物理学基礎 I（医・医）第 9 回
仕事とエネルギー（拘束系の運動）

川﨑猛史

名古屋大学理学部物理学科

Last update：June 17, 2021

第 9 回講義資料目次

第 9 回講義資料目次

1. 講義のスケジュール

♣ スケジュール更新（6/18）

1. 4/16：第 1 回
2. 4/23：第 2 回 (第 1・2 回課題公開)
3. 4/30：第 3 回 (第 1・2 回課題提出期限)
4. 5/07：第 4 回 (第 3・4 回課題公開)
5. 5/14：第 5 回 (第 3・4 回課題提出期限)
6. 5/21：第 6 回 (第 5・6 回課題公開)
7. 5/28：第 7 回 (第 5・6 回課題提出期限)
8. 6/04：第 8 回 (第 7・8 回課題公開)
9. 6/11：名大祭のため休講
10. **6/18：第 9 回 (第 7・8 回課題提出期限)**
11. 6/25：第 10 回　(第 9・10 回課題公開)
12. 7/02：第 11 回 (**第 9・10 回課題提出期限**)
13. 7/09：第 12 回 (第 11・12 回課題公開)
14. 7/16：第 13 回 (**第 11・12 回課題提出期限**)
15. 7/17 補講日：第 14 回 (第 13・14 回課題公開)
16. 7/23：オリンピックのため休講　**(後日指定) 第 13・14 回課題提出期限**
17. 7/30：なし
18. 8/6（予定）：　期末試験

第 9 回講義資料目次

2. 今回の内容

♣ 本講義内容（期末試験範囲予定）[教科書 p31-p103(但し p93 以降はごく基本的な内容に限る)]

- 導入：物理学とは.
- 質点の運動学：質点の位置，速度，加速度の関係，ならびに，これらの微分（積分）による表現方法を学ぶ。特に，自由落下，斜方投射，等速円運動などを具体的に扱う。
- 運動の原因となる「力」を導入する.
- 「運動の３法則」(慣性の法則，運動方程式，作用・反作用の法則）を導入し，様々な運動を運動方程式を用いて普遍的に表現する.
- 質点の運動方程式の解法：運動方程式を様々なタイプの微分方程式に落とし込み，これらを具体的に解く。特に，減衰運動，単振動，減衰振動，強制振動などを扱う。
- エネルギーとその保存則：仕事とエネルギーの関係を考察し，それらの具体的な問題を扱う.
- 中心力運動：重力系を例に，中心力による質点の軌道を考察する.
- 相対運動と慣性力：座標変換と相対運動を扱い，慣性力を導入する.
- 多質点系の並進運動：重心運動と相対運動に分けて考える.
- 多質点系の回転運動：慣性モーメントの導入.
- 剛体の動力学：慣性モーメントを用いて回転する剛体運動の簡単な例を扱う.

第 9 回講義資料目次

3.1. 自由運動と束縛（拘束）運動

♣ 自由運動と束縛（拘束）運動 [教科書 p67 参照]

- 第 6 回から第 8 回講義にかけて，物体に掛かる力が行う仕事とエネルギーに関する基本的な考え方を導入した．
- 今回は，台の上におかれたり，糸に吊り下げられた，運動に制限をもたらす拘束環境にある物体の仕事とエネルギーの関係について考察する．

運動の種類

- 自由運動：物体が自由に動くことができる運動（理想状態）

  (例) 自由落下運動，放体運動

- 束縛運動：拘束条件が付いた系 (拘束系) における物体の運動．抗力や張力，摩擦力などの 束縛力（拘束力） が働く．

  (例) 面上の物体の運動（抗力・摩擦力）
  (例) 糸につるされた物体の運動（張力）

3.2. 束縛運動の性質

♣ 束縛運動の性質 [教科書 p67 参照]

- 拘束条件が付いた系の運動方程式は，重力などの強制力（外力）を $\mathbf{F}$，束縛力を $\mathbf{T}$ とすると

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{T}} \tag{1}$$

- 物体の運動を面や線に限定する拘束力の多くは，それらに対して垂直に働き，物体に対して仕事をしない場合がある (以下の例題で実際に計算する).
- この様な仕事をしない束縛力を，滑らかな拘束とよぶ.
- $\mathbf{T}$ が滑らかな拘束の場合，$\mathbf{T}$ が非保存力であっても，強制力 $\mathbf{F}$ が保存力であれば，力学的エネルギーは保存する.

