2020 . 9 . 16

~~Ya~~ von Neumann流の

標準的な量子力学定式化.

1. 系 … ミクロ系
2. 状態 … 可分な ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の単位ベクトル（単位射線, より一般的には密度行列）
3. 物理量 … $\mathcal{H}$ 上の自己共役演算子
4. 値 … 実数（形式的には複素数も含める）, 演算子の固有値 ~~[illegible]~~る
5. 運動 … ハミルトニアン

   変換 … ユニタリ演算子 あるいは その生成子

ヒルベルト空間へのマップ

それは何であり，どのように位置付けられるか

演算 → 代数構造の~~価~~添加（付与）

innerproduct
内積・計量 metric

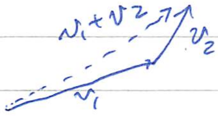
ベクトル空間 vector space $\xrightarrow{\text{norm ノルム演算 } \|\circ\|}$ ノルム空間 normed ~~linear~~ space $\xrightarrow{\langle \circ, \circ \rangle}$ 内積空間（~~……~~空間）inner product spce (~~Euclid~~ space) Hermitian vector（エルミート計量）

ノルム空間 ↓ 完備化 バナッハ空間 Banach space $\xrightarrow{\text{内積をつける}}$ ヒルベルト空間 Hilbert space

内積空間 ↓ 完備化 ヒルベルト空間 Hilbert space

距離構造
完備化

ベクトル空間・ノルム空間，内積空間は $\mathbb{R}$ 上，$\mathbb{Q}$ 上でも定められる．



V : $\mathbb{C}$ 上の vector space

$v_1, v_2 \in V$ の和 (sum) $v_1 + v_2 \in V$

$\lambda \in \mathbb{C}$ による $v \in V$ のスカラー倍 (scalar multiplication) $\lambda v \in V$

1. $(v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3)$ 和の結合律
2. $\exists 0 \in V$, $\forall v \in V$, $v+0 = 0+v = v$ 　0（零元，ヌルベクトル）
3. $\forall v \in V$, $\exists v' \in V$ 　$v+v' = v'+v = 0$ 　v' を v の負元という 　$v' = -v$ と書く．
4. $v_2+v_1 = v_1+v_2$ 和の交換律
5. $\lambda(v_1+v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$ 分配律
6. $\lambda_1(\lambda_2 v) = (\lambda_1 \lambda_2) v$ 結合律
7. $(\lambda_1+\lambda_2) v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$ 分配律
8. $1 \in \mathbb{C}$, $\forall v \in V$, $1v = v$ 非自明なスカラー倍

定理 零元，負元の一意性
$0 \in \mathbb{C}$ の $\forall v \in V$ 　$0v = 0$
$-1 \in \mathbb{C}$ 　$(-1)v = -v$

写像 $\|\circ\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ が以下を満たすとき $\|v\|$ を v のノルムという norm
$\qquad v \longmapsto \|v\|$

1. $\|v\| \geq 0$ 　非負性
2. $\|v\| = 0 \iff v = 0$ null vector 　正定値性 positive definite
3. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
4. $\|v_1 + v_2\| \leqq \|v_1\| + \|v_2\|$ 　三角不等式

$\|v\|$ の読み方「v のノルム」　$\|\circ\|$ の読み方「二重タテ棒 サンドイッチ」

ノルム空間の例

$V = \mathbb{R}^n \qquad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x_j \in \mathbb{R}$

$\|v\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j| \quad \leftarrow$ { Manhattan distance, taxi distance, cab distance } などとも呼ばれる.

$\|v\|_2 := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \leftarrow$ Euclid distance norm
ユークリッド

$\|v\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad p = 1, 2, 3, \cdots$

$\|v\|_\infty := \max \{ |x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n| \}$

それぞれノルムの公理を満たしていることを確認せよ.

$\lim_{p \to \infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$ を示せ.

p型ノルムに関して半径1の円周

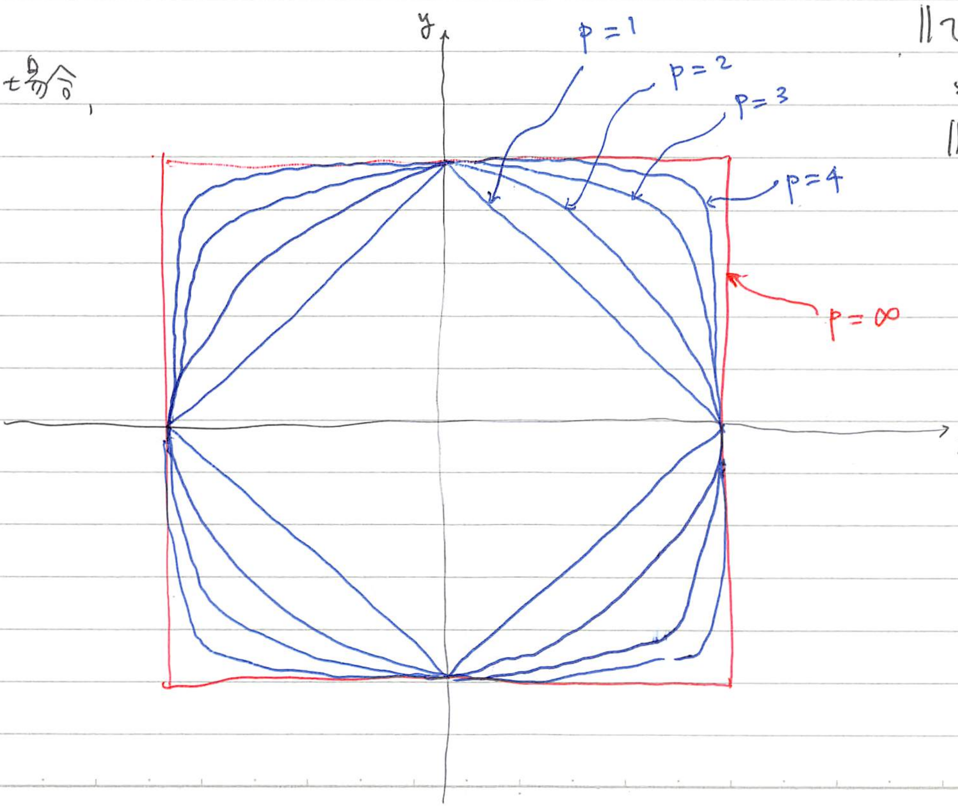
$$S_p^{n-1} := \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_p = 1 \}$$

$n = 2$ の場合,

$\|v\|_p = \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}$

とくに

$\|v\|_1 = |x| + |y|$



~~ノルム空間の例~~

有理数体$\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}^2$ 上では円の交点の存在が保証できない.

