2020年 9月23,24,25 実施

集中講義「現代の量子論」 by 谷村省吾

目次

古典力学系も，場の量子論も扱える．

Segal流の量子力学の代数的定式化

平衡状態の有限温度の統計力学も．物理量の平均値が求められるようなシステムなら非平衡状態も扱える．

系		代数のことば
物理量全体の集合	⟶	$\mathcal{A}$: 物理量代数 observable algebra C^*-algebra
一つの物理量	⟶	$A \in \mathcal{A}$ self-adjoint element $A^* = A$
値	⟶	$\mathbb{C}$ ないし $\mathbb{R}$ スペクトル値 spectral value
運動	⟶	$\mathcal{A}$ の代数的自己同型群 $\alpha_t : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ $\alpha_t \circ \alpha_s = \alpha_{s+t}$
状態	⟶	$\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 期待値汎関数

$\mathcal{A}$が可換代数の場合，

$\mathcal{A}$が非可換代数の場合

古典力学系（実在論＋確率論）

指標（純粋状態）x

の確率的混合 $p_\omega(x)$

$$\omega(A) = \int_X A(x) p_\omega(x)\, dx$$

$$X = S_p(\mathcal{A})$$

量子力学 Hilbert space formalism

GNS構成された

Hilbert space $\mathcal{H}_\omega$

cyclic vector ψ_ω

operator representation π_ω

$$\omega(A) = \langle \psi_\omega, \pi_\omega(A) \psi_\omega \rangle$$

$\pi_\omega(\mathcal{A})$の部分可換代数への制限

文脈依存性

~~確率~~解釈

標準量子力学で重要な概念は固有値と固有ベクトルだった。

$Av = \lambda v$ となるような $v \neq 0$ があれば λ を A の固有値といい、

operator vector scalar

v を λ に属する固有ベクトルといった。

代数的量子論では、operator の作用を受けるベクトル空間 V がさしあたって導入されていないが、固有値に相当する概念をどう定めるのか？

λ が固有値であるための必要十分条件 $(\lambda \mathbb{1} - A)$ が逆元を持たない。

identity operator $\mathbb{1} v = v$

$$\lambda v = Av$$
$$\lambda v - Av = 0$$
$$(\lambda \mathbb{1} - A)v = 0$$

もしも $(\lambda \mathbb{1} - A)$ の逆元があったら $(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} \cdot (\lambda \mathbb{1} - A) v = (\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} \cdot 0$

$$\mathbb{1} \cdot v = 0$$
$$v = 0$$ 固有ベクトルの条件に反する。

定義 スペクトル値 spectral value

単位元 $\mathbb{1}$ を持つ C^*-algebra $\mathcal{A}$ において、

（単位元がなければないで、スペクトル値の定義はなんとかなる）

A のレゾルベント集合 (resolvent)

$$\mathrm{Reso}\,A := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda \mathbb{1} - A) \text{ の逆元が存在する}\}$$

A のスペクトル集合

$$\sigma(A) := (\mathbb{C} \setminus \mathrm{Reso}\,A)$$

また $(\lambda \mathbb{1} - A)$ の逆元が存在しないとき、λ を A のスペクトル値という。

~~例 連続関数環や多項式環なら スペクトル値は 関数の零点~~

定理 $\mathcal{A}$: 単位元のある C^*-alg において

$A \in \mathcal{A}$ $A^* = A$ のとき A を自己共役元という。

このとき $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$ が成り立つ。

つまり A のスペクトル値 λ は実数であり、$-\|A\| \leq \lambda \leq \|A\|$。

定義　状態 = 期待値汎関数 (state, expectation-value functional)

$\mathcal{A}$:(単位元付き) C^*-algebra　　$A, B, C \in \mathcal{A}$　　$\lambda \in \mathbb{C}$

$\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$　が以下を満たするならば、ωを$\mathcal{A}$上の状態という：

$A \longmapsto \omega(A)$

1. $\omega(A+B) = \omega(A) + \omega(B)$
2. $\omega(\lambda A) = \lambda \cdot \omega(A)$
3. $\omega(A^* \cdot A) \in \mathbb{R}$ かつ $\omega(A^*A) \geq 0$
4. $\|\omega(A)\| := \sup\{|\omega(A)| \mid A \in \mathcal{A}, \|A\| \leq 1\} = 1$

$\mathbb{1} \in \mathcal{A}$ なら $\omega(\mathbb{1}) = 1$.

