物理学基礎 I（医・医）第６回
仕事とエネルギー（１次元）

川崎猛史

名古屋大学理学部物理学科

Last update：May 20, 2021

第 6 回講義資料目次

第 6 回講義資料目次

1. 講義のスケジュール

講義資料は各講義予定日前日にアップロードする.

1. 4/16：第 1 回
2. 4/23：第 2 回 (第 1・2 回課題公開)
3. 4/30：第 3 回 (第 1・2 回課題提出期限)
4. 5/07：第 4 回 (第 3・4 回課題公開)
5. 5/14：第 5 回 (第 3・4 回課題提出期限)
6. **5/21：第 6 回 (第 5・6 回課題公開)**
7. 5/28：第 7 回 (**第 5・6 回課題提出期限**)
8. 6/04：第 8 回 (第 7・8 回課題公開)
9. 6/11：名大祭のため休講
10. 6/18：第 9 回 (**第 7・8 回課題提出期限**)
11. 6/25：第 10 回　(第 9・10 回課題公開)
12. 7/02：第 11 回 (**第 9・10 回課題提出期限**)
13. 7/09：第 12 回
14. 7/16：第 13 回 (第 11・12・13 回課題公開)
15. 7/17：補講（質問対応等）
16. 7/23：オリンピックのため休講　(**第 11・12・13 回課題提出期限**)
17. 8/6（予定）：　期末試験

第 6 回講義資料目次

2. 今回の内容

本講義内容（期末試験範囲予定）[教科書 p31-p103(但し p93 以降はごく基本的な内容に限る)]

- 導入：物理学とは.
- 質点の運動学：質点の位置，速度，加速度の関係，ならびに，これらの微分（積分）による表現方法を学ぶ。特に，自由落下，斜方投射，等速円運動などを具体的に扱う。
- 運動の原因となる「力」を導入する.
- 「運動の３法則」（慣性の法則，運動方程式，作用・反作用の法則）を導入し，様々な運動を運動方程式を用いて普遍的に表現する.
- 質点の運動方程式の解法：運動方程式を様々なタイプの微分方程式に落とし込み，これらを具体的に解く。特に，減衰運動，単振動，減衰振動，強制振動などを扱う。
- エネルギーとその保存則：仕事とエネルギーの関係を考察し，それらの具体的な問題を扱う.
- 中心力運動：重力ポテンシャル系を例に，中心力による質点の軌道を考察する.
- 相対運動と慣性力：座標変換と相対運動を扱い，慣性力を導入する.
- 多質点系の並進運動：重心運動と相対運動に分けて考える.
- 多質点系の回転運動：慣性モーメントの導入.
- 剛体の動力学：慣性モーメントを用いて回転する剛体運動の簡単な例を扱う.

第 6 回講義資料目次

3. 仕事とエネルギー

仕事とエネルギー [教科書 p51 〜 p60]

- 物体が Newton の運動法則に従って運動する場合，時間を経ても変化しない量：保存量が存在.
- 今回は，保存量の一つであるエネルギーの概念を導入.
- 力と変位の積によって定義される「仕事」を出発点とし，物理学において最も重要な概念の 1 つである運動エネルギーと位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）を導入.
- 運動エネルギーと位置エネルギーの和（力学的エネルギー）が，特定の条件下において保存することが，運動方程式から直接導かれることを示す.
- 今回は簡単のため，議論を 1 次元運動に限定.

3.1. 仕事とは

仕事とは [教科書 p51]

- 質量 m の物体に一定の力 F を与え，力と平行な直線上を Δx 変位.
- 当該区間において力が質点に行った「仕事」を以下の様に定義.

「仕事」の定義

- 仕事 $(\Delta W) \equiv$ 物体に働く力 (F) $\times$物体の変位 (Δx).
- 仕事の単位： J(ジュール) $=$ Nm $=$ kg $\mathrm{m^2/s^2}$.

