古典物理から量子物理へ

理論の発展史を雑に書いてみると…

19世紀末から20世紀初頭にかけて..
古典物理学のほころび

原子の吸収・放出光のスペクトル ← フラウンホーファー、ブンゼン、キルヒホフ
バルマー

原子の安定性 ← ラザフォード 原子核と電子

黒体輻射

↓

20世紀はじめ
前期量子論・原子の殻構造モデル・光量子、物質波

1925年〜

ハイゼンベルク・ボルン・ヨルダン
行列力学

シュレーディンガー
波動力学

ディラック
q-number代数

ヨルダン-ディラックの変換理論

フォン・ノイマン：ヒルベルト空間フォーマリズムに導く

→ 観測問題

対象の拡張

20世紀なかば以降

場の量子論

別の定式化さがし
経路積分
確率過程量子化
幾何的量子化　変形量子化　Maslov量子化
量子論理
⋮

代替理論
代替解釈
パイロット波
隠れた変数
多世界解釈
⋮

発散の困難

非同値なヒルベルト空間表現

相対論的共変摂動論

くりこみ理論

→ くりこみ群

格子場の理論

公理的場の量子論

構成的場の量子論

ヒルベルト空間に依存しないリロン.

代数的場の量子論

シーガル
ハーグ　カストラー
荒木不二洋

ゲージ場の量子論

量子統計力学

対称性の自発的破れ

相転移

素粒子の標準模型

量子測定理論
古典系から見た量子系を数学的に特徴づける

No. 5-2
'20. 9. 19

~~フォンコン~~
とりあえず ヒルベルト空間 フォーマリズムはできたけど…

フォン・ノイマンから バーコフへの告白
「オレは ヒルベルト空間 フォーマリズムはあまりよくないと思っている…」
{ ψ と $e^{i\alpha}\psi$ の不定性が気に入らない。
射影作用素 $P = |\psi\rangle\langle\psi|$ なら そういう不定性はない
↓
量子論理へと カジを切る。

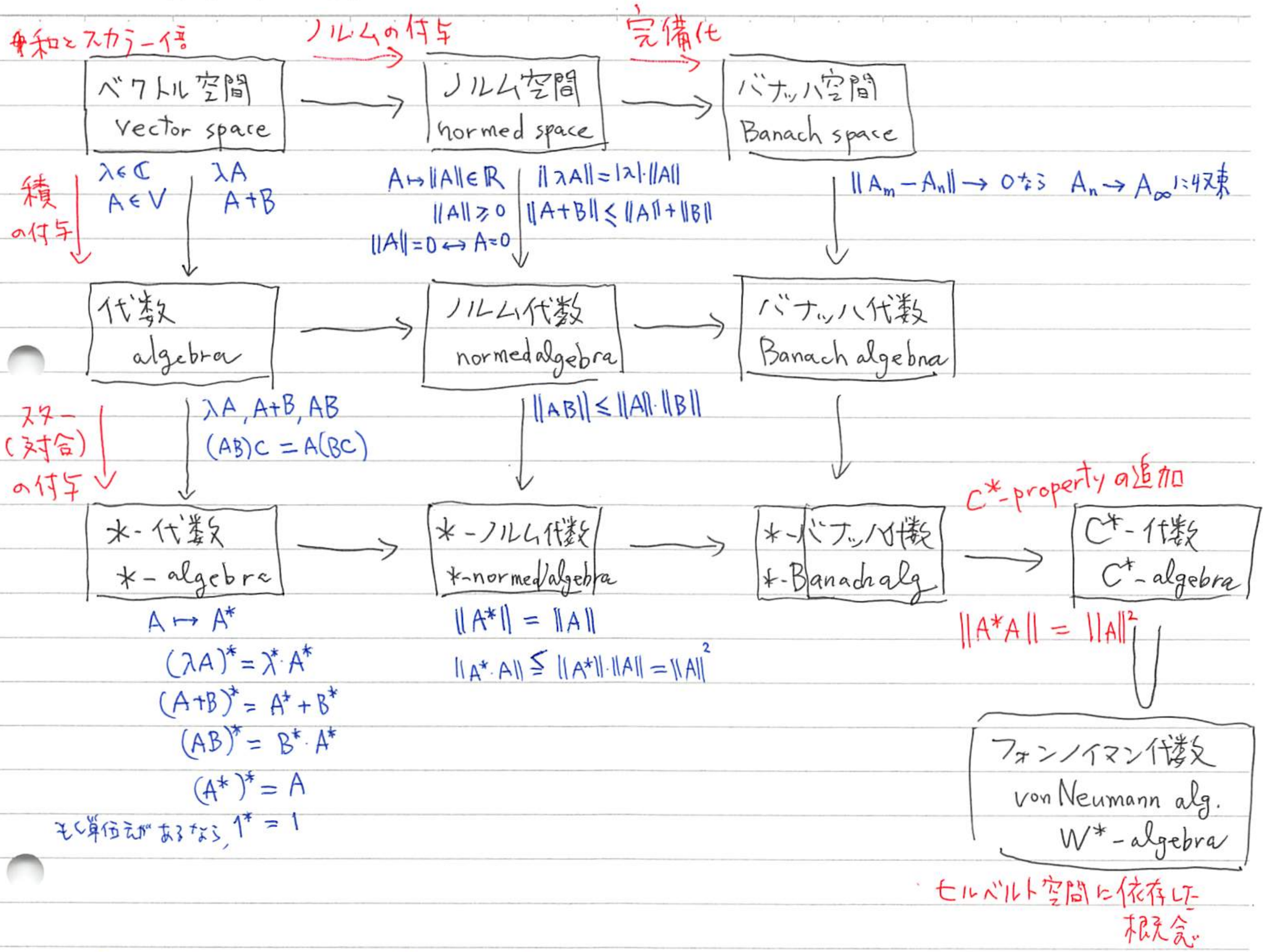
~~数~~ 数理物理的な人たちは、
Hilbert space は ないほうがいい
少なくとも頭ごなしに導入するのは
避けたいと思っていた。