定理　$\omega(A^*B) = \overline{\omega(B^*A)}$ ← 複素共役.

とくに $\omega(A^*) = \overline{\omega(A)}$

(証明) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$\omega\left((\lambda A+B)^* \cdot (\lambda A+B)\right) = \bar{\lambda}\lambda\,\omega(A^*A) + \bar{\lambda}\,\omega(A^*B) + \lambda\,\omega(B^*A) + \omega(B^*B)$

は非負実数

$\lambda = 1$ とおいて $\omega(A^*B) + \omega(B^*A) = \omega((A+B)^* (A+B)) - \omega(A^*A) - \omega(B^*B)$

$=: 2u$ は実数.

$\lambda = i$ とおいて $-i\omega(A^*B) + i\omega(B^*A) = \omega((iA+B)^*(iA+B)) - \omega(A^*A) - \omega(B^*B)$

$=: 2v$ も実数.

よって $\omega(A^*B) = u + iv$

$\omega(B^*A) = u - iv$ となる。

とくに $B = \mathbb{1}$ とおけば $\omega(A^*) = \overline{\omega(A)}$.

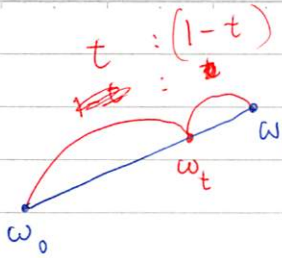
定理　state に関する Schwartz の不等式 $|\omega(A^*B)|^2 \leq \omega(A^*A) \cdot \omega(B^*B)$

定義 混合状態 (mixed state) と 純粋状態 (pure state)

$\mathcal{A}$: C^*-algebra

ω_0, ω_1 : $\mathcal{A}$ 上の states

$t \in \mathbb{R}$ $0 \leq t \leq 1$ に対し,



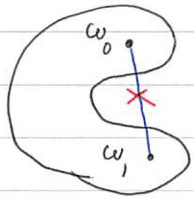
$$\omega_t := (1-t)\,\omega_0 + t\,\omega_1$$

つまり

$$\omega_t(A) = (1-t)\cdot\omega_0(A) + t\cdot\omega_1(A)$$ で $\omega_t : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ を定める.

これを ω_0 と ω_1 の 比率 $(1-t):t$ の 混合状態という. (これも $\mathcal{A}$ 上の state になる.)

定理 $\mathfrak{S}_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}$ 上の states 全体の集合 (状態空間) は 凸集合



こういうことは起きない.

定義

$\omega \in \mathfrak{S}_{\mathcal{A}}$ が混合状態 (内点) である $:\Longleftrightarrow$ ${}^\exists t \in \mathbb{R}$ $(0 < t < 1)$, ${}^\exists\omega_0, {}^\exists\omega_1 \in \mathfrak{S}_{\mathcal{A}}$ $(\omega_0 \neq \omega_1)$
$$\omega = (1-t)\,\omega_0 + t\,\omega_1.$$

$\omega \in \mathfrak{S}_{\mathcal{A}}$ が純粋状態 (端点 (extremal point)) である $:\Longleftrightarrow$ 混合状態でない

$\Longleftrightarrow$ 「$\omega_0, \omega_1 \in \mathfrak{S}_{\mathcal{A}}$ $\omega = (1-t)\,\omega_0 + t\,\omega_1$ ならば $t=0$ または $t=1$ または $\omega_0 = \omega_1$」

例題 いろいろな 凸図形を描いてみよ.
それらの端点を指摘せよ.

端点への分解ができるケースとできないケース
分解が一意的なものと, 一意的でないもの.

定義

一般に k個の実数 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ (おのおの $t_j \geq 0$ かつ $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$)
と k個のstates $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k \in \mathfrak{S}_{\mathcal{A}}$ に対し

$$\omega = t_1\omega_1 + t_2\omega_2 + \cdots + t_k\omega_k$$

もまた混合状態である.