3.2. 束縛運動の性質 (2)

- 証明：　時間区間 $[t_0, t_1]$，経路 C において合力が行なった仕事 W は，時間 t における位置エネルギーと運動エネルギーをそれぞれ $U(t)$，$K(t)$ とすれば

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{\mathrm{C}} \underbrace{\mathbf{F}}_{\text{保存力}} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathrm{C}} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \underbrace{U(t_0) - U(t_1)}_{\text{保存力からの寄与}} + \int_{\mathrm{C}} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{r} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

同時に，$W = \int_{\mathrm{C}} m\ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}$ から

$$W = K(t_1) - K(t_0) \qquad (3)$$

を得るので，力学的エネルギーを $E(t) = U(t) + K(t)$ とすると，式 (2) と (3) が等しいことから，

$$\boxed{E(t_1) = E(t_0) + \underbrace{\int_{\mathrm{C}} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{束縛力の行なった仕事}}} \qquad (4)$$

となり，時間経過にともない拘束力の行なった仕事分，力学的エネルギーが変化する．
- 束縛力の仕事が **0** であれば力学的エネルギーが保存する．

3.2. 束縛運動の性質 (3)

以下，束縛力の例について詳しく述べる．

第 9 回講義資料目次

4.1. 垂直抗力・張力

様々な束縛力

- ♣ **垂直抗力**
  第 2 回講義資料 p16-17 を参照
- ♣ **張力 [要参照：教科書 2 章 章末問題]**
  たわみのないひも状の物体を引っ張る力.
  特徴：
  - 張力を介して，ひもの先端に付けられた他の物体を拘束する.
  - ひもがたわむと張力は消え，他の物体を拘束することが出来なくなる.

  例 [図 1]：

  左図 天井から吊り下げられた糸と重りからなる振り子を表す.
  中央図 糸の両端を引っ張る方向に張力 (それぞれ $\mathbf{T}$ と $-\mathbf{T}$).
  右図 天井には張力の反作用 $\mathbf{T}$，重りには，重力 $m\mathbf{g}$ と張力の反作用 $-\mathbf{T}$ が働く様子.

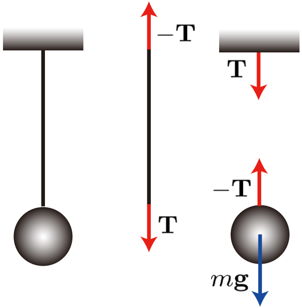

図 1: (左) 天井から吊り下げられた，糸と重りからなる振り子. (中央) 糸にかかる力. 両端を引っ張る方向に張力. (右) 天井と重りに働く力.

4.2. 摩擦力

♣ 摩擦力 [要参照：教科書 2 章 章末問題]

- 摩擦力：粗い表面を持つ物体間において働く力.
- 摩擦の力学は，17 世紀にギョーム・アモントン（Guillaume Amontons），18 世紀にシャルル・クーロン（Charles Coulomb）らにより実験と経験に基づき，以下の「経験則」として纏められた.
- アモントン・クーロン則（荒い台上におかれた物体に働く摩擦力に関する経験則）
  - 台上の静止物体に，台に対して水平方向を向く強制力 $\mathbf{F}$ を与えると，それと反対方向を向く，大きさの等しい力，静止摩擦力 $\mathbf{f}$ が働く.
  - 静止摩擦力には限界値がある：最大静止摩擦力.
  - 台上において運動する物体には，物体の速度 $\mathbf{v}$ と反対方向を向く動摩擦力が働く.
  - 最大静止摩擦力と動摩擦力は，いずれも台から物体に掛かる垂直抗力を $N = |\mathbf{N}|$ に比例する．但しその比例係数は，それぞれ異なる.

