物理学基礎 I（医・医）第 7 回
仕事とエネルギー（2・3 次元）　前半

川崎猛史

名古屋大学理学部物理学科

Last update：May 27, 2021

第 7 回講義資料目次

第 7 回講義資料目次

1. 講義のスケジュール

♣ 講義資料は各講義予定日前日にアップロードする.

1. 4/16：第 1 回
2. 4/23：第 2 回 (第 1・2 回課題公開)
3. 4/30：第 3 回 (第 1・2 回課題提出期限)
4. 5/07：第 4 回 (第 3・4 回課題公開)
5. 5/14：第 5 回 (第 3・4 回課題提出期限)
6. 5/21：第 6 回 (第 5・6 回課題公開)
7. **5/28：第 7 回 (第 5・6 回課題提出期限)**
8. 6/04：第 8 回 (第 7・8 回課題公開)
9. 6/11：名大祭のため休講
10. 6/18：第 9 回 (**第 7・8 回課題提出期限**)
11. 6/25：第 10 回　(第 9・10 回課題公開)
12. 7/02：第 11 回 (**第 9・10 回課題提出期限**)
13. 7/09：第 12 回
14. 7/16：第 13 回 (第 11・12・13 回課題公開)
15. 7/17：補講（質問対応等）
16. 7/23：オリンピックのため休講　(**第 11・12・13 回課題提出期限**)
17. 8/6（予定）：　期末試験

第 7 回講義資料目次

2. 今回の内容

♣ 本講義内容（期末試験範囲予定）[教科書 p31-p103(但し p93 以降はごく基本的な内容に限る)]

- 導入：物理学とは.
- 質点の運動学：質点の位置，速度，加速度の関係，ならびに，これらの微分（積分）による表現方法を学ぶ。特に，自由落下，斜方投射，等速円運動などを具体的に扱う。
- 運動の原因となる「力」を導入する.
- 「運動の３法則」(慣性の法則，運動方程式，作用・反作用の法則）を導入し，様々な運動を運動方程式を用いて普遍的に表現する.
- 質点の運動方程式の解法：運動方程式を様々なタイプの微分方程式に落とし込み，これらを具体的に解く。特に，減衰運動，単振動，減衰振動，強制振動などを扱う。
- **エネルギーとその保存則：仕事とエネルギーの関係を考察し，それらの具体的な問題を扱う.**
- 中心力運動：重力系を例に，中心力による質点の軌道を考察する.
- 相対運動と慣性力：座標変換と相対運動を扱い，慣性力を導入する.
- 多質点系の並進運動：重心運動と相対運動に分けて考える.
- 多質点系の回転運動：慣性モーメントの導入.
- 剛体の動力学：慣性モーメントを用いて回転する剛体運動の簡単な例を扱う.

第 7 回講義資料目次

3. 仕事とエネルギー（2 次元・3 次元）

♣ 仕事とエネルギー（2 次元・3 次元）[教科書 p51 ～ p60]

- 前回，仕事とエネルギーの概念を導入した．
- 特に，力が保存力である場合，運動エネルギーと位置エネルギーの和である力学的エネルギーが保存することを運動方程式から直接導いた．
- 前回は簡単のため議論を 1 次元運動に限定したが，今回は 2 次元・3 次元の場合について扱う．
- その中で新しい数学の道具として「線積分」や「偏微分」を導入する．

3.1. 2 次元・3 次元系における仕事

♣ 2 次元・3 次元系における仕事 [教科書 p52-53]

- 3 次元空間中の物体の運動に関する仕事とエネルギーの関係について議論する．
- 図 **1** のように質量 m の物体に一定の力 $\mathbf{F}$(ベクトル量) を与え，$\Delta\mathbf{r}$(ベクトル量) 変位させる．
  → $\Delta\mathbf{r}$ に対して垂直方向に働く力は仕事に寄与しない．
  → 力 $\mathbf{F}$ が行った仕事 W は，

$$\boxed{W = F\Delta r\cos\theta.} \tag{1}$$

ここで，$F = |\mathbf{F}|$，$\Delta r = |\Delta\mathbf{r}|$，$\theta$ はベクトル $\mathbf{F}$ と $\Delta\mathbf{r}$ のなす角度．