以上は可換 C^*-alg にも非可換 C^*-alg にも適用する話。
ここからしばらく可換 C^*-alg にだけ適用する話。

定義 指標 (character)
$\mathcal{A}$: 可換 C^*-algebra $\mathcal{A} \neq \{0\}$
$\chi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ が以下を満たせば、χ を $\mathcal{A}$ 上の指標という。
$A \longmapsto \chi(A)$

1. $\chi(A+B) = \chi(A) + \chi(B)$
2. $\chi(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \chi(A)$
3. $\chi(AB) = \chi(A) \cdot \chi(B)$ ← これが state では要請しなかった性質
4. $\chi(A^*) = \overline{\chi(A)}$ 複素共役
5. $|\chi(A)| \leq \|A\|$
6. ${}^\exists A \in \mathcal{A}, \ \chi(A) \neq 0.$

定理 $\mathbb{1} \in \mathcal{A}$ ならば $\chi(\mathbb{1}) = 1$ ∵ $\chi(A) = \chi(A \cdot \mathbb{1}) = \chi(A) \cdot \chi(\mathbb{1})$
$\chi(A) \neq 0$ なら $\chi(\mathbb{1}) = 1$.

定理 $\chi(A)$ は A のスペクトル値

指標は $\mathcal{A}$ の同時固有ベクトルのようなもの
各固有値を与える写像
weight ともいう。

~~$(\lambda\mathbb{1} - A)$ の逆元 B があれば $(\lambda\mathbb{1} - A) \cdot B = \mathbb{1}$~~
~~$\chi((\lambda\mathbb{1} - A) \cdot B) = \chi(\mathbb{1})$~~
~~$\{\lambda \cdot \chi(\mathbb{1}) - \chi(A)\} \cdot \chi(B) = \chi(\mathbb{1})$~~
~~$\{\lambda - \chi(A)\} \cdot \chi(B) = 1.$~~
~~∴ $\chi(A) \neq \lambda$~~

$B = \chi(A)\mathbb{1} - A$ とおいて B^{-1} があれば $B \cdot B^{-1} = \mathbb{1}$
$0 = \{\chi(A) - \chi(A)\}\, \chi(B^{-1}) = \chi(\mathbb{1}) = 1$
となって矛盾。
よって B^{-1} はない。
$\chi(A)$ はスペクトル値。

コメント character は state の一種である。

解釈 character は、すべての物理量の値が確定している状態である。
state χ において物理量を測れば確実に測定値 $\chi(A)$ を得る。

定義 スペクトル空間

$\mathcal{A}$: 可換 C^*-algebra

$Sp(\mathcal{A})$: $\mathcal{A}$ 上の character 全体の集合 $Sp(\mathcal{A}) = \{\chi_1, \chi_2, \cdots\}$

のちほど適切な位相を入れて Hausdorff 空間になる.

$$\hat{\cdot} : \mathcal{A} \longrightarrow C_0(Sp(\mathcal{A}))$$

$$A \longmapsto \hat{A} : Sp(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\chi \longmapsto \hat{A}(\chi) := \chi(A).$$

定理 リース・ラドン・マルコフ (Riesz - Radon - Markov) の定理.

$\mathcal{A}$: 可換 C^*-alg

ω : $\mathcal{A}$ 上の state

に対して,

$$\omega(A) = \int_{Sp(\mathcal{A})} \hat{A}(\chi) \underbrace{\rho_\omega(\chi) d\chi}_{d\mu_\omega(\chi)} \qquad (*)$$

となるような $Sp(\mathcal{A})$ の上の確率測度 μ_ω が存在する.

(適当な意味で)一意的に

コメント この式 $(*)$ は,

可換 C^*-alg $\mathcal{A}$ 上の一般の state ω は, 純粋状態 (character) χ たちの混合で与えられる.

と言っている.

重みづけ係数

離散的混合 $\omega = \rho_1 \chi_1 + \rho_2 \chi_2 + \cdots + \rho_k \chi_k$ $\quad 0 \leq \rho_j \leq 1$, $\sum_j \rho_j = 1$.

連続的混合 $\omega = \int \rho_\omega(\chi) \chi \, d\chi$

$$\omega(A) = \int \rho_\omega(\chi) \underbrace{\chi(A)}_{= \hat{A}(\chi)} d\chi$$

コメント この式 $(*)$ は,

A の期待値 $\omega(A)$ は, 確率密度 $\rho_\omega(\chi)$ による関数値 $\hat{A}(\chi)$ の平均値に等しい.

と言っている.