4.2. 摩擦力 (2)

- 以上の内容を数式を用いて整理：

アモントン・クーロン則の数理的性質

- 物体が静止しているときは，以下の様に，強制力と釣り合う静止摩擦力が働く．

$$\boxed{\mathbf{f} = -\mathbf{F}} \tag{5}$$

- 最大静止摩擦力は，

$$\boxed{\mathbf{f}_{\mathrm{max}} = -\mu_{\mathrm{s}} N \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}} \tag{6}$$

(最大静止摩擦力の大きさは $\mu_{\mathrm{s}} N$)

- $-\frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}$ は，与えた力の向きと反対方向を向く単位ベクトル，μ_{s} は静止摩擦係数．
- 物体が動いているときは，以下の動摩擦力が働く．

$$\boxed{\mathbf{f} = -\mu_{\mathrm{d}} N \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}} \tag{7}$$

動摩擦力の大きさは $\mu_{\mathrm{d}} N$ となり，垂直抗力に依存．

- $-\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ は，物体の速度の向きと反対方向を向く単位ベクトル，μ_{d} は動摩擦係数．
- 一般的に，$\mu_{\mathrm{s}} > \mu_{\mathrm{d}}$ となり，静止していた物体が動き出すと，摩擦力は，最大静止摩擦力から動摩擦力に切り替わりその大きさが少し小さくなる．

4.2. 摩擦力 (3)

- 静止摩擦力, 動摩擦力のいずれも，物体が同じ位置にあっても，そこにかかる強制力や速度の「向き」次第でその方向が変わる.
- これらは，位置だけに依存する関数ではない為，$\boxed{\text{保存力ではない}}$.
- 強制力 $|\mathbf{F}|$ を大きくしていった際の摩擦力 $|\mathbf{f}|$ の振る舞いを図 **2** にまとめた.

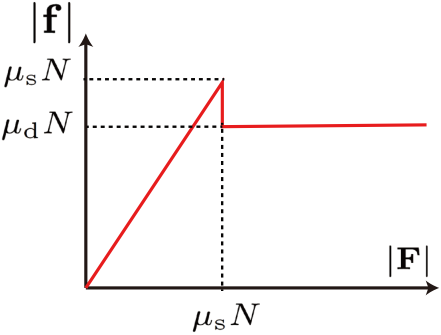

図 2: 物体に働く強制力 $|\mathbf{F}|$ と摩擦力 $|\mathbf{f}|$ の関係. $|\mathbf{F}|$ の小さい領域では，物体は静止状態を保ち $|\mathbf{f}| = |\mathbf{F}|$ を満たす．最大静止摩擦力を越える強制力 ($|\mathbf{F}| > \mu_\mathrm{s} N$) を与えると物体は動き出す．この時の摩擦力の大きさは $\mu_\mathrm{d} N$ である.

4.3. 振り子運動に関する例題

以下，例題を通して束縛力の性質を考察する．

例題 1: 単振り子運動，2 次元極座標系 [教科書 p68 改題]

- 長さ ℓ の糸の上端を固定し，下端に質量 m の重りをつけ，鉛直面内で振らせる装置を単振り子という．
- 糸が鉛直方向となす角度を θ と置き，図 **3** の様に，(x, y) 座標の原点を糸の上端とし，重りの位置座標 $\mathbf{r}$ を，直交する 2 つの単位ベクトル：**動径方向 (r が大きくなる方向)** の単位ベクトル $\mathbf{e}_r = (\sin\theta, -\cos\theta)$ と**接線方向 (θ が大きくなる方向)** の単位ベクトル $\mathbf{e}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ を用いて，$\mathbf{r} = x_r\mathbf{e}_r + x_\theta\mathbf{e}_\theta$ と分解する．
- 重りの速さは $\dot{\mathbf{r}} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta$，重りの加速度は $\ddot{\mathbf{r}} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta$ とする．
- この様な座標系を **2 次元極座標系**という．
- 以下，極座標系を用いて，単振り子に関する各問いに答えよ．なお，重力加速度を g とし，空気抵抗等は無視することにする．また，重りは時刻 $t = 0$ において，最下点を速さ v_0 で通過したとする．

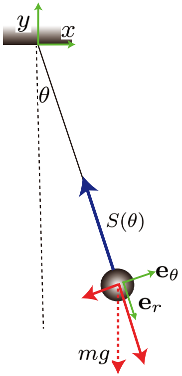

図 **3**: 振り子系．重りに掛かる力を図示した．重りは糸からの張力により，$\mathbf{e}_r$ に対して負の方向に引っ張られる．

4.3. 振り子運動に関する例題 (2)