$\mathbb{Q}^3$ 上では球面の存在も怪しい.

連続・完備でない空間上では幾何学はやりにくい.

内積ノルム $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ もたいがい無理数.

<u>定義</u>

・ノルム空間 V において点列 $v_1, v_2, v_3, \cdots \in V$ がコーシー列(Cauchy sequence)である

$$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon(>0) \in \mathbb{R},\ \exists l \in \mathbb{N},\ \forall m, \forall n \in \mathbb{N},\ \left(m > l \text{ かつ } n > l \Longrightarrow \|v_m - v_n\| < \varepsilon\right)$$

このことを雑に $\displaystyle\lim_{m,n\to\infty} \|v_m - v_n\| = 0$ とも書く.

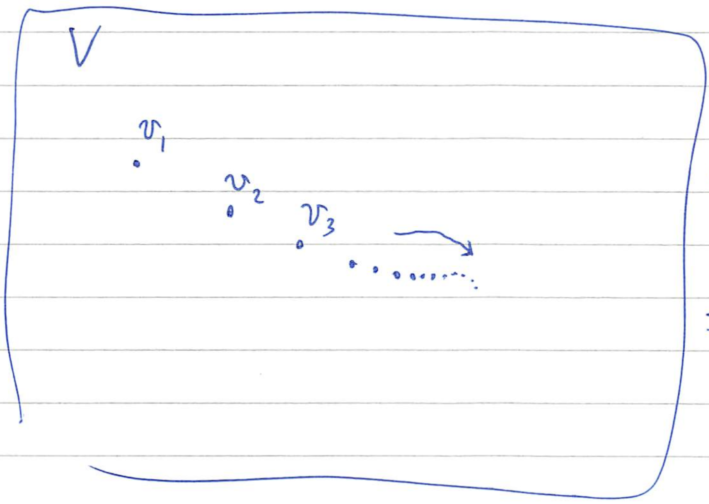
<u>定義</u>

・ノルム空間 V において点列 $v_1, v_2, v_3, \cdots \in V$ が v_∞ に収束する(converge)

$$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon(>0) \in \mathbb{R},\ \exists l \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}\ \left(m > l \Longrightarrow \|v_m - v_\infty\| < \varepsilon\right)$$

このことを $\displaystyle\lim_{m\to\infty} v_m = v_\infty$ と書く. あるいは v_m は v_∞ に強収束するともいう。

v_∞ を点列の極限(limit) あるいは収束先、収束点ともいう.



収束列は収束先が存在していないと定義できない.

コーシー列は収束先がわからなくても、収束先がなくても、定義できる.

<u>定理</u> ノルム空間においては、

1. 収束列の極限は一意的である.

2. 収束列 $\Longrightarrow$ コーシー列 (こっちは当たり前)
   収束列 $\cancel{\Longleftarrow}$ コーシー列 (これは一般には言えない.)

完備でないノルム空間の例をあげよ.

<u>定義</u> ~~任意~~ $\mathbb{R}$上または$\mathbb{C}$上のノルム空間Vにおいて任意のコーシー列が収束列になっているならばVをバナッハ空間という. また, Vは完備であるという(complete)

リーマン (Riemann) 積分　ルベーグ (Lebesgue) 積分

$$\int f(x)dx = \int y \cdot f^{-1}(dy)$$

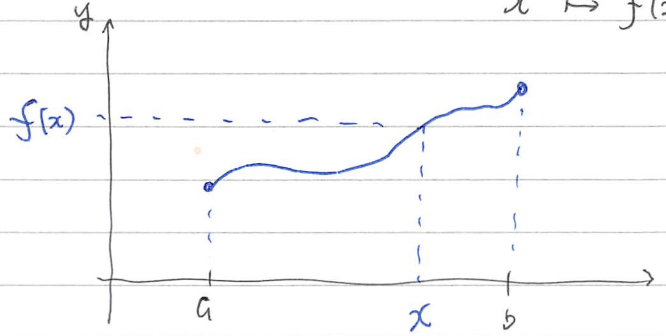
なぜ関数空間にノルムを導入するのか？　2つの関数の近さを測りたい 表現したい。
近くなることを表現したい。
収束すること

例 ノルム空間の例，
$a, b \in \mathbb{R}$　$a < b$ として，

1つの関数のノルム（大きさ）そのものには あまり関心がない
Sobolev ノルム … 目的による.. 偏微分方程式

$$C([a,b]) := \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{連続関数} \}$$
$$x \mapsto f(x)$$

$\mathbb{R}$ 上の vector space
無限次元
関数空間



$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\|f\| := \sup_{a \le x \le b} \{ |f(x)| \}$$
，ノルムになることを要チェック

定理
このノルムに関して $C([a,b])$ は完備.
だから バナッハ空間になる.

このノルムに関する収束を一様収束 (uniform convergence) という.

各点収束
と対比される.

例. $C([0,1])$ において $f_n(x) = x^n$

$n \to \infty$ はどんな関数になるか？
各点収束か？
一様収束か？

関数空間から作れる　$\{f_n\}$ はコーシー列か？　コーシー列ではないことを証明できるか？

その他のバナッハ空間
$p = 1, 2, 3, \cdots$

Ω が測度空間で
$|f(x)|$ が可測関数で
$|f(x)|^p$ が積分可能で
$$\int_\Omega |f(x)|^p < \infty$$

$$L^p(\Omega) \quad \|f\|_p := \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p \, dx}$$

ルベーグ積分の話が必要になる

$$L^\infty(\Omega) \quad \|f\|_\infty := \text{essencial supremum of } \{ |f(x)| \mid a \le x \le b \}$$

定義 ℂ上の
バナッハ空間 V において
線形写像 $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{C}$
$v \longmapsto \varphi(v)$
(~~linear f~~ コベクトルともいう)
について $^{\exists} M (\geqq 0) \in \mathbb{R}$ があって

$$^{\forall} v \in V \quad |\varphi(v)| \leqq M \cdot \|v\|$$

となる~~ば~~ならば、φ を 有界線形~~写~~関数 bounded linear functional
あるいは 線形汎関数 linear functional
という。