すべての物理量の値の同時実在性と確率解釈と整合している.

ここから可換C^*-algebraについてのゲルファント・ナイマルク双対性を説明するための準備として、~~可換~~環についての一般論と多項式環の構造を概観する。

<u>定義</u> 環 ring R

$a, b \in R$ 和 $a+b \in R$ 積 $ab \in R$

$(a+b)+c = a+(b+c)$, $0 \in R$, $a+0 = 0+a = a$

$b+a = a+b$, 各$a \in R$に対して$a' \in R$, $a+a' = 0$

このようなa'を$-a$と書く。aの負元と呼ぶ。

$(ab)c = a(bc)$

$(a+b)c = ac+bc$
$a(b+c) = ab+ac$ } 分配律

<u>定理</u> 任意の$a \in R$に対し、$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$である

<u>定義</u> ~~可換~~ 可換換 commutative ring
すべての$a, b \in R$について $ba = ab$.

<u>定義</u> 環Rにおいて
$e \in R$ $\forall a \in R$ $ae = ea = a$
なるeがあればeを単位元という。

$a \in R$に対して $aa' = a'a = e$ なる $a' \in R$があれば
aは可逆(invertible)だといい、$a' = a^{-1}$と書き、aの逆元という (inverse)

<u>定義</u> 環Rにおいて
$a, b \in R$ $a \neq 0$, $b \neq 0$ だが $ab = 0$ となるならば
aとbを零因子(divisor of zero)という。

<u>定理</u> 零因子は不可逆である。

<u>定義</u> 零因子~~か~~を持たない(可換単位的)環を整域(integral domain)という。

0以外のすべての元が可逆であるような可換(単位的)環を体(field)という。

定義 部分環 subring

環 R の部分集合 $S \subset R$ が、和・差・積について閉じていれば S を R の部分環という。

つまり $x, y \in S \Rightarrow x+y, -x, xy \in S$

また $0 \in S$.

定義 左イデアル left ideal

環 R の部分集合 $I \subset R$ が

$0 \in I$

$x, y \in I \Rightarrow x+y, -x \in I$

$a \in R, x \in I \Rightarrow ax \in I$

を満たすなら I を R の左イデアルという。

同様に右イデアル (right ideal), 両側イデアル (two-sided ideal) も定められる。

可換環では 左・右・両側の区別はなくなる。

$I = \{0\}$ または R は自明なイデアルと呼ばれる。

単位元 $e \in I$ (イデアル) ならば $I = R$ である。

定理

I が R の左イデアルならば

$R/I = \{ [a] = a + I \mid a \in R \}$

は R の左作用を受ける加群になる。

I が R の両側イデアルならば

R/I

は環になる。 商環 (quotient ring)

定義 可換環 R において

素イデアル (prime ideal) I :$\Longleftrightarrow$ 「$ab \in I \Rightarrow a \in I$ または $b \in I$」

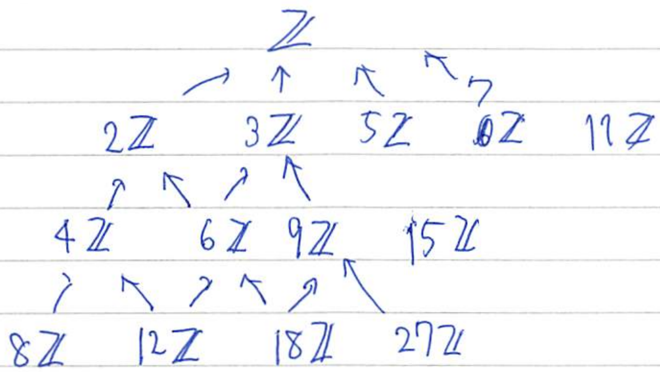
極大イデアル (maximal ideal) I :$\Longleftrightarrow$ 「$I \subseteq J \subseteq R$ なるイデアル J があれば $J = I$ または $J = R$」

定理　可換環 R において
I : 素イデアル $\Longleftrightarrow$ R/I が整域な環
I : 極大イデアル $\Longleftrightarrow$ R/I が体

定理　準同型定理
(非可換でもよい) 環 R_1, R_2 に~~…~~ の
準同型写像 $\varphi : R_1 \to R_2$ について
$\mathrm{Ker}\,\varphi$ は R_1 の両側イデアルであり,

$$R_1 / \mathrm{Ker}\,\varphi \cong R_2$$

可換環としての $\mathbb{Z}$
部分環たる
イデアルたるでもある.