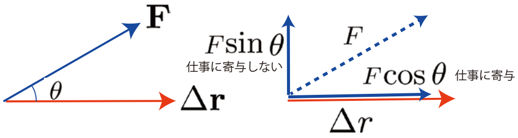

図 **1**: 力の方向と変位の方向が異なる場合の仕事の考え方．力を変位に対して平行，垂直成分に分解した際，平行成分のみが仕事に寄与する．

3.1. 2 次元・3 次元系における仕事 (2)

- 力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ を，変位ベクトル $\Delta\mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ とする．
- 式 (1) は，ベクトルの内積を用いれば，

$$\boxed{W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z}. \tag{2}$$

3.2. 仕事の計算

♣ 仕事の計算 [教科書 p53]

- ここでは時間区間 $[t_1, t_2]$ において，物体の位置 $\mathbf{r}$ にのみ依存する力 $F(\mathbf{r})$ が物体に掛かっていると仮定．
- 経路 C(図 **2**: 始点 $\mathbf{r}(t_1)$，終点 $\mathbf{r}(t_2)$ とする経路) に沿って力が行う仕事を考える．

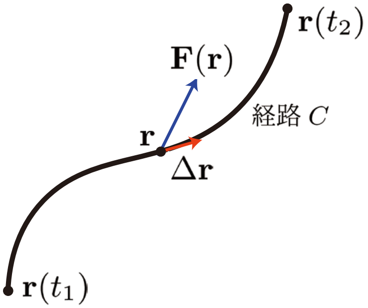

図 **2**: 積分経路 C に沿って力 $\mathbf{F}$ が微小変位 $\Delta\mathbf{r}$ 仕事する様子．

3.2. 仕事の計算 (2)

- 物体が運動する経路 C を，N ($\gg 1$) 個の微小区間 $[\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}_i]$ ($i = 1, 2, ..., N$) に分割.
- 各区間が十分微小であれば，区間内における力は一定とみなすことができる.
- 各区間における仕事は $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{r}_i$.
- 全区間で行った仕事の総和は，近似的に

$$\boxed{W \sim \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{r}_i} \tag{3}$$

- さらに，微小区間に対して $\Delta\mathbf{r}_i \to \mathbf{0}$ の極限を取ると,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{r}_i \to \int_{\mathrm{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{4}$$

- 積分記号に付した記号 C は，上で説明した経路が積分区間であることを表す.
- この様に，線状に経路を取る積分を線積分 (仕事積分) という.

3.2. 仕事の計算 (3)

- これを用いれば，上記の仕事の総和 W は，数列和より精度が上がり

$$\boxed{W = \int_{\mathrm{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}} \tag{5}$$

  と表される．（ギザギザがなめらかになるイメージ）

以下，線積分を用いた仕事の具体的な計算例を示す．

3.2. 仕事の計算 (4)

例題 1：重力場 [教科書 p57-58]

力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が，重力加速度 g を用いて，

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (0, 0, -mg)$$

と与えられるとする．原点 O$(0,0,0)$ から点 P(a,b,c) まで適当な経路 C に沿って重力が行った仕事をそれぞれ求めよ．

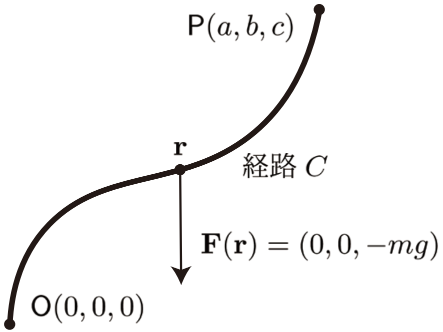

図 3: 例題 1 における設定図.