また、
$$\|\varphi\| := \underset{\text{infimum}}{\overset{\text{下限}}{\inf}} \left\{ M (\geqq 0) \in \mathbb{R} \;\middle|\; |\varphi(v)| \leqq M\|v\| \right\}$$
~~が~~と定める。

定理 $V^* :=$ V 上の有界線形関数全体の集合
は、~~ベクトル~~ ℂ上 vector space になり
normed space でもあり、
Banach space ~~が~~でもある。

特徴づけ
1. $^{\forall} v \in V \quad |\varphi(v)| \leqq \|\varphi\| \cdot \|v\|$

この不等式、重要！ あとで似たような式が何度も出てくる
~~双対不等式と名付けよう。~~

2. $M \in \mathbb{R},\ ^{\forall} v \in V,\ |\varphi(v)| \leqq M \cdot \|v\|$
$\Longrightarrow \|\varphi\| \leqq M.$

例題7 $V = \mathbb{C}^n \ni v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ として,

$V^* \simeq \mathbb{C}^n \ni \varphi = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ として,

$$\varphi(v) = (a_1\ a_2 \cdots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

V のノルム $\|v\|_1$ に対して $\|\varphi\|_1$ はどんなものになるか?

$\|v\|_2$ に対しては $\|\varphi\|_2$ は?

内積空間

定義

V : $\mathbb{C}$ 上の vector space

$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$

$(v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle$　　(v, w) や $\langle v | w \rangle$ と書く流儀もある。

条件
1. $\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle$
2. $\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \cdot \langle v, w \rangle$　　$\lambda \in \mathbb{C}$　双線形性の名残をとどめる
3. $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$　　$\frac{3}{2}$ 線形性　~~エルミート性~~
4. $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda^* \cdot \langle v, w \rangle$
5. $\langle w, v \rangle = \langle v, w \rangle^*$　　… エルミート性 → $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ が従う
6. $\langle v, v \rangle \geqq 0$
7. $\langle v, v \rangle = 0 \Longrightarrow v = 0$ null vector

null vector $0 \in V$ に対して
$\langle 0, w \rangle = 0$
$\langle v, 0 \rangle = 0$ が従う。
$\langle 0, 0 \rangle = 0$

以上を満たすような写像 $\langle \cdot , \cdot \rangle$ を V の内積 (inner product) あるいは計量 (metric) という。

また、内積の備わった V を内積空間という。

$\mathbb{R}$ 係数に限定~~すれば~~ (して有限次元なら) ユークリッド空間ともいう。

$\mathbb{C}$ 係数 有限次元 内積空間を 複素ユークリッド空間ともいう。

定理

V が内積空間ならば

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

と<ruby>おく<rt>定める</rt></ruby>ことにより、V はノルム空間になる。

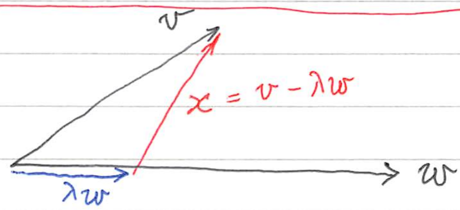
No. 2-9
'20 . 9 . 19 ( )

定理 コーシー・シュワルツの不等式 (Cauchy-Schwarz inequality)

内積空間 V において $\forall v, \forall w \in V$ に対して

$$\left| \langle w, v \rangle \right| \leqq \|w\| \cdot \|v\| \qquad (*)$$

が成り立つ。



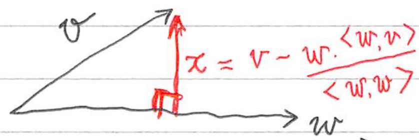
(証明) $\lambda \in \mathbb{C}$ ~~を任意にとるが~~ に対し、
$x := v - \lambda w$ とおく.

$$0 \leqq \langle x, x \rangle = \langle v, v \rangle - \lambda \langle v, w \rangle - \lambda^* \langle w, v \rangle + \lambda^* \lambda \langle w, w \rangle$$

xが最短になるような λの値.

$w = 0$ の場合, $(*)$ は $0 \leqq 0$ となってOK

$w \neq 0$ の場合, $\lambda = \dfrac{\langle w, v \rangle}{\langle w, w \rangle}$ に選ぶと.



$$0 \leqq \langle v, v \rangle - \frac{\langle w, v \rangle}{\langle w, w \rangle} \cdot \langle v, w \rangle - \frac{\langle w, v \rangle^*}{\langle w, w \rangle^*} \cdot \langle w, v \rangle + \left| \frac{\langle w, v \rangle}{\langle w, w \rangle} \right|^2 \langle w, w \rangle$$

$$0 \leqq \langle v, v \rangle - \frac{|\langle w, v \rangle|^2}{\langle w, w \rangle}$$

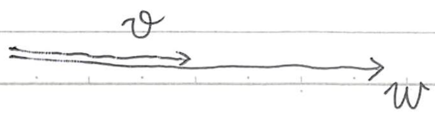
よって $\quad |\langle w, v \rangle|^2 \leqq \langle w, w \rangle \cdot \langle v, v \rangle = \|w\|^2 \cdot \|v\|^2$

$$|\langle w, v \rangle| \leqq \|w\| \cdot \|v\| .$$

等号成立は $x = 0$ のときのみ.

つまり $v = \lambda w$ となるような $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在するとき.

いいかえると vとw が 1次従属なときだけ.

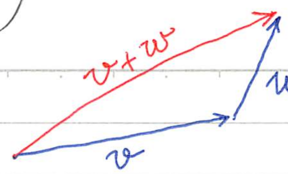


内積空間の性質

定理 (内積空間がノルム空間になることのチェック)

三角不等式 $\|v+w\| \leq \|v\|+\|w\|$

triangle inequality



証明
$$
\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle v,w\rangle + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 \quad \text{Cauchy-Schwarz}
\end{aligned}
$$

$z = x+iy$
実数 x, y について
$\underset{\mathrm{Re}\,z}{x} \leq \underset{|z|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

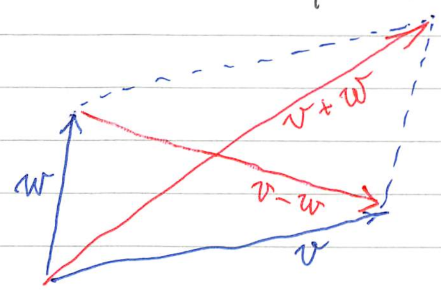
等号成立は

$\mathrm{Re}\langle v,w\rangle = \|v\|\cdot\|w\| \iff {}^\exists\lambda(\geq 0)\in\mathbb{R},\ w=\lambda v$