← 素イデアルと極大イデアルが一致してしまっていることまずい.

高校数学で剰余定理を習いましたか？

No. 6 − 10

'20 . 9 . 22 (　　)

環の一般論はこのくらいにして、多項式環もいじって感覚を養おう

$\mathbb{R}[x]$ または $\mathbb{C}[x]$　$\mathbb{Q}[x]$　$\mathbb{Z}[x]$

$I_1 = \{ (x-a)\cdot p(x) = f(x) \} = \{ f(x) \mid f(a) = 0 \}$ 素イデアルかつ極大イデアル

$I_2 = \{ (x-a)(x-b)\,p(x) \}$（$a \neq b$ で）$= \{ f(x) \mid f(a)=0$ かつ $f(b)=0 \}$ イデアルだが素でも極大でもない

$I_3 = \{ (x-a)^2 \cdot p(x) \}$ ~~部分環だが~~ イデアル ~~[illegible]~~ だが素ではない。極大でもない。

$I_4 = \{ (x^2+1)\cdot p(x) \}$ $\mathbb{R}[x]$ では極大イデアルだが $\mathbb{C}[x]$ では素イデアルではない。

$I_5 = \{ (2x-1)\cdot p(x) \}$ $\mathbb{Z}[x]$ では素 ~~[illegible]~~ イデアル。極大イデアルではない？

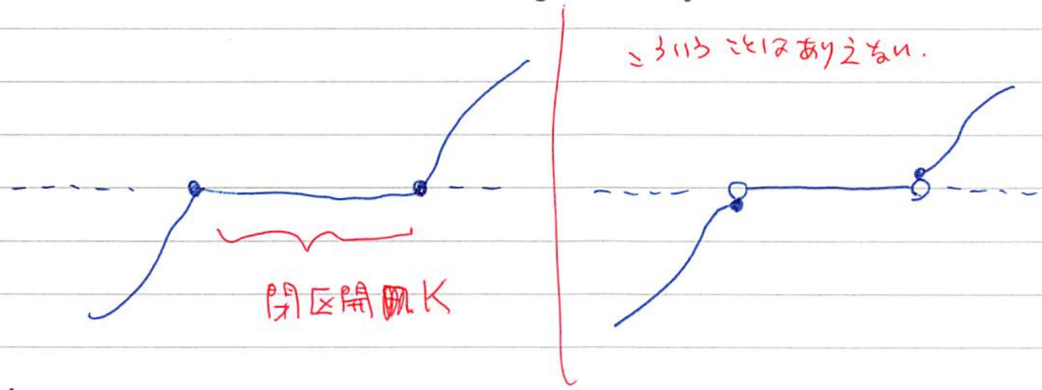
$I_6 = \{ (x^2-2)\,p(x) \}$ $\mathbb{Q}[x]$ では極大イデアル，$\mathbb{R}[x]$ ではイデアルだが素イデアルじゃない。