3.2. 仕事の計算 (5)

（例題 1 解答）

- 経路 C において，$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (0, 0, -mg)$，位置ベクトルは $\mathbf{r} = (x, y, z)$，$\mathrm{d}\mathbf{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ より，内積 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -mg\mathrm{d}z$ となる．よって仕事 W は，

$$W = \int_{\mathrm{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^c (-mg)\mathrm{d}z = -mgc \tag{6}$$

- 具体的に経路を指定せずとも，結局は始点と終点の座標 (高さ z の変化のみ) で仕事が決まることがわかる．（以下で議論する，保存力の例）

3.2. 仕事の計算 (6)

例題 2：より一般的な力場 [講義オリジナル]

力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が，座標の関数として

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (xy, x^2, yz)$$

と与えられる場合，原点 O$(0,0,0)$ から点 P$(a,b,0)$ まで，点 A$(a,0,0)$ を通る経路 C_1，点 B$(0,b,0)$ を通る経路 C_2 のそれぞれに沿って力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が行った仕事を求めよ．

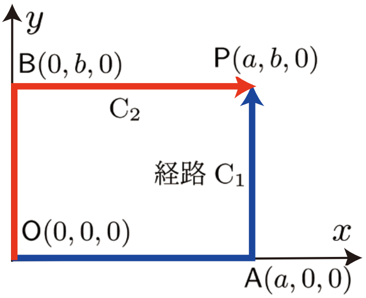

図 4: 例 2 における設定図.

3.2. 仕事の計算 (7)

（例題 2 解答）

経路 C_1 に沿って行った仕事 W_1

- **線分 OA 上:** $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (0, x^2, 0)$, $\mathrm{d}\mathbf{r} = (\mathrm{d}x, 0, 0)$ より，内積 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$.
- **線分 AP 上:** $\mathbf{r} = (a, y, 0)$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (ay, a^2, 0)$, $\mathrm{d}\mathbf{r} = (0, \mathrm{d}y, 0)$ より，内積 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = a^2\mathrm{d}y$.
- よって仕事 W_1 は,

$$W_1 = \int_{\mathrm{C}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathrm{OA}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\mathrm{AP}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 + \int_0^b a^2 \mathrm{d}y = a^2 b \tag{7}$$

経路 C_2 に沿って行った仕事 W_2

- **線分 OB 上:** $\mathbf{r} = (0, y, 0)$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (0, 0, 0)$, $\mathrm{d}\mathbf{r} = (0, \mathrm{d}y, 0)$ より，内積 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$.
- **線分 BP 上:** $\mathbf{r} = (x, b, 0)$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (bx, x^2, 0)$, $\mathrm{d}\mathbf{r} = (\mathrm{d}x, 0, 0)$ より，内積 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = bx\mathrm{d}x$.

3.2. 仕事の計算 (8)

- 仕事 W_2 は,

$$W_2 = \int_{\mathrm{C}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathrm{OB}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\mathrm{BP}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 + \int_0^a bx\mathrm{d}x = \frac{a^2 b}{2} \tag{8}$$

力が位置の関数であっても，始点と終点を固定した各経路で仕事が異なるケースが存在する．

例題 1・2 の要点

- 例題 1 の様に，経路に依存せず始点と終点だけで仕事が決まるような力を「保存力」という．
- 前回扱ったように，力が保存力であれば，位置エネルギーが定義でき，力学的エネルギーが保存する．
- 1 次元運動においては，力が位置のみに依存すれば「保存力」であった．
- 例題 2 の様に，2 次元・3 次元系においては，力が位置のみに依存していても保存力にならない場合があることに注意．

3.2. 仕事の計算 (9)

- 次に，この様な事情を考慮し，2 次元・3 次元系において，力が保存力であるとき，力学的エネルギー保存則を導出する．

3.3. 力学的エネルギー保存則の導出（2 次元・3 次元）

♣ 力学的エネルギー保存則の導出（2 次元・3 次元）[教科書 p51 〜 p60]

- 前回扱った内容を拡張し，2 次元・3 次元系において，Newton 第 2 法則から**エネルギーの概念**を導入.
- 時刻 t において位置 $\mathbf{r}(t)$ にある物体が，3 次元空間中を運動し，物体には**位置のみに依存した力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が働くとする**.
- つまり物体の運動方程式は，

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})} \tag{9}$$

- 物体が**時間区間 $[t_1, t_2]$ において，力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が経路 C に沿って行った仕事**を考える.
- 運動方程式から $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ を $m\ddot{\mathbf{r}}$ と表し，先ほど導入した定積分による表記を用いれば，仕事 W は，

$$\boxed{W = \int_{\mathrm{C}} m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}} \tag{10}$$

3.3. 力学的エネルギー保存則の導出（2 次元・3 次元） (2)

- $\mathrm{d}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}\mathrm{d}t$ であることから，式 (10) の右辺を変形して，