定理 中線定理。平行四辺形定理 (中線公式)

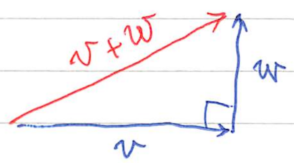
$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\{\|v\|^2+\|w\|^2\}$$

証明 カンタン



とくに $\langle v,w\rangle = 0$ の場合, $\|v+w\| = \|v-w\|$ となり,

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$



に帰着する。ピタゴラスの定理 (三平方の定理)

注 $\mathbb{R}^n$ あるいは $\mathbb{C}^n$ に定めた p型ノルム $\|\cdot\|_p$ は
$p=2$ の場合だけ中線定理が成り立つ。
$p=1$ の場合,何が起こるかたしかめよ。

内積空間の性質 つづき

定理 ($\mathbb{C}$ 上の内積空間 V において) 偏極恒等式 (偏極公式) polarization identity

~~$\frac{1}{4}\{\|v\|^2+\|w\|^2$~~

$$\frac{1}{4}\left\{\|v+w\|^2-\|v-w\|^2+i\|v-iw\|^2-i\|v+iw\|^2\right\}=\langle v,w\rangle$$

証明はカンタン. 式を展開するだけ. やってみて.

このことから 内積空間では 内積からノルムを誘導することができて ($\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$)

そのノルムから内積を再構成できることがわかった.

逆は言えるか? ノルム空間から内積を構成できるか?

一般にはできない.

ノルムの方が内積よりもバリエーションが多い.

定理

$\mathbb{R}$ 上 または $\mathbb{C}$ 上の バナッハ空間 V において

ノルムが中線公式をつねに満たすならば,

偏極公式によって V は 内積空間 になる。

ようやく ヒルベルト空間の定義と性質

定義

V : $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間

が 内積空間

かつ，内積から誘導されるノルム $\left(\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}\right)$

に関して 完備

なるならば

V を ヒルベルト空間 (Hilbert space) という。

定理 (ブラ・ケット対応)

ダッガー dagger

写像 $\dagger : V \longrightarrow V^*$

$w \longmapsto w^\dagger : V \longrightarrow \mathbb{C}$

$v \longmapsto w^\dagger(v) := \langle w, v\rangle$

で定める $w^\dagger$ は ~~有界~~ V 上の有界線形関数である

なぜなら $|\langle w, v\rangle| \leq \|w\| \cdot \|v\|$.

このとき $\|w^\dagger\| = \|w\|$.

$(w_1 + w_2)^\dagger = w_1^\dagger + w_2^\dagger$

$(\lambda w)^\dagger = \lambda^* \cdot w^\dagger$

定理 Riesz (リース) の表現定理

対応 $\dagger : V \to V^*$ は全単射である。

すなわち，任意の有界線形関数 $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{C}$

$v \longmapsto \varphi(v)$

に対して，$\varphi(v) = \langle w_\varphi, v\rangle$

なる $w_\varphi \in V$ が一意的に存在する。

幾何学的イメージ

$\mathrm{Ker}\,\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$ を φ の零化空間とか ヌル平面 とかいう。

これは V の余次元1の閉部分空間になる。

w_φ は $\mathrm{Ker}\,\varphi$ の法線ベクトルになっている。

CONSの濃度は高々可算に限る必要はなかった。

定義 完全正規直交系 complete orthonormal set (system) CONS

V: Hilbert space

高々可算な部分集合 $\{e_1, e_2, \cdots\} \subset V$ があって、

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j=k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

かつ

$$\text{すべての } j \text{ に対して } \langle e_j, v \rangle = 0 \implies v = 0$$

が成り立つならば、

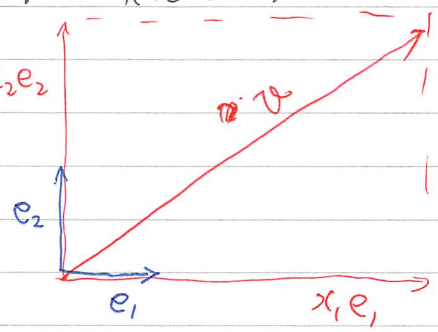
$\{e_1, e_2, \cdots\}$ を V の CONS という。

CONS が有限集合ならその元の個数を V の次元という。

定理 V に CONS があれば

任意の $v \in V$ に対して

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$$



となるような $x_1, x_2, \cdots \in \mathbb{C}$ が一意的に存在する。

また、このとき

Parsevalの等式 $\langle v, v \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2$

が成り立つ。

定義 可分なヒルベルト空間 (separable Hilbert space)

V: Hilbert space において

高々可算な部分集合 $M \subset V$ で、Vの中で稠密(ちゅうみつ)(dense) なものがあれば V は可分であるという。

定理 可分なヒルベルト空間には CONS がある。

ヒルベルト空間の例

1) $\mathbb{C}^n$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x_j \in \mathbb{C}, \quad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad y_j \in \mathbb{C}$$

$$\langle v, w \rangle := (x_1^*, x_2^* \cdots x_n^*) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \cdot y_j$$

2) l^2

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad x_j \in \mathbb{C} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty$$ であることを要請

有限値

$$\langle v, w \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j^* w_j$$

たんなる $\mathbb{C}^\infty$ と l^2 のちがいを調べよ.
$\mathbb{C}^\infty$ の元で l^2 の元にならない例を挙げよ.
l^2 の元の例を示せ.

3) $L^2(\Omega)$ $\quad f : \Omega \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$

$|f(x)|$ が可測関数 かつ
$|f(x)|^2$ が可積分 かつ
$\int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty$
な関数全体

$\Omega = [a,b], \mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ など.

$$\langle f, g \rangle := \int_\Omega f(x)^* g(x)\, dx$$

測度ゼロの部分集合を除いて関数値が等しい関数は同値とみなす.
almost everywhere で等しいものは同値.

以上は可分なヒルベルト空間の例.

これをやっておかないとノルムの正定値性が成り立たない.