イデアル $\longleftrightarrow$ 関数の零点集合

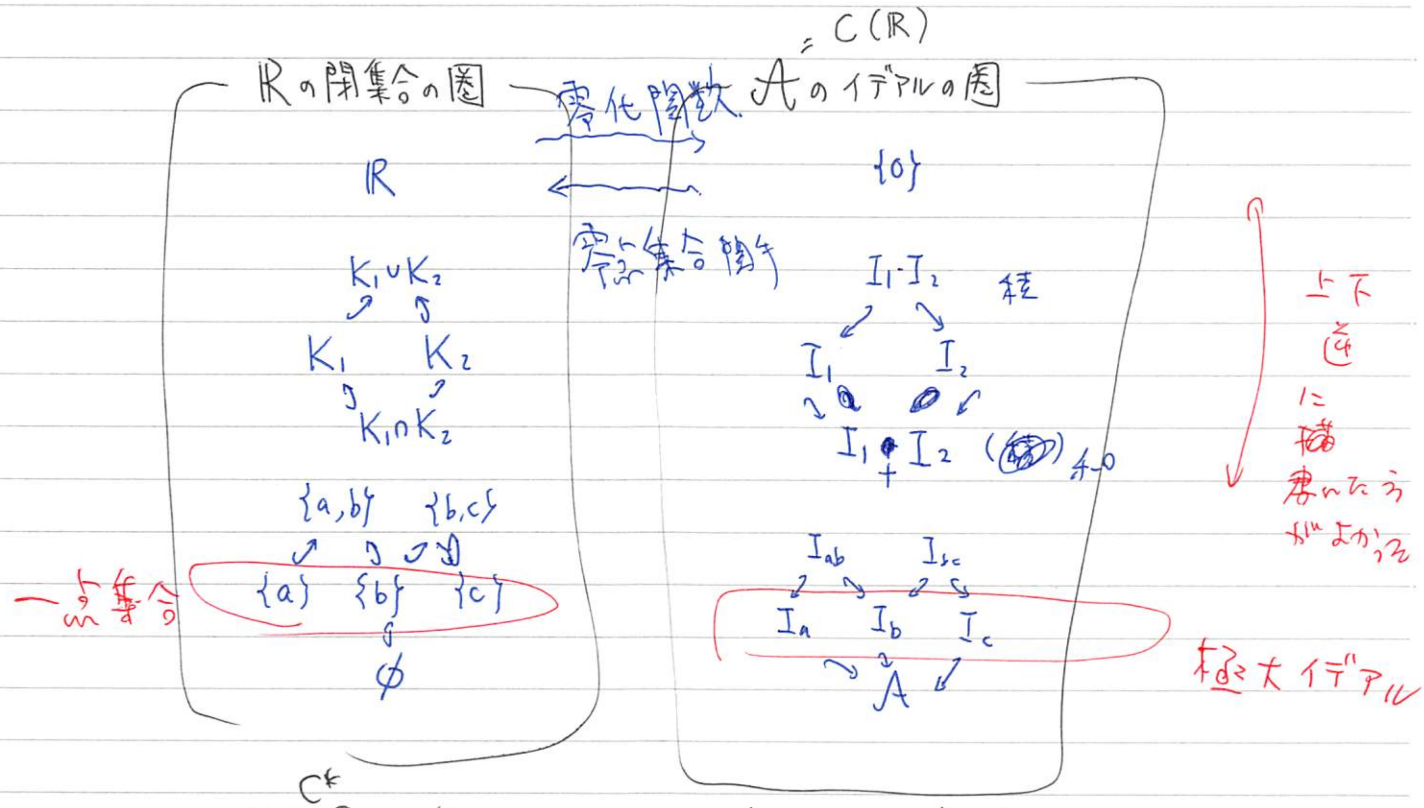
極大イデアル $\longleftrightarrow$ 一点における関数値（商体）$\longleftrightarrow$ 指標

多項式環はこれくらいにしておいて 連続関数環 $C(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ を考えよう.

連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
の零点集合 $f^{-1}(0)=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0\}$ は閉集合である.



$A=$ 可換環 $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 連続$\}$
において $I=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 連続 $\mid \forall x\in K, f(x)=0\}$ は イデアル



以上で C^*可換環に関する Gelfand-Naimark duality を述べる準備ができた.

~~これ~~を非可換C^*-alg にも適用する形にしたものが GNS construction
(Riesz-Radon-Markov を

まだまだ話は続く....

可換 C^*-algebra の Gelfand-Naimark duality

Hausdorff 位相空間 X $\rightsquigarrow$ 可換 C^*-alg $\mathcal{A} = C_0(X) = \{ f : X \to \mathbb{C}$ 連続. 無限遠で $0\}$

$f_1 + f_2$

λf

$f_1 \cdot f_2$

f^*

$\|f\| := \sup \{ |f(x)| \mid x \in X \}$

$Sp(\mathcal{A}) := \{ \chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ の全体 $\}$ (character) $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}$ 可換 C^*-algebra

イデアル $I \subset \mathcal{A}$ ごとに

$K_I := \{ \chi \in Sp(\mathcal{A}) \mid {}^\forall A \in I,\ \chi(A) = 0 \}$

を $Sp(\mathcal{A})$ の閉集合と定める.