[例題１：設問]

(1) $\mathbf{e}_r$，$\mathbf{e}_\theta$ 方向に関する重りの運動方程式を，a_r，a_θ を用いてそれぞれ立てよ．

(2) $\mathbf{r} = \ell \mathbf{e}_r$ であることを示せ．

(3) v_r，v_θ，a_r，a_θ を ℓ，θ，時間微分記号を用いて表せ．

(4) θ が小さい時，重りは単振動することを示せ．またこの時，単振動の周期を求めよ．

(5) 任意の θ に対する張力の大きさ $S(\theta)$ を v_θ を用いて求めよ．

(6) 張力 $\mathbf{S}(\theta)$ は非保存力であることを示せ．

(7) 張力 $\mathbf{S}(\theta)$ は単振り子の運動を通して一切仕事をしないことを示せ（線積分を用いる）．

(8) 問 (7) の様に，非保存力が仕事をしないことから，本系における保存力に関する力学的エネルギーが保存則することを示せ．

(9) 力学的エネルギー保存則を用いることにより張力の大きさ $S(\theta)$ を v_0 を用いて表せ．

(10) ある θ において糸がたるまないための v_0 が満たすべき条件を示せ．

(解答)

4.3. 振り子運動に関する例題 (3)

(1) **$\mathbf{e}_r$，$\mathbf{e}_\theta$ 方向に関する，重りの運動方程式を，a_r，a_θ を用いてそれぞれ立てよ．**
重りの運動方程式は,

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = ma_r\mathbf{e}_r + ma_\theta\mathbf{e}_\theta} \tag{8}$$

と，動径方向 ($\mathbf{e}_r$ 方向) と，接線方向 ($\mathbf{e}_\theta$ 方向) に分解できる．よって，図 **3** の様に，$\mathbf{e}_r$ 方向の運動方程式は,

$$\boxed{ma_r = -S(\theta) + mg\cos\theta} \tag{9}$$

である．$\mathbf{e}_\theta$ 方向の運動方程式は,

$$\boxed{ma_\theta = -mg\sin\theta} \tag{10}$$

となる．

(2) **$\mathbf{r} = \ell\mathbf{e}_r$ であることを示せ．**
$\mathbf{r}$ は糸の上端と重りを結んだベクトルであるので $\mathbf{r} = \ell(\sin\theta, -\cos\theta)$ となる．いま $\mathbf{e}_r = (\sin\theta, -\cos\theta)$ であるので,

$$\boxed{\mathbf{r} = \ell\mathbf{e}_r} \tag{11}$$

となる．

4.3. 振り子運動に関する例題 (4)

(3) v_r，v_θ，a_r，a_θ を ℓ，θ，時間微分記号を用いて表せ．
重りの速さ $\dot{\mathbf{r}}$ と加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ は，式 (11): $\mathbf{r}=\ell\mathbf{e}_r$ の時間微分から求まる．その際，$\mathbf{e}_r$ や $\mathbf{e}_\theta$ の時間微分が必要になる．実際，

$$\boxed{\dot{\mathbf{e}}_r=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin\theta,-\cos\theta)=\underbrace{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}}_{\text{合成関数微分}}(\sin\theta,-\cos\theta)=\dot{\theta}(\cos\theta,\sin\theta)=\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta},$$

$\boxed{\dot{\mathbf{e}}_\theta=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\theta,\sin\theta)=-\dot{\theta}\mathbf{e}_r}$ であることに注意すると，

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}}=\ell\dot{\mathbf{e}}_r=\ell\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta\qquad(:=v_r\mathbf{e}_r+v_\theta\mathbf{e}_\theta)}\tag{12}$$

式 (12) を時間微分すると

$$\boxed{\ddot{\mathbf{r}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ell\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)=\ell(\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta+\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta)=\ell(\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta-\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r)\qquad(:=a_r\mathbf{e}_r+a_\theta\mathbf{e}_\theta)}\tag{13}$$

となる．式 (12) と (13) の結果から，$\mathbf{e}_r$ と $\mathbf{e}_\theta$ の係数を比較することで，動径速度 $\boxed{v_r=0}$，接線速度 $\boxed{v_\theta=\ell\dot{\theta}}$ （速度は接線方向のみ），動径加速度 $\boxed{a_r=-\ell\dot{\theta}^2}$，接線加速度 $\boxed{a_\theta=\ell\ddot{\theta}}$ を得る．