3.2. 仕事の具体的な計算

仕事の具体的な計算 [教科書 p51]

- 時間区間 $[t_1, t_2]$ において，物体の位置 $x(t)$ のみに依存する力 $F(x(t))$ が，物体の変位と常に平行方向に働く，1 次元運動における仕事を考える．
- つまり，速度 v に比例するような抵抗力は働いていない状況を考える．
- 物体が運動する位置区間 $[x(t_1), x(t_2)]$ を，N $(\gg 1)$ 個の微小区間 $[x_i, x_i + \Delta x]$ $(i = 1, 2, ..., N)$ に分割．
- ここで，$x_{i+1} = x_i + \Delta x$.
- 各区間が十分微小であれば，区間内における力は一定とみなすことが可能．
- 各区間における仕事は $F(x_i)\Delta x$.
- 全区間で行った仕事の総和は，

$$\boxed{W = \sum_{i=1}^{N} F(x_i)\Delta x}. \tag{1}$$

3.2. 仕事の具体的な計算 (2)

- $\Delta x \to 0$ の極限を取ると,

$$\sum_{i=1}^{N} F(x_i)\Delta x \to \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} F(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

- 上記の仕事の総和 W は,

$$\boxed{W = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} F(x)\mathrm{d}x} \tag{3}$$

- 仕事を計算する際，この様な積分表記が有用.
- 以下，時間区間 $[t_1, t_2]$ で，力 $F(x)$ が行った仕事を２通りの方法で考える.

3.3. Newton 第 2 法則から運動エネルギーを導入

Newton 第 2 法則から運動エネルギーを導入 [教科書 p55 – 56]

- 時間区間 $[t_1, t_2]$ で，力 $F(x)$ が行った仕事を求める（1 つ目の方法）.
- 物体の運動方程式は，$m\ddot{x} = F(x)$ であるから力を $m\ddot{x}$ と表せば，仕事は

$$\boxed{W = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} m\ddot{x}\mathrm{d}x} \tag{4}$$

3.3. Newton 第 2 法則から運動エネルギーを導入 (2)

- $\mathrm{d}x = \dot{x}\mathrm{d}t$ であることから，式 (4) の右辺を変形して，$\ddot{x}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\dot{x}$ や $v = \dot{x}$ に注意して

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}(\dot{x}\mathrm{d}t) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} m\dot{x}(\ddot{x}\mathrm{d}t) \\
&= \int_{v(t_1)}^{v(t_2)} m\dot{x}\mathrm{d}\dot{x} \\
&= \frac{mv(t_2)^2}{2} - \frac{mv(t_1)^2}{2}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

を得る．

3.3. Newton 第 2 法則から運動エネルギーを導入 (3)

- ここで,

$$\boxed{K(v) = \frac{mv^2}{2}} \tag{6}$$

を，速度 v をもつ質量 m の物体に関する運動エネルギーと定義する.

- 式 (5),(6) より，力の行った仕事は，$K(v)$ を用いて,

$$\boxed{W = K(v(t_2)) - K(v(t_1))} \tag{7}$$

- 仕事 W は，2 時刻における運動エネルギーの差で表されることが分かる.

3.4. 位置エネルギーの導入とエネルギー保存則の導出

位置エネルギーの導入とエネルギー保存則の導出 [教科書 p55 – 56]

- 仕事を２つ目の方法で求める．
- ここでは運動方程式の右辺から同様に仕事を計算する．
- 式 (3) で定義した仕事を，$F(x)$ を用いて計算すると

$$\boxed{W = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} F(x')\mathrm{d}x'} \tag{8}$$

である．

- いま，適当に決めた基準点 x_0 を間に挟んで積分を分割すると

$$\boxed{W = \int_{x(t_1)}^{x_0} F(x')\mathrm{d}x' + \int_{x_0}^{x(t_2)} F(x')\mathrm{d}x'} \tag{9}$$

である．

3.4. 位置エネルギーの導入とエネルギー保存則の導出 (2)