$\hat{\cdot} : \mathcal{A} \longrightarrow C_0(Sp(\mathcal{A}))$ が代数同型射

$A \longmapsto \hat{A} : Sp(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$

$\chi \longmapsto \hat{A}(\chi) := \chi(A)$

$\check{\cdot} : X \longrightarrow Sp(C_0(X))$ が位相同相射

$x \longmapsto \check{x} : C_0(X) \longrightarrow \mathbb{C}$

$A \longmapsto \check{x}(A) := A(x)$

$\mathbb{H}\mathrm{aus}\mathbb{T}\mathrm{op}$ 　　　　　　　　$\mathbb{C}\mathrm{omm}C^*$

$X \rightsquigarrow^{C_0(-)} C_0(X)$

$X \cong Sp(C_0(X))$ 同相 $\quad Sp(C_0(X)) \leftsquigarrow^{Sp(-)} C_0(X)$

$Sp(\mathcal{A}) \leftsquigarrow^{Sp(-)} \mathcal{A}$

$Sp(\mathcal{A}) \rightsquigarrow^{C_0(-)} C_0(Sp(\mathcal{A}))$

$\mathcal{A} \cong C_0(Sp(\mathcal{A}))$ 代数同型

$X \xrightarrow{f} Y$ 　　　$C_0(X) \xleftarrow{f^*} C_0(Y)$

$Sp(\mathcal{A}) \xrightarrow{\varphi^*} Sp(\mathcal{B})$ 　　　$\mathcal{A} \xleftarrow{\varphi} \mathcal{B}$

X 〃 位相空間 $Sp(A)$ の閉集合たちの包含写像のなす圏

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \emptyset \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\{a\} \arrow[dr] & \{b\} \arrow[d] & \{c\} \\
& \{a,b\} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& K_1 \cap K_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
K_1 \arrow[dr] & & K_2 \arrow[dl] \\
& K_1 \cup K_2 \arrow[d] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

零点集合 $\longleftarrow$

零化イデアル $\longrightarrow$

A のイデアルたちの包含写像のなす圏

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& A & \\
I_a \arrow[ur] & I_b \arrow[u] & I_c \arrow[ul] \quad \cdots \\
I_{a,b} \arrow[u] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& I_1 + I_2 & \\
I_1 \arrow[ur] & & I_2 \arrow[ul] \\
& I_1 I_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& \{0\} &
\end{tikzcd}$$

非可換 C^*-algebra の GNS 表現

ちょっと思い出そう

$\mathcal{A}$: 可換 C^*-algebra

$\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ が $\mathcal{A}$ 上の character とは,

1. $\chi(A+B) = \chi(A) + \chi(B)$
2. $\chi(\lambda A) = \lambda \cdot \chi(A)$
3. $\chi(AB) = \chi(A) \cdot \chi(B)$ ← stateではこの条件をやめた. とくに非可換alg. ではきつすぎ とくにCCR. では
4. $\chi(A^*) = \overline{\chi(A)}$

※必ずしも等しくない $\omega(AB) \neq \omega(A)\omega(B)$

stateでは $\omega(A^*A) \geq 0$ と $\omega(\mathbb{1}) = 1$

Def

$\mathcal{A}$ 非可換 C^*-algebra の表現 (repserentation)

$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$　$\mathcal{H}$ は Hilbert space

$A \longmapsto \pi(A)$

1. $\pi(A+B) = \pi(A) + \pi(B)$
2. $\pi(\lambda A) = \lambda \pi(A)$
3. $\pi(AB) = \pi(A) \cdot \pi(B)$ ← ここがミソ 積が忠実
4. $\pi(A^*) = \pi(A)^*$

C^*-alg での抽象的な共役 スター

Hilbert space上 operator としての共役

としてみると, 可換 C^*-alg の character とは 1次元表現のことである.
非可換 C^*-alg は一般には1次元表現で足りず, 高次元表現になる.

Theorem Gelfand-Naimark-Segal construction theorem

$\mathcal{A}$:(一般には非可換な) C^*-alg.