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbf{v}(t_1)}^{\mathbf{v}(t_2)} m\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\dot{\mathbf{r}} \\ &= \int_{v_x(t_1)}^{v_x(t_2)} mv_x \mathrm{d}v_x + \int_{v_y(t_1)}^{v_y(t_2)} mv_y \mathrm{d}v_y + \int_{v_z(t_1)}^{v_z(t_2)} mv_z \mathrm{d}v_z \\ &= \frac{m(v_x(t_2)^2 + v_y(t_2)^2 + v_z(t_2)^2)}{2} - \frac{m(v_x(t_1)^2 + v_y(t_1)^2 + v_z(t_1)^2)}{2} \\ &= \frac{mv(t_2)^2}{2} - \frac{mv(t_1)^2}{2} \end{aligned} \tag{11}$$

ここで $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$， $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_y^2}$ である．

3.3. 力学的エネルギー保存則の導出（2 次元・3 次元） (3)

- ここで

$$\boxed{K(v) = \frac{mv^2}{2}} \tag{12}$$

を速さ v をもつ質量 m の物体に関する運動エネルギーとする．

- 力の行った仕事は，$K(v)$ を用いて，

$$\boxed{W = K(v(t_2)) - K(v(t_1))} \tag{13}$$

となり，2 時刻における運動エネルギーの差で表されることが分かる．

- この議論は 1 次元運動の時の同様である．

3.3. 力学的エネルギー保存則の導出（2 次元・3 次元） (4)

♣ 以下，$\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が保存力であるときを考える．

♣ 仕事積分は，経路に一切依存しないので，積分区間は始点と終点を指定すれば十分．

- 位置エネルギー $U(\mathbf{r})$ を定積分

$$\boxed{U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} F(\mathbf{r}') \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}'} \tag{14}$$

として定義（経路は問わない）．

- この積分の下限（基準点）$\mathbf{r}_0$ は適当に定める．
- 式 (5) で定義した仕事も，もはや経路に依存しないため，始点と終点の座標を積分の端点とすることにより，

$$\boxed{W = \int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}} \tag{15}$$

3.3. 力学的エネルギー保存則の導出（2 次元・3 次元） (5)

- 適当に決めた基準点 $\mathbf{r}_0$ を間に挟んで積分を分割すると

$$\boxed{W = \left\{ \int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}_0} F(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}(t_2)} F(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \right\} = U(\mathbf{r}(t_1)) - U(\mathbf{r}(t_2))} \tag{16}$$

- さて，これまで仕事 W を，位置エネルギーと運動エネルギーの双方（式 (13)，(16)）で表したが，これらの関係は，

$$U(\mathbf{r}(t_1)) - U(\mathbf{r}(t_2)) = K(v(t_2)) - K(v(t_1)) \tag{17}$$

- 同時刻のエネルギー同士をまとめれば，

$$\boxed{U(\mathbf{r}(t_1)) + K(v(t_1)) = U(\mathbf{r}(t_2)) + K(v(t_2))} \tag{18}$$

- これより力学的エネルギー $E(t) = U(\mathbf{r}(t)) + K(v(t))$ が任意の時刻 t で保存することが示された．

3.4. 保存力と位置エネルギー

♣ 保存力と位置エネルギー [教科書 p59,p60, p168(2) 参照]

- 1 次元運動においては，保存力は位置エネルギーを位置微分することにより求めることができた．
- 3 次元の場合は，位置エネルギーの偏微分により力が求まる（偏微分の詳細は，本資料 § 補遺も参照せよ）．
- 偏微分とは，関数が複数の変数を持つ場合，**1 つの変数以外を定数とみなして行う微分**のことで $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ などと表される．
- 記号 ∂ は，「ラウンド」や「デル」などと読む．具体的に，保存力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は，位置エネルギー $U(\mathbf{r})$ を偏微分することで，

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x}, \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y}, \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z}\right)} \tag{19}$$

- この様な演算は，ベクトル微分演算子ナブラ：$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ を用いることで，

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r})} \tag{20}$$

3.4. 保存力と位置エネルギー (2)

- ナブラの定性的な意味は関数の勾配を求めることに対応し，$\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r})$ をスカラー関数 $U(\mathbf{r})$ の勾配とよぶ．
- 勾配は，grad という記号を用いて