- 新たに**位置エネルギー $U(x)$ を**，力の位置に関する定積分として以下のように定義する．

$$\boxed{U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x'} \tag{10}$$

ただし基準点 x_0 は，式 (9) で選んだ x_0 と同じものを選ぶ．

- すると，仕事は

$$\begin{aligned} W &= \int_{x(t_1)}^{x_0} F(x')\mathrm{d}x' + \int_{x_0}^{x(t_2)} F(x')\mathrm{d}x' \\ &= -\int_{x_0}^{x(t_1)} F(x')\mathrm{d}x' - \left(-\int_{x_0}^{x(t_2)} F(x')\mathrm{d}x'\right) \\ &= U(x(t_1)) - U(x(t_2)) \end{aligned} \tag{11}$$

3.4. 位置エネルギーの導入とエネルギー保存則の導出 (3)

- このように，仕事 W を，位置エネルギーと運動エネルギーの 2 通りの方法：式 (7) と (11) で表した.
- これらは等しいので，

$$U(x(t_1)) - U(x(t_2)) = K(v(t_2)) - K(v(t_1)). \tag{12}$$

- 同時刻のエネルギー同士をまとめれば，

$$\boxed{U(x(t_1)) + K(v(t_1)) = U(x(t_2)) + K(v(t_2))} \tag{13}$$

- ここで，運動エネルギーと位置エネルギーの和である力学的エネルギー $E(t) = U(x) + K(v)$ を導入.
- 任意の時刻 t_1，t_2 で $E(t_1) = E(t_2)$ が成立.
- $E(t)$ は時間に依らず一定である（保存する）.
- このことを，**力学的エネルギー保存則**と呼ぶ.

3.4. 位置エネルギーの導入とエネルギー保存則の導出 (4)

- 一次元系の場合，力が位置のみに依存すれば力学的エネルギー保存則が成立する．この様に力学的エネルギーが保存する力を 保存力 という．
- $\boxed{U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x'}$ であったので，逆に $F(x)$ は位置エネルギーを位置 x に関する微分

$$\boxed{F(x) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}} \tag{14}$$

　である．
- U が与えられて，その位置微分から力を求めることがよくある．（例：分子間力，万有引力）
- U は保存力に関する潜在的な情報を有しているので ポテンシャルエネルギー ともいう．

3.4. 位置エネルギーの導入とエネルギー保存則の導出 (5)

- 例：万有引力ポテンシャル **[教科書 p65 参照]**

質量 M の物体の位置を原点とし，x 離れた質量 m の物体の万有引力ポテンシャルは

$$U(x) = -G\frac{mM}{x} \tag{15}$$

と表される．この時，質量 m の物体にかかる力を求めよ．

$U(x)$ を x に関して微分すれば，

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = -G\frac{mM}{x^2} \tag{16}$$

と x 軸と逆方向に働く力（万有引力）が求まる．

3.4. 位置エネルギーの導入とエネルギー保存則の導出 (6)

力学的エネルギー保存則のまとめ

- 質点に働く力が，質点の一次元の位置 x のみに依存する場合（力が x に対して一定である場合も含む），その様な力を**保存力**という．
- 質点に働く力が保存力の場合，**力学的エネルギーは時間に対して保存する**．

3.5. 具体的な系における力学的エネルギー保存則

具体的な系における力学的エネルギー保存則 [教科書 p57]

- 例 1:　重力場中の 1 次元運動

質量 m の物体が，初期条件 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=v_0$ を初期条件にとる，1 次元鉛直投げ上げ運動を考える．この時，適当に x 軸を取れば，物体の運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -mg \tag{17}$$

となる．いま，任意の時間区間 $[0,t_1]$ における仕事とエネルギーとの関係を考察する．

- 重力は物体の速度には依存せず，あらゆる位置で一定であるため**保存力**.
- 力学的エネルギーが保存するはず.
- 以下これを検証する.