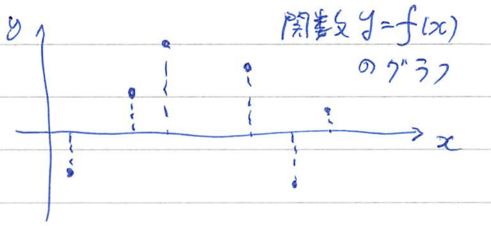
↓この空間では 位置演算子の規格化可能な固有ベクトル(固有関数)が存在する。
微分可能な関数は恒等的にゼロな関数だけ。
従って運動量演算子のdomainは$\{0\}$のみ。

No. 2-15
'20 9 17

可分でないヒルベルト空間の例。

4) $\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \\ x\mapsto f(x) \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} \{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\neq 0\} \text{ が高々可算集合} \\ \text{かつ} \\ \sum_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|^2 < \infty \end{array} \right\}$

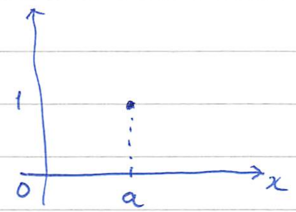
$$\langle f, g\rangle := \sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)^* \cdot g(x)$$



これ $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ がヒルベルト空間になることはいいね。

$a\in\mathbb{R}$ に対して、

$$e_a:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$$
$$x\mapsto e_a(x)=\begin{cases}1 & x=a\text{ のとき}\\ 0 & x\neq a\text{ のとき}\end{cases}$$



とおくと、$\langle e_a, e_b\rangle=\delta_{ab}$ かつ すべてのaについて $\langle e_a, f\rangle = f(a)$ なので
関数fに対して $F:=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\neq 0\}$ とおくと、 $\{e_a\}$は CONSの条件をほぼ満たす。

$$f(x)=\sum_{a\in F} f(a)\cdot e_a$$

も成立する。
このような展開係数が一意的に存在する。

(場の理論でも可分なヒルベルト空間しか扱わない)
非可分なヒルベルト空間は物理理論には使えないと考えられている。

しかし $\{e_a\}_{a\in\mathbb{R}}$ は 非可算無限

また、有限回の観測で近似を作ることもできない。

この空間では、平行移動演算子 T_b $(b\in\mathbb{R})$

$$(T_b f)(x) := f(x-b)$$

を定めると、$\langle f, T_b f\rangle = \begin{cases}\langle f, f\rangle & b=0\\ 0 & b\neq 0\end{cases}$

となり、$\frac{\partial}{\partial b}T_b$ を定義できない。平行移動のような基本的な連続操作すら不連続になってしまい、
これは不連続関数であり　リー群・リー代数の理論がまったく使えない。

線形作用素=演算子 の理論

定義

V：$\mathbb{C}$上の(可分な)ヒルベルト空間
$D(A) \subset V$ 　Vの部分空間

$$A : D(A) \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto Av$$

$A(v_1+v_2) = Av_1 + Av_2$
$\lambda \in \mathbb{C}$, $A(\lambda v) = \lambda \cdot Av$

を V上の線形作用素(linear operator) あるいはたんに作用素 operator
演算子 という。

$D(A) = \mathrm{dom}(A)$ などと書き、$D(A)$をAの定義域 domain という。
$= \mathrm{Dom}(A)$
$= \mathcal{D}(A)$

(より一般には、V, Wを異なるvector spaceとして $A : V \to W$ linear operator
を ~~扱~~ 扱うこともある
その場合も $\mathrm{dom}\,A \subset V$ は Vより小さいかもしれない。)

定義

A, Bが operator のとき、$\lambda \in \mathbb{C}$
λA
$A+B$
AB
がどのように定義されるか、おのおのの domain はどう定めるべきか
考えてみる。

演算子に $\hat{A}$ のように hat 帽子をかぶせて書く流儀もある
たしかにいろいろな記号が入り乱れてくると、そういう区別をしたくなることもある。

例．

1) $V = \mathbb{C}^n$ ∋ $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して $x_j \in \mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad a_{jk} \in \mathbb{C}$$

a_{jk} を A の j行k列目の成分という．

$$Av = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k$$

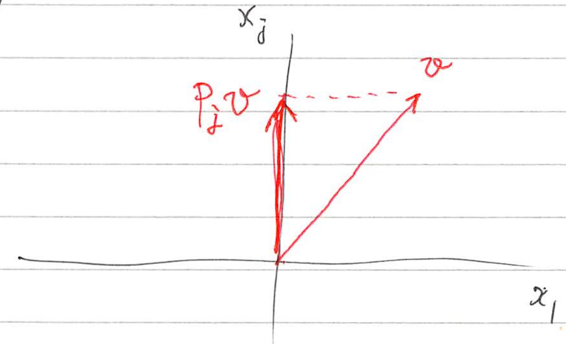
いわゆる，行列のベクトル上の作用．行列をベクトルにかける．

2) とくに

$$P_j = \begin{array}{c} \\ j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & \ddots 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 0 \cdots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

j行j列目だけ1で 他の成分は全部0．

$$P_j \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$



x_j軸への射影演算子

$$P_j P_j = P_j$$

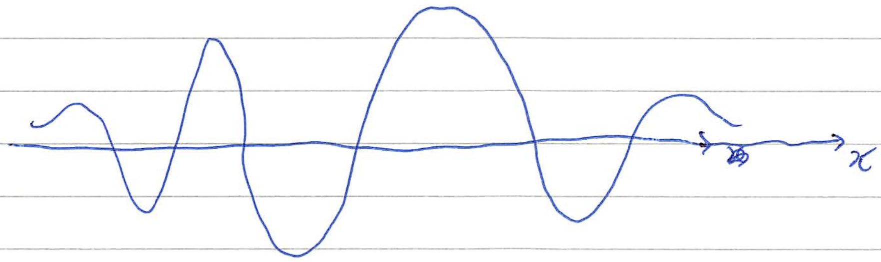
$j \neq k$ のとき $P_k P_j = 0$

3) $V = L^2(\mathbb{R}) \ni f$　$f(x)$ はいわゆる波動関数と思っていればよい.