4.3. 振り子運動に関する例題 (5)

(4) θ が小さい時，重りは単振動することを示せ．またこの時，単振動の周期を求めよ．
θ が小さい時，$\sin\theta \sim \theta$ と近似すれば，$\mathbf{e}_\theta$ 方向の運動方程式は，$a_\theta = \ell\ddot{\theta}$ を用いることで

$$\boxed{m\ell\ddot{\theta} = -mg\theta} \tag{14}$$

であり，θ に関する 2 階線形同次微分方程式となる．これは角速度 $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ の単振動を示す．
従って単振り子の周期は，$\boxed{T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$ となる．（周期は重りの質量 m に依存しない！）

(5) 任意の θ に対する張力の大きさ $S(\theta)$ を v_θ を用いて求めよ．
$a_r = -\ell\dot{\theta}^2$ より，$\mathbf{e}_r$ 方向 (動径方向) の運動方程式は,

$$-m\ell\dot{\theta}^2 = -S(\theta) + mg\cos\theta$$

である．いま，$v_\theta = \ell\dot{\theta}$ を用いれば,

$$\boxed{-m\frac{v_\theta^2}{\ell} = -S(\theta) + mg\cos\theta}$$

4.3. 振り子運動に関する例題 (6)

を得る（高校物理で出てきた円運動の運動方程式: $\frac{m{v_\theta}^2}{r}$ = 向心力）．従って，任意の θ における糸の張力は

$$\boxed{S(\theta) = m\frac{v_\theta^2}{\ell} + mg\cos\theta}$$

となる．

(6) 張力 $\mathbf{S}(\theta)$ は非保存力であることを示せ．

$S(\theta)$ は物体の速度に依存するため，張力は非保存力である．

(7) 張力 $\mathbf{S}(\theta)$ は単振り子の運動を通して一切仕事をしないことを示せ（線積分を用いる）

張力（ベクトル）$\mathbf{S}(\theta)$ は

$$\boxed{\mathbf{S}(\theta) = -S(\theta)\mathbf{e}_r} \tag{15}$$

と表される．いま，張力が θ の区間 $[0, \theta_1]$(経路 C とする) で行った仕事 W_S を求めよう．この時，$\mathbf{r} = \ell\mathbf{e}_r$ であるので $\mathrm{d}\mathbf{r} = \ell\mathrm{d}\mathbf{e}_r = \underbrace{\ell\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_r}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta}_{\text{合成関数微分}} = \ell\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta, -\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \ell\mathbf{e}_\theta\mathrm{d}\theta$，また

$\mathbf{e}_\theta$ と $\mathbf{e}_r$ が直交することに注意すると，

$$\boxed{W_\mathrm{S} = \int_\mathrm{C}\mathbf{S}(\theta)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{\theta_1}\underbrace{-S(\theta)\mathbf{e}_r\cdot(\ell\mathbf{e}_\theta)}_{\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_\theta = 0(\text{直交})}\mathrm{d}\theta = 0} \tag{16}$$

4.3. 振り子運動に関する例題 (7)

となる．つまり，非保存力である張力 $\mathbf{S}(\theta)$ は仕事をしない．この様に，張力は滑らかな拘束となっている．

(8) **問 (7) の様に，非保存力が仕事をしないことから，本系における保存力に関する力学的エネルギーが保存則することを示せ．**
張力は仕事をしないので経路 C(区間 $[0,\theta_1]$) における，物体に掛かる合力が行う仕事 $W_{\rm tot}$ は，重力 $m\mathbf{g} = (0, -mg)$ による寄与のみである．いま，
$m\mathbf{g}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = m\mathbf{g}\cdot\ell\mathbf{e}_\theta\mathrm{d}\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}\cdot\ell\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}\mathrm{d}\theta = -mg\ell\sin\theta\mathrm{d}\theta$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned} W_{\rm tot} &= \int_{\rm C} m\mathbf{g}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= \int_0^{\theta_1} -mg\ell\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= mg\ell(\cos\theta_1 - 1) \end{aligned} \tag{17}$$