$\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ state

が与えられたとき、以下の条件を満たす $(\mathcal{H}_\omega, \psi_\omega, \pi_\omega)$ が
ユニタリ同値を除いて一意的に存在する。

$\mathcal{H}_\omega$ は Hilbert space である。

$\psi_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ は単位ベクトルである。 $\langle \psi_\omega, \psi_\omega \rangle = 1$

$$\pi_\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}_\omega) \quad \text{は } C^*\text{-alg の表現である。}$$
$$A \longmapsto \pi_\omega(A)$$

しかも $\omega(A) = \langle \psi_\omega, \pi_\omega(A)\psi_\omega \rangle$ が成り立つ。

$\psi_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ は巡回的ベクトル(cyclic vector)である。

つまり $\{ \pi_\omega(A) \cdot \psi_\omega \mid A \in \mathcal{A} \}$ の閉包 $= \mathcal{H}_\omega$

証明

Step1　任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して $\omega(A^*B) = \overline{\omega(B^*A)}$ が成り立つことを p. 6-3 で示した。

↓ エルミート内積ぽい
が このままでは 正定値性が
保証できない

Step2　ついでに $\omega(A^*) = \overline{\omega(A)}$

Step3　state に関する Schwarz の不等式 $|\omega(A^*B)| \leq \omega(A^*A) \cdot \omega(B^*B)$
内積についての C-S 不等式の証明 (p. 2-9) と同様にも証明できる

Step4　$\mathcal{N}_\omega := \{K \in \mathcal{A} \mid \omega(K^*K) = 0\}$　内積の退化空間

とおくと

$A \in \mathcal{A}$, $K \in \mathcal{N}_\omega$ に対して $|\omega(A^*K)| \leq \omega(A^*A) \cdot \omega(K^*K) = 0$

なので $\omega(A^*K) = 0$

ゆえに $\omega(K^*A) = \overline{\omega(A^*K)} = 0$ も成立。

任意の $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $K_1, K_2 \in \mathcal{N}_\omega$ に対して

$$\omega\left((\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2)^* \cdot (\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2)\right) = 0$$

なので $\mathcal{N}_\omega$ は $\mathcal{A}$ の vector subspace.

また

$$\omega\left((AK)^* AK\right) = \omega\left(K^*A^*A \cdot K\right) = \omega\left((A^*AK)^* \cdot K\right) = 0$$

なので

$$A \in \mathcal{A},\ K \in \mathcal{N}_\omega \Rightarrow AK \in \mathcal{N}_\omega$$

つまり $\mathcal{N}_\omega$ は $\mathcal{A}$ の左イデアル。

Step 5

$A \in \mathcal{A}$ の同値類 $\psi_A = [A] := \{A + K \mid K \in \mathcal{N}_\omega\}$

を定め、

vector space $\mathcal{H}_\omega := \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega = \{\psi_A \mid A \in \mathcal{A}\}$

に内積 $\langle \psi_A, \psi_B \rangle := \omega(A^*B)$

を定めると、これは well-defined であり、かつ、非退化、正定値となる。完備化して $\mathcal{H}_\omega$ を Hilbert space にしてやる。

Step 6 $A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\pi_\omega(A) : \mathcal{H}_\omega \longrightarrow \mathcal{H}_\omega$$
$$\psi_B \longmapsto \pi_\omega(A)\psi_B := \psi_{AB}$$

$$\pi_\omega(A+B) = \pi_\omega(A) + \pi_\omega(B)$$
$$\pi_\omega(\lambda A) = \lambda \cdot \pi_\omega(A)$$
$$\pi_\omega(AB) = \pi_\omega(A)\pi_\omega(B)$$

自動的に成立.

$$\begin{aligned}
&\langle \psi_B, \pi_\omega(A^*)\psi_C \rangle \\
&= \langle \psi_B, \psi_{A^*C} \rangle \\
&= \omega(B^* \cdot A^* C) \\
&= \omega((AB)^* C) \\
&= \langle \psi_{AB}, \psi_C \rangle \\
&= \langle \pi_\omega(A)\psi_B, \psi_C \rangle \\
&= \langle \psi_B, \pi_\omega(A)^* \psi_C \rangle
\end{aligned}$$

よって $\pi_\omega(A^*) = \pi_\omega(A)^*$

Step 7 単位元 $\mathbb{1} \in \mathcal{A}$ により

$\psi_\omega := \psi_{\mathbb{1}}$ とおけば

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\omega, \pi_\omega(A)\psi_\omega \rangle &= \langle \psi_{\mathbb{1}}, \pi_\omega(A)\psi_{\mathbb{1}} \rangle \\
&= \langle \psi_{\mathbb{1}}, \psi_{A \cdot 1} \rangle \\
&= \omega(1^* \cdot A 1) \\
&= \omega(A)
\end{aligned}$$

が成立.