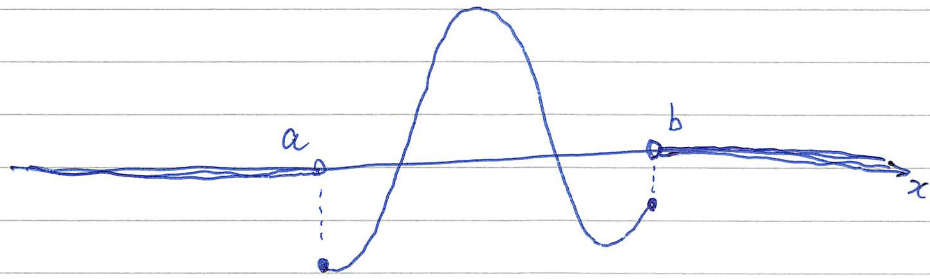
$a < b$ なる $a, b \in \mathbb{R}$ をえらんで

$$(P_{ab} f)(x) := \begin{cases} f(x) & a \le x \le b \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定めると, ~~これを~~ P_{ab} は $L^2(\mathbb{R})$ 上の operator.



もとの関数 $f(x)$ のグラフ



$(P_{ab} f)(x)$ のグラフ

$$P_{ab} \cdot P_{ab} = P_{ab}$$

$a < b,\ c < d$ として, $P_{ab} P_{cd} = ?$　どんな演算子になるでしょうか?

4) $V = L^2(\mathbb{R}) \ni f$

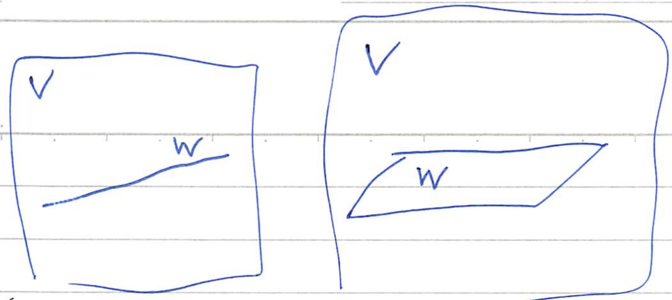
$$(Xf)(x) := x \cdot f(x)$$

Xを位置演算子 position operator という.
dom (X) は $L^2(\mathbb{R})$ より小さな部分集合. どんな集合?

5) $V = L^2(\mathbb{R})$

$$(Pf)(x) := -i\hbar \frac{\partial f}{\partial x}$$

Pを運動量演算子 momentum operator という.
dom (P) は?



定義

V : Hilbert space

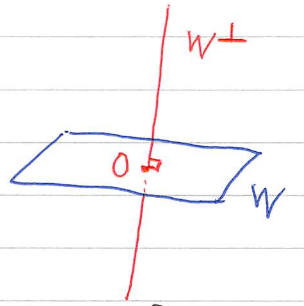
$W \subset V$ が Vの閉部分空間 (closed subspace) である

$\iff$ W が vector space であり、
任意の収束列 $w_1, w_2, \cdots \in W$ に対し $\lim_{n\to\infty} w_n \in W$.

嫌な例 $V = L^2([a,b])$ において $W = C([a,b])$ = [a,b]上の連続関数全体の集合。
W は V の部分空間だが、
閉部分空間ではない。

良い例 有限次元空間 $\mathbb{C}^n$ においては 任意の部分空間は
閉部分空間である。

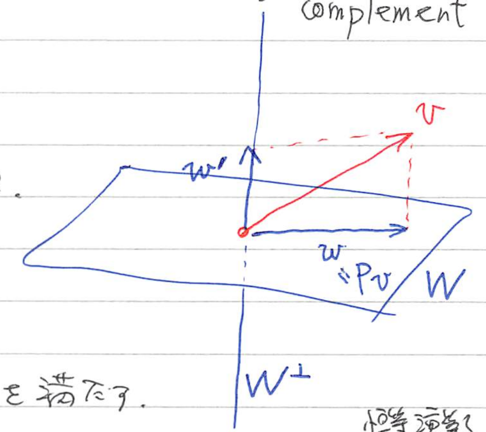
定理 直交分解定理



1. $W \subset V$ が 閉部分空間ならば

$$W^\perp := \{ v \in V \mid \forall w \in W,\ \langle v, w \rangle = 0 \}$$

もVの閉部分空間である。$W^\perp$ を W の直交補空間 orthogonal complement という。



2. $\forall v \in V$ に対して

$$v = w + w'$$

となる $w \in W$, $w' \in W^\perp$ が一意的に存在する。
これにより写像

$$P : V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto Pv := w$$

を定めると、これは線形写像であり、$P^2 = P$ を満たす。
また このことを

$$V = W \oplus W^\perp$$

とも書く。このとき $v = Pv + (\overset{\text{恒等演算子}}{1} - P)v$
が成立する。

このような P を Wへの射影演算子 projection operator という

定義 有界作用素 と そのノルム

V : Hilbert space

$\mathrm{dom}(A) = V$ なる作用素 $A : V \longrightarrow V$ に対し

$\underset{(\geq 0)}{M \in \mathbb{R}}$ $\forall v \in V$, $\|Av\| \leq M \|v\|$

なる M があれば A は有界作用素 (boundedoperator) だという。

このとき $\|A\| := \inf \{ M (\geq 0) \in \mathbb{R} \mid \|Av\| \leq M\|v\| \}$

と定める。

また 有界作用素全体の集合を $\mathbb{B}(V)$ と書く。

定理 有界 $\Longleftrightarrow$ 連続

定理 $\mathbb{B}(V)$ は バナッハ空間である。

とくに $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ $\|\lambda$.

~~$\|AB\| \leq$~~

$\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$ $\lambda \in \mathbb{C}$