を得る．また，重力が保存力であることから，位置エネルギーを
$U(\theta) = -\int_0^\theta -mg\ell\sin\theta\mathrm{d}\theta = mg\ell(1-\cos\theta)$ と定義すると

$$W_{\rm tot} = \underbrace{U(0)}_{0} - U(\theta_1) \tag{18}$$

4.3. 振り子運動に関する例題 (8)

を得る．また，経路 C に対応する時間区間を $[0, t_1]$ とすれば，

$$W_{\mathrm{tot}} = \int_{\mathrm{C}} m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{t_1} \frac{m}{2} \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{r}}^2}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = K(v(t_1)) - K(v(0)) \tag{19}$$

となる．ここで $K(v) = \frac{mv^2}{2}$ である．従って，力学的エネルギー $E(t) = U + K$ が保存する．つまり仕事の担い手が重力などの保存力のみであれば力学的エネルギーが保存する．

(9) **力学的エネルギー保存則を用いることにより張力の大きさ $S(\theta)$ を v_0 を用いて表せ．**
力学的エネルギー保存則から，

$$\frac{mv_0^2}{2} + \underbrace{0}_{U(0)} = \frac{mv_\theta^2}{2} + \underbrace{mg\ell(1 - \cos\theta)}_{U(\theta)} \tag{20}$$

である．よって，$\frac{mv_\theta^2}{\ell} = \frac{mv_0^2}{\ell} - 2mg(1 - \cos\theta)$ となる．これを問 (5) で得た $S(\theta) = m\frac{v_\theta^2}{\ell} + mg\cos\theta$ に代入すると

$$\boxed{S(\theta) = \frac{mv_0^2}{\ell} + mg(3\cos\theta - 2)} \tag{21}$$

4.3. 振り子運動に関する例題 (9)

(10) ある θ において糸がたるまないための v_0 が満たすべき条件を示せ．
糸がたるまない条件は，$S(\theta) \geq 0$ であることから，

$$\boxed{S(\theta) = \frac{mv_0^2}{\ell} + mg(3\cos\theta - 2) \geq 0} \tag{22}$$

よって，$v_0 > 0$ より

$$\boxed{v_0 \geq \sqrt{g\ell(2 - 3\cos\theta)}} \tag{23}$$

を満たせばよい．

4.4. 摩擦運動に関する例題

例題 2: あらい斜面上での質点の運動 [教科書 p69 改題]

質量 m の質点が斜面角 θ のあらい斜面の傾きが最も急な直線に沿って速さ v_0 で上方にはじき出された．いま，斜面に平行かつ上向きを正とする x 軸，これに対して垂直な y 軸を図 **4**(左) の様に定義する．特に，質点がはじきだされた位置を $x = 0$ とし，質点が到達しうる最大距離を x_m とする．質点と床の間にはアモントン・クーロン則に基づいた静止摩擦力または動摩擦力が働き，静止摩擦係数を μ_{s}，動摩擦係数を μ_{d} とする．また，重力加速度を g とするとき，以下の各問いに答えよ．

例題 2 設問

(1) 質点が $x = x_m$ に到達するまでの運動方程式を立てよ．

(2) 質点に働く斜面からの垂直抗力 $\mathbf{N}$ が，質点の運動の際，仕事をしないことを示せ．

(3) 最大距離 x_m を求めよ．

(4) 質点が $x = x_m$ に到達後，質点が下向きに動きだすための μ_{s} が満たすべき条件を求めよ．

(5) 質点が $x = x_m$ に到達後，質点が下向きに動き出した際の質点の運動方程式を求めよ．

4.4. 摩擦運動に関する例題 (2)

(解答)

(1) **質点が $x = x_m$ に到達するまでの運動方程式を立てよ．**
質点が $x = x_m$ に到達するまで，物体には動摩擦力 $-\mu_d N$ が働く．いま，物体は面上に拘束されているので $N = mg\cos\theta$ である．したがって，この時の質点の運動方程式は，

$$\boxed{m\ddot{x} = -mg\sin\theta - \mu_\mathrm{d} mg\cos\theta} \tag{24}$$

となる．図 **4** に質点に働く各力を図示したので参照せよ．

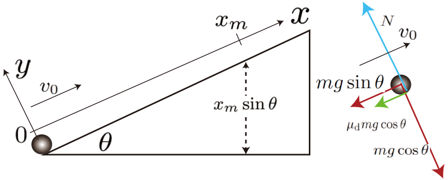

図 **4**: 本例題の設定図．右図に (1) において質点に働く力を図示した．

4.4. 摩擦運動に関する例題 (3)