シーガル (Segal) の 代数的量子論
1. observable algebra を基礎におく。観測できるものに キソをおく。
2. 古典は 可換代数
量子は 非可換代数) はじめから~~無理なく~~ 橋わたしができる。
3. state で確率解釈はじめからしこむ。
4. Hilbert space は state から 構成できる。
後発的に ~~構~~

それで 代数的量子論に登場する 代数を紹介するわけですが…
これが また いっぱい ありまして…
C^*-代数 と vonNeumann代数だけ説明すればいいのかもしれないけど、
それだけ説明されても ポカン なので、助走・位置づけ が必要

‖・‖の読み方「二重縦棒サンドイッチ」

C*-代数へのマップ



一般に、代数においては積の可換律 $BA=AB$ は成り立たない。
これが成り立つなら可換代数(commutative algebra)という。

一般に、代数においては、単位元1 ($1A=A1=A$) の存在は要請しない。
1があるなら単位的代数(unital algebra)という。

一般に代数の元Aに対し $A'\cdot A=A\cdot A'=1$ となる A' の存在は要請しない。
$A'=A^{-1}$ があるなら Aの逆元という。

定義 von Neumann algebre

$\mathcal{H}$: Hilbert space

$\mathbb{B}(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$上の有界作用素全体の集合. $*$-Banach algebra になっている.

$\mathcal{M} \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ が $*$-部分代数 ($*$-subalgebra)

$:\Longleftrightarrow$ $A, B \in \mathcal{M}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ なら $\lambda A, A+B, AB, A^* \in \mathcal{M}$

$\mathcal{A} \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ (たんなる部分集合) に対して

$$\mathcal{A}' := \{ Q \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \mid {}^\forall A \in \mathcal{A},\ AQ = QA,\ A^* Q = Q A^* \}$$

$\mathcal{A}'$ を $\mathcal{A}$ の可換子代数 (commutant algebra) という.

$\mathcal{A}'$ は $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の $*$-部分代数になる.

一般に, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}''$ であり, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'''$ である.

$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の部分集合 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ なら $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{B}'$ である.

$\mathcal{A}''$ を $\mathcal{A}$ の二重可換子 double commutant という.

$\mathcal{M} \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ が von Neumann algebra である

$:\Longleftrightarrow$ $\mathcal{M}$ は $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の $*$-subalgebra であり, かつ

$$\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$$

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{M}$ は $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の $*$-subalgebra であり,
かつ $I \in \mathcal{M}$ であり,
作用素の弱位相に関して閉である.

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ は C^*-algebra でもある.
(C^*-alg は operator norm に関して閉)

可換 C^*-algebra の例

1. $\mathbb{C}$ $\underbrace{\text{複素数体}}_{\text{四則演算}}$ ノルムは絶対値　(involution) スター対合は複素共役

2. $C_0(\mathbb{R})$: $\mathbb{R}$上の$\mathbb{C}$値関数で 無限遠で消える連続関数の全体

$$:= \left\{ \begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \text{ 連続関数} \\ x\mapsto f(x) \end{array} \middle| \begin{array}{l} \forall\varepsilon(>0)\in\mathbb{R}, \\ I_\varepsilon := \{x\in\mathbb{R} \mid |f(x)|\geqq\varepsilon\} \subset \mathbb{R} \text{ がコンパクト} \end{array} \right\}$$