$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ ← 証明せよ。

注 位置演算子 X や 運動量演算子 P は 有界でない。unbounded

f の選び方によって $\dfrac{\|Xf\|}{\|f\|}$ が 際限なく大きくなることを確かめよ。

同様に $\dfrac{\|Pf\|}{\|f\|}$ も 際限がない。

A が 非有界 $\Rightarrow$ $\mathrm{dom}\, A \subsetneq V$

定理 A が 有界作用素 なる

$\|\langle w, Av \rangle\| \leq \|w\| \cdot \|Av\| \leq \|w\| \|A\| \|v\|$

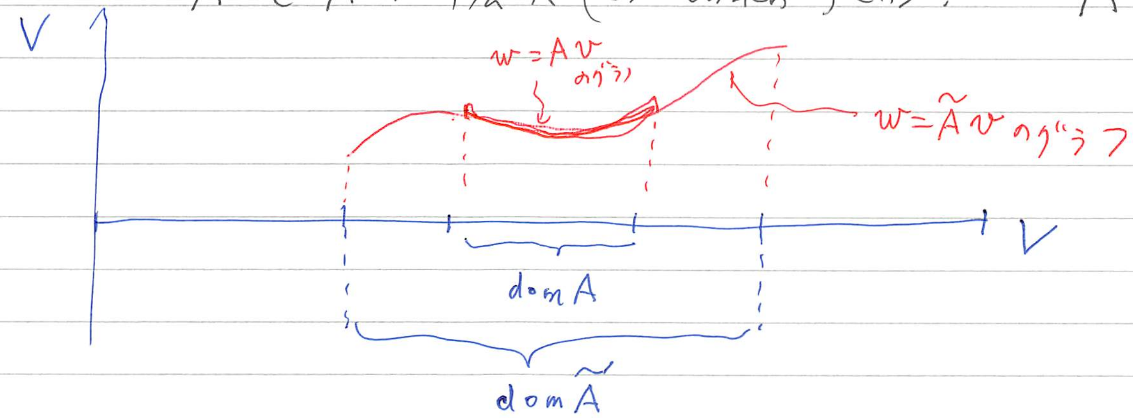
定義 拡大 (extension)

V上の作用素 A, $\tilde{A}$ があって、

$\mathrm{dom}\,A \subset \mathrm{dom}\,\tilde{A}$ かつ $\forall v \in \mathrm{dom}\,A,\ Av = \tilde{A}v$

であるならば

$\tilde{A}$ を A の拡大 (extension) という。 $A \leq \tilde{A}$



定義 共役・随伴作用素 (conjugate, adjoint operator)

V: Hilbert space

$A: \mathrm{dom}\,A \longrightarrow V$ $\mathrm{dom}\,A \subset V$ が稠密(ちゅうみつ)だとする。

$v \in \mathrm{dom}\,A$, $w \in V$ に対して

$$\varphi(v) := \langle w, Av \rangle$$

で定める $\varphi: \mathrm{dom}\,A \to \mathbb{C}$ が有界線形関数であるような w に対しては

$= \mathrm{dom}\,A^\dagger$ とする

Riesz の表現定理より

$$\varphi(v) = \langle z, v \rangle = \langle A^\dagger w, v \rangle$$

となるような $z \in V$ が一意的に存在する。

($v \in \mathrm{dom}\,A$ は V 全体を動かないかもしれないが、有界性と $\mathrm{dom}\,A$ の稠密性から $\mathrm{dom}\,\varphi$ は V 全体に拡大できる)

この対応

$$A^\dagger: \mathrm{dom}\,A^\dagger \longrightarrow V$$
$$w \longmapsto z$$

は線形写像となる。$A^\dagger$ を A の共役作用素という。

素朴に言えば

$$\langle w, Av \rangle = \langle A^\dagger w, v \rangle$$

が成り立つように $A^\dagger$ を定めている。

domain の問題をスルーすれば

$$(\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger$$

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger \cdot A^\dagger$$

$$(A^\dagger)^\dagger \supseteq A$$

<u>定義</u>

A は稠密な定義域 $\mathrm{dom}\,A \subset V$ を持つとする。このとき

A はエルミート作用素 (Hermitian) あるいは対称作用素 (symmetric operator) $:\Longleftrightarrow A \subseteq A^\dagger$

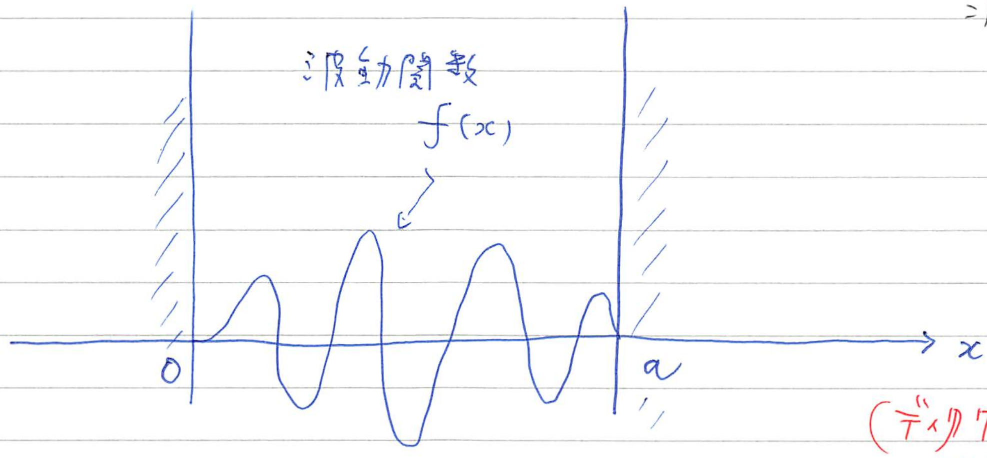
A は自己共役作用素 (self-adjoint operator) $:\Longleftrightarrow A = A^\dagger$

No. 3−9

'20・9・19(　　)

エルミート作用素だが、自己共役作用素ではない作用素の例

$V = L^2([0,a])$ いわゆる「無限に深い井戸型ポテンシャル」の問題の波動関数の集合。



運動量演算子 $P = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}$ ・・・ 非有界です。

(ディリクレ)
固定端
境界条件

domainをどう設定しましょうか？　いくつか候補があります。

$$D_1 := \left\{ \begin{array}{l} f : [0,a] \to \mathbb{C} \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array} \text{ 微分可能 かつ } \boxed{f(0) = f(a) = 0} \right\}$$

$$\langle g, Pf \rangle = \int_0^a g(x)^* \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx$$

$$= -i\hbar \Big[g(x)^* \cdot f(x) \Big]_{x=0}^{x=a} - (-i\hbar) \int_0^a \frac{\partial g^*}{\partial x} \cdot f(x)\, dx$$

$$= 0 + \int_0^a \left(-i\hbar \frac{\partial g}{\partial x}\right)^* f(x)\, dx$$

$$= \langle P^\dagger g, f \rangle$$

形式的には $\overset{\text{ダガー}}{P^\dagger} = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}$ です。$P^\dagger = P$ のように見えます。