(2) 質点に働く斜面からの垂直抗力 $\mathbf{N}$ が，質点の運動の際，仕事をしないことを示せ．
垂直抗力 $\mathbf{N}$ はベクトル表示すると

$$\mathbf{N} = mg\cos\theta(0,1) \tag{25}$$

である．質点は x 軸上に平行に運動するので，積分経路を x に沿ってとると，質点の位置は $\mathbf{r} = (x, 0)$ と置ける．すると，$\mathrm{d}\mathbf{r} = (\mathrm{d}x, 0)$ である．従って，内積 $\mathbf{N}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ となる．すると，任意の区間 $[0, x_1]$ において垂直抗力が行った仕事 W_{N} は

$$W_{\mathrm{N}} = \int_0^{x_1} \mathbf{N}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{x_1} 0 = 0 \tag{26}$$

となり，任意の区間において垂直抗力は仕事をしないことが示された．

4.4. 摩擦運動に関する例題 (4)

(3) 最大距離 x_m を求めよ．

問 (2) で扱ったように垂直抗力は仕事をしないが，摩擦力は質点の移動の間常に負の仕事をする．つまり，系の力学的エネルギーを運動エネルギーと重力の位置エネルギーの和とすれば，摩擦の行った仕事の分だけ力学的エネルギーを失うことになる．区間 $[0, x_m]$ において摩擦力が行った仕事は $-\mu_{\mathrm{d}} mg\cos\theta x_m$ である．また，運動の間，力学的エネルギーの変化は，$mgx_m\sin\theta - \frac{mv_0^2}{2}$ である．摩擦力が行った仕事と力学的エネルギーの変化が釣り合うので

$$\boxed{-\mu_{\mathrm{d}} mg\cos\theta x_m = mgx_m\sin\theta - \frac{mv_0^2}{2}} \tag{27}$$

を得る．これを纏めると，

$$\boxed{x_m = \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_{\mathrm{d}}\cos\theta)}} \tag{28}$$

を得る．

(補足) 教科書の様に，等加速度運動として移動距離 x_m を求めてもよい．

4.4. 摩擦運動に関する例題 (5)

(4) **質点が $x = x_m$ に到達後，質点が下向きに動きだすための μ_s が満たすべき条件を求めよ．**
質点が $x = x_m$ に到達した際，質点が下向きに動きだすために μ_s が満たすべき条件は，斜面下向きの強制力 $mg\sin\theta$ が斜面上向きの最大静止摩擦力より大きい場合であるので，

$$\boxed{mg\sin\theta > \mu_\mathrm{s} mg\cos\theta} \tag{29}$$

より，

$$\boxed{\mu_\mathrm{s} < \tan\theta} \tag{30}$$

(5) **質点が $x = x_m$ に到達後，質点が下向きに動き出した際の質点の運動方程式を求めよ．**
質点が $x = x_m$ に到達後，質点が下向きに動き出した際の質点の運動方程式を求めよ．ここでは動摩擦力 $\mu_\mathrm{d} mg\cos\theta$ が速度と反対方向に働くので運動方程式は式 (24) とは異なり，

$$\boxed{m\ddot{x} = -mg\sin\theta + \mu_\mathrm{d} mg\cos\theta} \tag{31}$$

となる．この様に摩擦力は，その時の速度に依存するため保存力でないことが分かる．

第 9 回講義資料目次

5. まとめ

拘束系における，質点の運動，ならびに，質点にかかる合力の行った仕事とエネルギーの関係を考察した．

- 垂直抗力や張力などは非保存力であるが，運動の方向と垂直方向を向いている為仕事をしない．この様な拘束を滑らかな拘束とよぶ．
- 質点に掛かる力が，滑らかな拘束以外すべてが保存力の場合，力学的エネルギーは保存する．
- **摩擦力は常に負の仕事をするため，質点の移動距離に応じて，力学的エネルギーを失う．**

次回予告： 中心力運動