3.5. 具体的な系における力学的エネルギー保存則 (2)

- 実際に，任意の位置 x における位置エネルギー $U(x)$ を，基準点を $x=0$ とし，

$$\boxed{U(x) = -\int_0^x (-mg)\mathrm{d}x = mgx} \tag{18}$$

と定義する．

- 位置エネルギーの基準点はどこでもよくて，$U(x)$ が最も簡単になるように選ぶことが多い．
- さて，任意の時間区間 $[0, t_1]$ において重力が行った仕事 W と位置エネルギーとの関係は，

$$\begin{aligned} W &= \int_{x(0)=0}^{x(t_1)} (-mg)\mathrm{d}x \\ &= \int_{x(0)}^{0} (-mg)\mathrm{d}x + \int_0^{x(t_1)} (-mg)\mathrm{d}x \\ &= U(x(0)) - U(x(t_1)) \\ &= 0 - mgx(t_1) \end{aligned} \tag{19}$$

3.5. 具体的な系における力学的エネルギー保存則 (3)

- 重力が行った仕事と各時刻の運動エネルギーとの関係は，初期条件 $\dot{x}(0) = v_0$ を用いれば,

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} m\ddot{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{t_1} m\ddot{x}\dot{x}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{t_1} m\dot{x}\ddot{x}\mathrm{d}t \\
&= \int_{v(0)}^{v(t_1)} m\dot{x}\mathrm{d}\dot{x} \\
&= \frac{mv(t_1)^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \\
&= K(v(t_1)) - K(v(0)) \qquad (20)
\end{aligned}
$$

3.5. 具体的な系における力学的エネルギー保存則 (4)

- 式 (19)，(20) を比較すれば，力学的エネルギー保存則

$$\boxed{\frac{mv(t_1)^2}{2} + mgx(t_1) = \frac{mv_0^2}{2} + 0 = \text{Const.}} \tag{21}$$

を得る．

- これを用いることで，例えば，$t = t_1$ において，投げ上げにおける頂点に至る場合，$v(t_1) = 0$ となるので，頂点座標 $x(t_1)$ は，

$$\boxed{x(t_1) = \frac{v_0^2}{2g}} \tag{22}$$

を得る．

3.5. 具体的な系における力学的エネルギー保存則 (5)

- 例 2:　弾性力の位置エネルギー：弾性エネルギー

一端を固定した，ばね定数 $k(>0)$ のばねに，質点とみなせる質量 $m(>0)$ の小球をつけ，滑らかな水平面上を 1 次元運動させる．この時，適当に x 軸を取れば，物体の運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -kx \tag{23}$$

となる．いま，初期条件を $x(0) = x_0$，$\dot{x}(0) = 0$ とする時，任意の時間区間 $[0, t_1]$ における仕事とエネルギーとの関係を考察する．

- 弾性力 $-kx$ は，位置 x のみに依存することから保存力である．その為，力学的エネルギーが保存するはずである．
- 基準点を $x = 0$(ばねが自然長) とする位置エネルギーを

$$\boxed{U(x) = -\int_0^x (-kx)\mathrm{d}x = \frac{kx^2}{2}} \tag{24}$$

と定義.

3.5. 具体的な系における力学的エネルギー保存則 (6)

- 時間区間 $[0, t_1]$ において，ばねが行った仕事と位置エネルギーの関係は,

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{x(0)=x_0}^{x(t_1)} (-kx)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x(0)}^{0} (-kx)\mathrm{d}x + \int_{0}^{x(t_1)} (-kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{kx_0^2}{2} - \frac{kx(t_1)^2}{2} = U(x(0)) - U(x(t_1))
\end{aligned}
\tag{25}
$$

3.5. 具体的な系における力学的エネルギー保存則 (7)

- 初期条件 $\dot{x}(0) = v(0) = 0$ を用いれば，弾性力が行った仕事と，各時刻の運動エネルギーとの関係は，

$$\begin{aligned} W &= \int_{x(0)}^{x(t_1)} m\ddot{x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{t_1} m\ddot{x}\dot{x}\mathrm{d}t \\ &= \frac{mv(t_1)^2}{2} - 0 \\ &= K(v(t_1)) - K(v(0)) \end{aligned} \tag{26}$$

- 式 (26)，(27) を比較すれば，力学的エネルギー保存則

$$\boxed{\frac{mv(t_1)^2}{2} + \frac{kx(t_1)^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2} = \mathrm{Const.}} \tag{27}$$