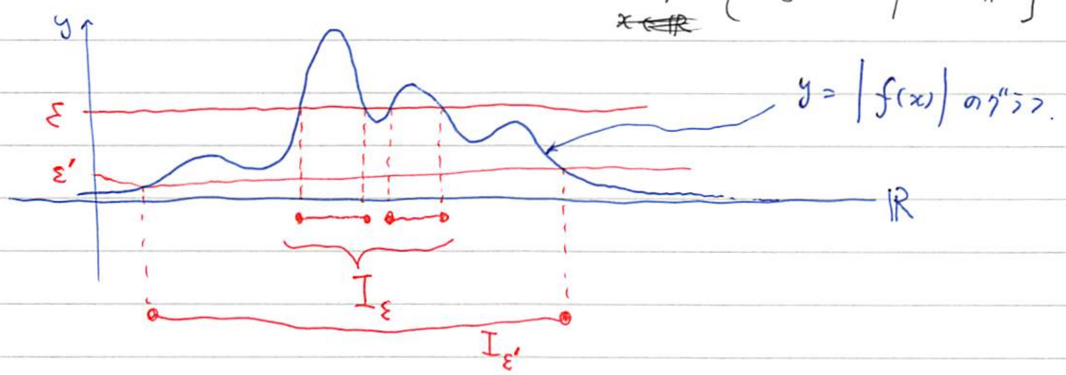
スカラー倍　$(\lambda f)(x) := \lambda\cdot f(x)$

和　$(f_1+f_2)(x) := f_1(x)+f_2(x)$

積　$(f_1 f_2)(x) := f_1(x)\cdot f_2(x)$　pointwise $\mathbb{C}$の積.

対合　$(f^*)(x) := \overline{f(x)}$

ノルム　$\|f\| := \sup_{\cancel{x\in\mathbb{R}}} \{|f(x)| \mid x\in\mathbb{R}\}$



3. $\cancel{C_0(X)}$　X : Hausdorff(ハウスドルフ)位相空間

$$C_0(X) := \left\{ f: X\to\mathbb{C} \text{ 連続かつ } \forall\varepsilon(>0)\in\mathbb{R} \quad I_\varepsilon^f := \{x\in X \mid |f(x)|\geqq\varepsilon\} \underset{\text{コンパクト}}{\subset} X \right\}$$

X上 $\mathbb{C}$値, 無限遠で消える連続関数全体のなす代数.

非可換 C^*-algebra の例.

1. $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ 　　$\mathbb{C}^n$ の自己準同型写像(endmorphism)全体のなす環

n行n列の複素数行列全体

スカラー倍、和、積は ふつーの行列演算

スター対合は エルミート共役

ノルムは $\mathbb{C}^n$ に対して適当に入れる $\|\cdot\|_1$ でも $\|\cdot\|_2$ でも $\|\cdot\|_p$ でもよい

・作用素ノルム $\|A\| := \inf\{M \in \mathbb{R} \mid \|Av\| \le M\|v\| \ \forall v \in \mathbb{C}^n\}$

ごめん, C^*-property を満たさない

・こんなノルムもある 名前忘れた　$\|A\|_{\cancel{\ }} := \mathrm{Tr}(A^\dagger \cdot A)$

$\|A\| := \mathrm{Tr}(|A|)$

ab~~solu~~ 　　operator absolute value

$A^\dagger A = |A|^2, \ |A| \geq 0$

2 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ ($\cancel{V}$)

~~Vは Banach~~ space.
$\mathcal{H}$ は Hilbert space

可換 von Neumann algebra の例. $\mathbb{C}$ ももちろん

$L^\infty(\mathbb{R}) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid$ 本質的に有界 $\}$

$L^\infty(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid$ 〃 $\}$

測度 μ の与えられた空間 Ω 上の可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $x \longmapsto f(x)$

関数値の スカラー倍, 和, 積, 対合 と $\|f\|$ に関して vN alg

定義 f が本質的に有界 (essentially bounded)

~~$:\Longleftrightarrow \forall \alpha (>0) \in \mathbb{R}$~~

$:\Longleftrightarrow \exists \alpha (\geqq 0) \in \mathbb{R}$ $\quad J := \{ x \in \Omega \mid |f(x)| > \alpha \}$ とおいたとき $\mu(J) = 0$

いいかえると, ほとんどいたるところ (almost everywhere) $|f(x)| \leq \alpha$.

定義 f の本質的上限 (essential supremum)

$$\operatorname*{ess.sup.}_{x \in \Omega} \{ |f(x)| \} := \inf \{ \alpha \mid \alpha \text{ は 上の式を満たすもの} \}$$

$$\| \quad = \quad \|f\|_\infty$$

これ Banach space

このあたりの中で これだけ Hilbert space

Banach space

これだけ von Neumann alg

定理 $\mu(\Omega) < \infty$ の場合

$$L^1(\Omega) \supset L^2(\Omega) \supset \cdots \supset L^p(\Omega) \supset L^{p+1}(\Omega) \supset \cdots \supset L^\infty(\Omega)$$

であり,

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

が成立

非可換 von Neumann alg の例
$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ が代表例
$\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$