しかし $\mathrm{dom}\, P^\dagger$ はどうなっているでしょうか？　つまり関数 $g(x)$ はどんな関数でしょうか？

$\langle g, Pf\rangle = \langle P^{\dagger}g, f\rangle$ が成り立つためには

関数 $g(x)$ が微分可能でありさえすればよく，

$g(x)$ には何も境界条件が課せられません．

つまり $\mathrm{dom}P = D_1 = \{f:$ 微分可能かつ $f(0)=f(a)=0\}$

$\mathrm{dom}P^{\dagger} = \{g:$ 微分可能なら何でもいいよ$\}$

なので $P \subsetneq P^{\dagger}$ です．

~~このような~~ D_1 を domain とする P は Hermitian ですが，self-adjoint ではないです．

P の固有値問題を考えましょう．

$$-i\hbar\frac{\partial f}{\partial x} = k\cdot f \quad (k\text{は定数})$$

の解は $f(x) = c\cdot e^{ikx/\hbar}$ （c も定数）

ですが境界条件 $f(0)=f(a)$ を課すと $c=0$．

つまり $f\equiv 0$，P の固有関数はなし，固有値もなし．

$P^{\dagger}$ の固有値問題はというと．．　式は同じです．

$$-i\hbar\frac{\partial g}{\partial x} = k\cdot g$$

解は $g(x) = c\cdot e^{ikx/\hbar}$．

k が複素数になっても $\int_0^a |g(x)|^2 dx$ は有限値なので

任意の複素数 k が $P^{\dagger}$ の固有値になります．

P と $P^{\dagger}$ はまったく別もの　$P = P^{\dagger}$ とは言えない．

Hilbert space の選び方を $V_2 := \left\{ f : [0, a] \to \mathbb{C},\ L^2 \text{可測かつ } f(0) = f(a) \right\}$ とすべき

周期境界条件
periodic boundary condition

P の domain を

$$D_2 := \left\{ \begin{array}{l} f : [0, a] \to \mathbb{C} \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array} \text{ 微分可能 かつ } \boxed{f(0) = f(a)} \right\}$$

にすると $\operatorname{dom} P^\dagger = \operatorname{dom} P$ になり　P は self-adjoint.

教訓

1. 形式的に $P = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}$ と書いただけでは作用素としては定まっていない.

2. domain の与え方しだいで (P, D_1) と (P, D_2) は別もの.

3. ちゃんと self-adjoint operator になっていないと, 固有値が複素数になったり, 固有値なしになったりする.

いまの例は twisted boundary condition　$f(a) = e^{ia} \cdot f(0)$ にしても self-adjoint になる.

作用素の種類

A：有界作用素 (bounded, bounded operator) :⟺ ~~有~~ $\mathrm{dom}\,A = V$ かつ $\forall v \in V,\ \|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\|$

$A^\dagger$ が A の共役作用素 (conjugate operator) :⟺ $\mathrm{dom}\,A \subset V$ が dense かつ $w \in \mathrm{dom}\,A^\dagger$ について $\langle w, Av \rangle = \langle A^\dagger w, v \rangle$

A が エルミート作用素 (Hermitian) :⟺ $\mathrm{dom}\,A \subseteq \mathrm{dom}\,A^\dagger$ かつ $v \in \mathrm{dom}\,A$ について $Av = A^\dagger v$

A が 自己共役作用素 (self-adjoint) :⟺ $\mathrm{dom}\,A = \mathrm{dom}\,A^\dagger \subseteq V$ が dense かつ $v \in \mathrm{dom}\,A$ について $Av = A^\dagger v$

A が 射影 ~~演算子~~ 作用素 (projection) :⟺ $A^\dagger = A$ かつ $A^2 = A$

A が ユニタリ ~~演算子~~ 作用素 (unitary) :⟺ $A^\dagger \cdot A = A \cdot A^\dagger = I$ (identity operator)

A が 正規演算子 :⟺ $A^\dagger A = A \cdot A^\dagger$

domainについてムトンチャクに書くと、

作用素 A に対して

$\mathrm{Re}A := \frac{1}{2}(A + A^\dagger)$ を A の実部

$\mathrm{Im}A := \frac{1}{2i}(A - A^\dagger)$ を A の虚部という。

~~このとき~~ $A = \mathrm{Re}A + i\,\mathrm{Im}A$ が成り立つ。

A が正規とは、A の実部と虚部が可換だということ。

つまり A は自己共役でなくても、A の実部と虚部は同時対角化できて、A 自体も複素固有値に対角化できるということ。

● いわゆる生成・~~消~~消滅演算子は正規でない代表例。

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega\hat{Q} + i\hat{P}\right)$$

$$\hat{A}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega\hat{Q} - i\hat{P}\right)$$

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = \hat{1} \qquad [\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar\hat{1}$$

演習
A の
- 固有値をすべて求めよ
- 規格化された固有ベクトルをすべて求めよ。

$A^\dagger$ についてはどうか？

Spectral decomposition theorem ~~of~~ for self-adjoint operators

No. 3-14
'20 9 19

自己共役作用素のスペクトル分解定理

おそらくvon Neumann自身のお気に入りの仕事の一つ.

<u>定理</u> Hilbert space V 上の任意の self-adjoint operator A に対して、以下の条件を満たす Π (パイ) が ~~存在する~~ が一意的に存在する.

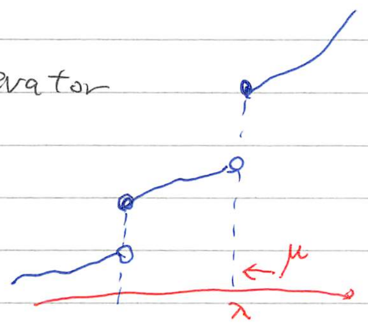
1. 任意の実数 λ に対し $\Pi(\lambda)$ は V 上の射影演算子である.

2. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ $\quad \Pi(\lambda_1)\Pi(\lambda_2) = \Pi(\lambda_2)\Pi(\lambda_1) = \Pi(\lambda_1)$

3. $\lim_{\mu \to \lambda+0} \Pi(\mu) = \Pi(\lambda)$ (強収束)

4. $\lim_{\lambda \to -\infty} \Pi(\lambda) = 0$ null operator

5. $\lim_{\lambda \to +\infty} \Pi(\lambda) = 1$ identity operator



6. $$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \Pi(d\lambda)$$

ただし 実数の区間 $\Delta\lambda := (\lambda_1, \lambda_2] = \{x \in \mathbb{R} \mid \lambda_1 < x \leq \lambda_2\}$

に対して $\Pi(\Delta\lambda) := \Pi(\lambda_2) - \Pi(\lambda_1)$

とおいて、射影作用素に値を持つ測度を定めている.

このような Π をスペクトル測度 (spectral measure) といい、6の式をAのスペクトル分解という.