が求まる．

3.5. 具体的な系における力学的エネルギー保存則 (8)

- 力学的エネルギー保存則が成立することは，単振動の解からも直接確認できる．
- 本例における，初期条件を考慮した特殊解は，位置

$$x(t) = x_0 \cos(\sqrt{k/m}\ t) \tag{28}$$

ならびに速度

$$\dot{x}(t) = v(t) = -x_0\sqrt{k/m}\sin(\sqrt{k/m}\ t) \tag{29}$$

となることを以前扱った．
- 力学的エネルギー $E(t) = \frac{kx(t)^2}{2} + \frac{mv(t)^2}{2}$ に，解 (28)，(29) を代入すると，

$$\boxed{E(t) = \frac{kx_0^2}{2}\cos^2(\sqrt{k/m}\ t) + \frac{kx_0^2}{2}\sin^2(\sqrt{k/m}\ t) = \frac{kx_0^2}{2} = \text{Const.}} \tag{30}$$

- これは先の式 (27) と同等の結果であり，力学的エネルギー $E(t)$ が時間に依存せず一定であることがわかる．

3.5. 具体的な系における力学的エネルギー保存則 (9)

- 次に，単振動の解軌道 $(x(t), \dot{x}(t))$ を時刻 t を広く変化させたものを図示する．
- この様な図を，位相図という．
- $\frac{kx_0^2}{2} = E_0$ とおくと，$(x(t), \dot{x}(t))$ は

$$\frac{kx(t)^2}{2} + \frac{mv(t)^2}{2} = E_0 \tag{31}$$

  の関係を満たす．
- これを整理すると

$$\left(\frac{x(t)}{\sqrt{2E_0/k}}\right)^2 + \left(\frac{v(t)}{\sqrt{2E_0/m}}\right)^2 = 1 \tag{32}$$

  となる．
- $x(t)$，$\dot{x}(t)$ を適当にスケールした解軌道 $(x(t)/\sqrt{\frac{2E_0}{k}}, \dot{x}(t)/\sqrt{\frac{2E_0}{m}})$ は半径 1 の円．
- コンピュータを用いて図示した結果が図 **1**.
- この様な閉じた円上に解軌道が乗ることは，力学的エネルギーが保存していることを意味する．

3.5. 具体的な系における力学的エネルギー保存則 (10)

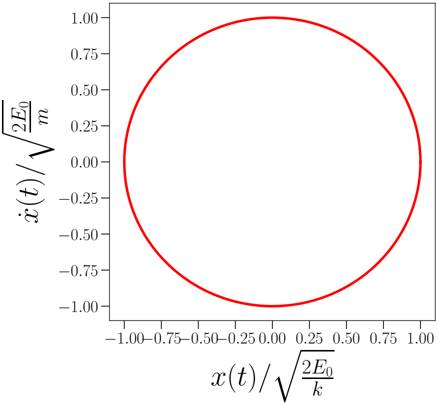

図 1: t を幅広く変化させた際の単振動の解軌道 $\left(x(t)/\sqrt{\frac{2E_0}{k}},\ \dot{x}(t)/\sqrt{\frac{2E_0}{m}}\right)$．半径 1 の円になっている．

3.6. 力学的エネルギーが保存しない運動の具体例

力学的エネルギーが保存しない運動の具体例：抵抗力のかかる運動 [講義オリジナル]

次に扱う非保存力を含む系の解軌道は，単振動の時と比べて振る舞いが異なることを紹介する．

■ 例：減衰振動

一端を固定した，ばね定数 $k(>0)$ のばねに，質点とみなせる質量 $m(>0)$ の小球をつけ，滑らかな水平面上を 1 次元運動させる．ここでは，粘性抵抗力 $-\xi\dot{x}$ が掛かるとする．この時，適当に x 軸を取れば，物体の運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -\xi\dot{x} - kx \tag{33}$$

となる．いま，初期条件を $x(0) = x_0$，$\dot{x}(0) = 0$ とし，減衰振動するパラメータに対して，時間区間 $[0, 10\pi\sqrt{m/k}]$ における仕事とエネルギーとの関係を考察する．