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}\ U(\mathbf{r})} \tag{21}$$

  と書かれることも多いが，$\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r})$ のどちらを用いても構わない．
- 多変数関数は基本的に立体面を表し，その勾配は，立体面において最も傾きが急である方向を表すベクトルになる．
- **斜面上を転がる物体がもっとも傾きが急な方向に加速することからも，力と勾配の関係が理解できる．**

次に，位置エネルギーの勾配により力が算出されることを証明する．

- 位置 $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}$ における位置エネルギーの差 $\Delta U = U(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - U(\mathbf{r})$ を考える．

3.4. 保存力と位置エネルギー (3)

- $\Delta\mathbf{r}$ の大きさが微小であるとき，$\Delta\mathbf{r} \to \mathrm{d}\mathbf{r}$，$\Delta U \to \mathrm{d}U$ とすれば，以下の近似

$$\boxed{\mathrm{d}U = U(\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}' \sim -\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}} \tag{22}$$

が成立.

- 便宜上 $U(\mathbf{r}) \to U(x,y,z)$ とすると，式 (22) は，足し合わせて 0 になる量：$-U(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z) + U(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z)$ や掛け合わせて 1 になる量：$\mathrm{d}z/\mathrm{d}z$ などを適宜挿入することにより，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}U &= U(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z) - U(x,y,z) \\
&= \frac{U(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z) - U(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z \\
&+ \frac{U(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z) - U(x+\mathrm{d}x, y, z)}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y \\
&+ \frac{U(x+\mathrm{d}x, y, z) - U(x,y,z)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{23}$$

となる.

3.4. 保存力と位置エネルギー (4)

- 式 (23) において，他の変数は固定し 1 変数のみで微分を実行する偏微分を各項において独立に施すことができるので

$$\boxed{\mathrm{d}U = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z}\mathrm{d}z} \tag{24}$$

- 式 (24) を関数 U の 全微分 という．
- 式 (22) と (24) を比較すると，$\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$ であることに注意して

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} \end{aligned} \tag{25}$$

- これより式 (19) が示された．

第 7 回講義資料目次

4. 補遺：偏微分

♣ 偏微分の計算 [教科書 p59-60, 168-169]

位置ベクトル $\mathbf{r}$ の関数 $f(\mathbf{r})$ を考える．$f(\mathbf{r})$ は x, y, z の 3 変数関数であるので，

$$f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) \tag{26}$$

と書くことにする．この関数 f の偏微分，または偏導関数は，$\frac{\partial}{\partial x}$ の様に表し次の様に定義する．

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{f(x + \mathrm{d}x, y, z) - f(x, y, z)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{27}$$

これは，y, z を一定に保って，f を x だけの関数とみなしたときのこれまでの微分と等しい．同様にして y，z の偏微分は，

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} = \frac{f(x, y + \mathrm{d}y, z) - f(x, y, z)}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{28}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} = \frac{f(x, y, z + \mathrm{d}z) - f(x, y, z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{29}$$

4. 補遺：偏微分 (2)

ここで例として 3 変数関数 $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ を偏微分してみよう．計算の結果

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x}{r^3} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-y}{r^3} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-z}{r^3}\end{aligned} \tag{30}$$

が得られる．この計算は，天体における万有引力や電気的なクーロン力の計算で出てくるものである．（f は位置エネルギー，その偏微分は力と共通している．）

また，位置エネルギーを用いて同じ議論をしたが，f の全微分は

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{31}$$

4. 補遺：偏微分 (3)

と表される．よって微分演算子ナブラ：$\boldsymbol{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ を用いれば,

$$\mathrm{d}f = \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{32}$$

となる．上の計算は内積であることに注意しよう．

第 7 回講義資料目次

5. 第 7 回講義のまとめ

2・3 次元系における仕事とエネルギーの関係について考察した.

- 物体に掛かる力が位置に依存していても，仕事が積分経路に依存する場合がある.
- 物体に掛かる力が「保存力」の場合，仕事は積分経路に依らない.
- 物体に掛かる力が「保存力」の場合，位置エネルギーが定義でき，力学的エネルギーが保存する.

次回予告： 仕事とエネルギー（２・３次元）後半：保存力の判定方法など