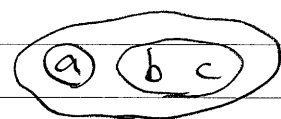
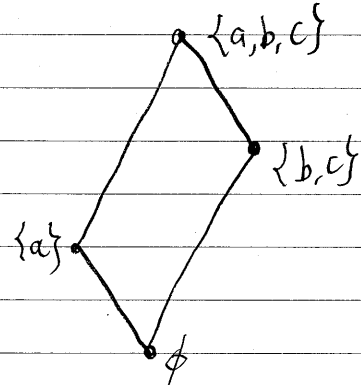
6. "グイテモト"



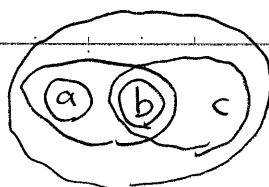
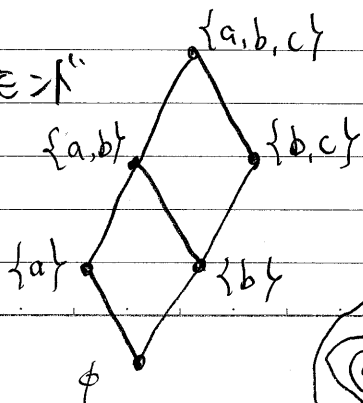
7. 上グイテモト"



8. "E, ..." "グイテモト"



9. "グワルグイテモト"



9通りの同相でない位相がある。

$$\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \text{ is } \psi = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ where } v, w, x, y \in \mathbb{C} \text{ and } \psi \neq 0$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

$$\iff ad - bc = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} vx \\ vy \\ wx \\ wy \end{pmatrix} \text{ then } ad - bc \\ &= (vx)(wy) - (vy)(wx) \\ &= vwx y - vwx y \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftarrow a \neq 0 \text{ then } d &= \frac{bc}{a} \\ \text{then } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \frac{bc}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix} \\ c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ b/a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a = 0 \text{ then } bc &= 0 \\ b = 0 \text{ then } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$c = 0 \text{ then } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

魔法陣の計算は かなり 必要 ですか。

感想。ご意見ありがとうございます。

講義が 講義ノート であり ではなく、というところを
多く いたたきましたか、

講義ノートの作成が 御 間に 合 なるか、と いうこと、

講義ノート であり、に 講義 する ので あり、

ノート だけ 配布 して 講義 は 必要 ないと 私は 考 えて あり

講義 の ライブ 感。PDR リブ 感 を 大切 に

したい と 考 えて います。

谷村 有 幸