3.6. 力学的エネルギーが保存しない運動の具体例 (2)

- この問題では，非保存力である粘性抵抗力が働いているため力学的エネルギーが保存しない様子を考察.
- 今回与えられた初期条件を満たす運動方程式の特殊解は

$$x(t) = \frac{x_0\omega e^{-\gamma t}}{\sqrt{\omega^2-\gamma^2}}\sin\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t+\phi\right) \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{x_0\omega e^{-\gamma t}}{\sqrt{\omega^2-\gamma^2}}\{-\gamma\sin\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t+\phi\right) \\ &+ \sqrt{\omega^2-\gamma^2}\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t+\phi\right)\}\end{aligned} \tag{35}$$

  となることを以前示した.
- ここで，$\omega=\sqrt{k/m}$，$\gamma=\xi/2m$，$\phi=\tan^{-1}(\sqrt{(\omega/\gamma)^2-1})$.
- 初期時刻における力学的エネルギーは $E_0=\frac{kx_0^2}{2}$.
- 単振動の時と同じように，解軌道 $(x(t)/\sqrt{\frac{2E_0}{k}}, \dot{x}(t)/\sqrt{\frac{2E_0}{m}})$ をコンピュータを用いて計算した結果を図 **2** に示した.
- 解軌道は渦巻状の軌道をとり，時間の経過に伴い原点へ収束する.

3.6. 力学的エネルギーが保存しない運動の具体例 (3)

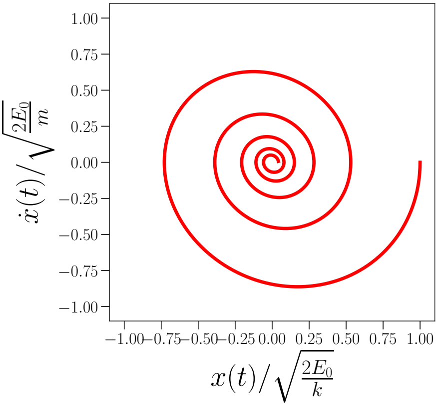

図 2: $\omega/\gamma = 10$ における，時間区間 $[0, 10\pi\sqrt{m/k}]$ における減衰振動の解軌道 $(x(t)/\sqrt{\frac{2E_0}{k}},\ \dot{x}(t)/\sqrt{\frac{2E_0}{m}})$．渦状軌道をとり，時間の経過に伴い原点へ収束していく．

3.6. 力学的エネルギーが保存しない運動の具体例 (4)

- 原点と軌道の各点との距離は力学的エネルギーの大きさと比例するため，原点へ収束していく軌道曲線の振る舞いは力学的エネルギーの減少を示唆．
- 従って，一般的に，抵抗力などの非保存力が働く系は，力学的エネルギー保存則は成立せず．

第 6 回講義資料目次

4.1. 第6回講義のまとめ

1次元運動をする系におけるエネルギー保存則を導入した．

- 物体に掛かる力がその位置にのみ依存する「保存力」の場合，力学的エネルギーが保存する．
- 重力や単振動における弾性力は保存力であり，力学的エネルギーが保存する．
- 非保存力である抵抗力がかかると，力学的エネルギーは保存しない．

次回予告： 仕事とエネルギー（２・３次元）

4.2. 第 5・6 回レポート課題について

- 当科目 NUCT 内「課題」欄に、「第 5・6 回レポート課題」を用意しました．その中に，問題兼解答用紙をアップしましたので，各自印刷し，所定欄に解答の上，電子化した解答のスキャンを同ページ所定欄に添付してください．
- 解答用紙の印刷が諸事情により難しい場合は，通常のレポート用紙に解答してもよいこととします．
- 採点結果は，NUCT を通して各人へお知らせします．
- 添付ファイルは 1 つにまとめていることが望ましいです。
- ファイル名は 第 5・6 回レポート課題 (氏名).pdf と命名してください．
- スキャン方法の詳細は NUCT のフォーラムを参照ください。