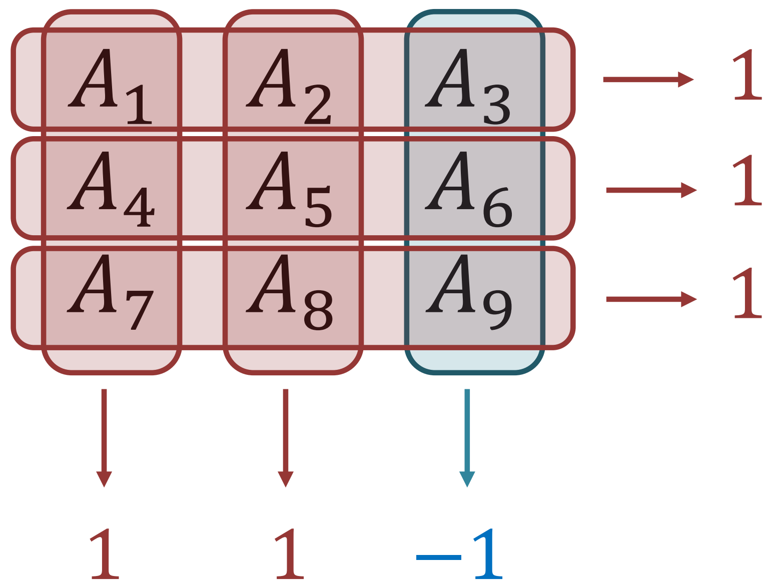
Merminの魔方陣

- David Mermin: 物性物理の研究者。Mermin-Wagnerの定理（空間次元２以下の統計系では連続対称性の自発的破れは起きない）で有名。
- Kochen-Specker定理は３次元ヒルベルト空間に作用する物理量演算子に関する命題だった。
- Merminの魔方陣は４次元ヒルベルト空間に作用する物理量演算子に関する命題。
- これも物理量の値の実在性を否定する。

Merminの魔方陣

- ９種類の物理量 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_9$
- どれも測定値は± 1, 確率的にゆらぐ。
- 縦並びまたは横並びの物理量は同時に測定・確定できる。
- 値の掛け算がこうなるように各物理量に1または-1という値を割り振ることができるか？

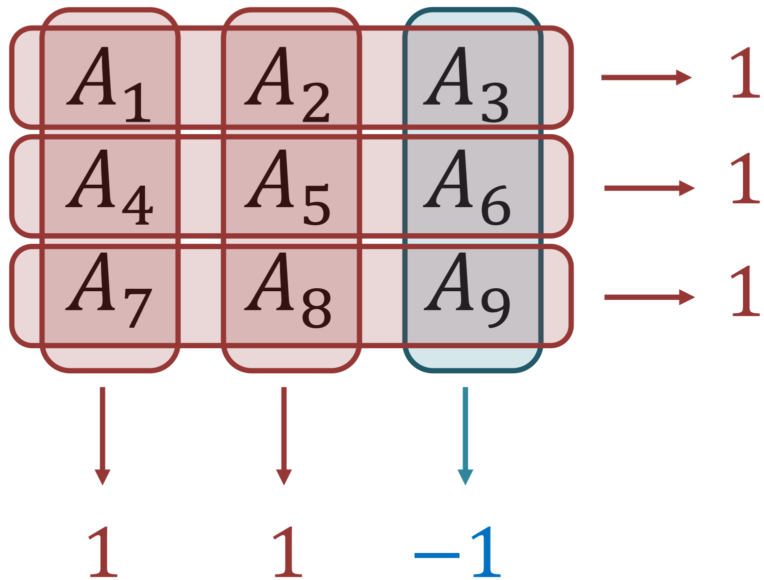


文脈依存しない実在は Merminの魔方陣を満たせない

各物理量が±1の値をとる。横並びの文脈の中で測られる物理量と、縦並びの文脈の中で測られる物理量とが（文脈に依存せずに）値を持っているとしたら、

$$
\begin{aligned}
&(A_1A_2A_3)\\
\times\ &(A_4A_5A_6)\\
\times\ &(A_7A_8A_9)\\
\times\ &(A_1A_4A_7)\\
\times\ &(A_2A_5A_8)\\
\times\ &(A_3A_6A_9)\\
=\ &A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2A_5^2A_6^2A_7^2A_8^2A_9^2\\
=\ &1
\end{aligned}
$$

になるはず。



全部の積は−1になるはず。

量子論はMerminの魔方陣を満たす

- Pauli行列 $\begin{cases} X = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ Y = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$
- $X^2 = 1, \quad Y^2 = 1, \quad Z^2 = 1$
- どれも測定値（固有値）は ± 1.
- 非可換性：$XY \neq YX$
- 縦並びまたは横並びの物理量は可換、同時測定可能。

$$\begin{matrix} X \otimes 1 & 1 \otimes X & X \otimes X \\ 1 \otimes Y & Y \otimes 1 & Y \otimes Y \\ X \otimes Y & Y \otimes X & Z \otimes Z \end{matrix}$$

量子論はMerminの魔方陣を満たす

- Pauli行列 $X = \sigma_x,\ Y = \sigma_y,\ Z = \sigma_z$

$$X^2 = 1, \qquad Y^2 = 1, \qquad Z^2 = 1$$

- どれも測定値（固有値）は ± 1.
- 非可換性：$XY = iZ, YX = -iZ, XYZ = i, YXZ = -i$
- 縦並びまたは横並びの物理量は可換、同時測定可能。
- しかも縦横の掛け算に関してMerminの条件を満たす。

$X\otimes 1$	$1\otimes X$	$X\otimes X$	$\to 1$
$1\otimes Y$	$Y\otimes 1$	$Y\otimes Y$	$\to 1$
$X\otimes Y$	$Y\otimes X$	$Z\otimes Z$	$\to 1$
$\downarrow$ 1	$\downarrow$ 1	$\downarrow$ -1	