物理学基礎 I（医・医）　第５回
強制振動と共振現象

川﨑猛史

名古屋大学理学部物理学科

Last update：May 13, 2021

第５回講義資料目次

第５回講義資料目次

1. 講義のスケジュール

講義資料は各講義予定日前日にアップロードする.

1. 4/16：第 1 回
2. 4/23：第 2 回 (第 1・2 回課題公開)
3. 4/30：第 3 回 (第 1・2 回課題提出期限)
4. 5/07：第 4 回 (第 3・4 回課題公開)
5. **5/14：第 5 回 (第 3・4 回課題提出期限)**
6. 5/21：第 6 回 (第 5・6 回課題公開)
7. 5/28：第 7 回 (第 **5**・**6** 回課題提出期限)
8. 6/04：第 8 回 (第 7・8 回課題公開)
9. 6/11：名大祭のため休講
10. 6/18：第 9 回 (第 **7**・**8** 回課題提出期限)
11. 6/25：第 10 回　(第 9・10 回課題公開)
12. 7/02：第 11 回 (第 **9**・**10** 回課題提出期限)
13. 7/09：第 12 回
14. 7/16：第 13 回 (第 11・12・13 回課題公開)
15. 7/17：補講（質問対応等）
16. 7/23：オリンピックのため休講　(第 **11**・**12**・**13** 回課題提出期限)
17. 8/6（予定）：　期末試験

第５回講義資料目次

2. 運動と微分方程式：強制振動と共振現象

今回の導入：

- 今回は，$F_0 \sin \omega_0 t$ などと表される周期的な外力を与えた物体の運動を考えよう．この様な物体の運動を強制振動という．
- 強制振動における外力の周波数 ω_0 を変化させた際の物体の運動を観測すれば，系の様々なパラメータ値（弾性力や粘性抵抗力）を計測することができ，物性計測手法にも応用されている．
- 外力の周波数 ω_0 が，系の固有振動数（物体の硬さなどから特徴付けられる特徴的振動数）と近くなると，振動強度が顕著に増幅される共振 **(共鳴)** を起こす．
- 共鳴の例
  - ブランコ：ブランコの固有振動数と等しい周期的タイミングで蹴り上げると振幅が増大する.
  - 管楽器：圧力波（空気の疎密波）の振動数と楽器の固有振動数が一致したときに共鳴が起こり大きな音がでる（ヘルムホルツ共鳴器）.
  - 地震の際ある特定の建物だけが強く揺れる現象：建物の固有振動数と地震の揺れの振動数が近いときに起こる.
  - 電子レンジ：マイクロ波により，水分子の回転運動を共鳴で増強させる.（水の回転運動の固有振動数とマイクロ波の振動数が近いため.）
  - 分光：試料に光を当てると特定の振動数の光のみ吸収される．系の分子振動等の固有振動数に近い光は，共振を起こし，系のエネルギーとして吸収される.
  - **MRI**（核磁気共鳴画像法）：水素原子に高周波の磁場を与えることにより，水素原子に共鳴を起こさせ，それが発する電磁波を電気信号に変換し，画像を取得するという手法である.

2.1. 粘性抵抗を無視した振動子の強制振動

(5) 粘性抵抗を無視した振動子の強制振動 (参照：教科書 p167(iii) の特別な場合)

ここでは，強制振動や共鳴の性質を理解すべく，その最も簡単なモデルを考える．いま，ばね定数 $k(>0)$ のばねに繋がれた質量を $m(>0)$ の質点（調和振動子）とみなせる小球に，$F_0 \sin \omega_0 t$ の周期的な外力を与え，滑らかな水平面上を 1 次元運動させる．ここでは簡単のために，小球に働く粘性抵抗は無視する．

いま，図 **1** のように，座標系を設定すると，運動方程式は x 方向のみ考えればよく，

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)} \tag{1}$$

となる．

2.1. 粘性抵抗を無視した振動子の強制振動 (2)

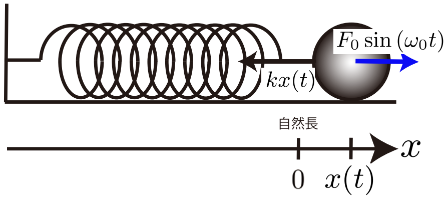

図 **1**: 強制振動させた質点に関する座標系．

ここでは，簡単のために，$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$，$f_0 = F_0/m$ とおくと，運動方程式は

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f_0 \sin \omega_0 t} \tag{2}$$

となり，これは線形非同次 2 階微分方程式である．なお，ω と ω_0 は，敢えて区別していることに注意せよ．ω は外力に関係なく，物体の運動を特徴付ける物体固有の振動数であるので，固有振動数と呼ばれる．

2.1. 粘性抵抗を無視した振動子の強制振動 (3)

さて，この様な非同次の微分方程式は，特殊解 $x_c(t)$ を一つでも見つけることができれば，これを用いて同次の微分方程式に変形することができる．実際，微分方程式 (2) に $x_c(t)$ を代入すると，

$$\ddot{x}_c(t) + \omega^2 x_c(t) = f_0 \sin \omega_0 t \tag{3}$$

を得る．これを微分方程式 (2) から両辺差し引けば引けば，

$$\boxed{\{\ddot{x}(t) - \ddot{x}_c(t)\} + \omega^2 \{x(t) - x_c(t)\} = 0} \tag{4}$$

を得る．これは $x(t) - x_c(t)$ を変数とする線形同次 2 階微分方程式となる．この微分方程式の一般解は，実数の範囲に限定すれば，2 つの未定係数 C_1，C_2 を用いて

$$\boxed{x(t) - x_c(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t} \tag{5}$$

となる [第 3 回講義資料参照]．ここで，式 (5) の様に与式 (2) の定数項を 0 と置いた同次微分方程式の一般解を 余関数 という．これより，与式 (2) の解は，

$$\boxed{x(t) = x_c(t) + C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t} \tag{6}$$

となる．この解は，未定係数を 2 つ含むので式 (2) の一般解である．この様に，線形非同次微分方程式の一般解は， 特殊解と余関数の和 で表される．

2.1. 粘性抵抗を無視した振動子の強制振動 (4)

では実際に，1つ特殊解 $x_c(t)$ を求めてみよう．これは何でも良いが，$\omega \neq \omega_0$ の時，外力の三角関数の形から類推し $x_c(t) = A\sin\omega_0 t$ と置く．これを式 (2) に代入してみると，

$$-A\omega_0^2 \sin\omega_0 t + \omega^2 A\sin\omega_0 t = f_0 \sin\omega_0 t \tag{7}$$

となるので，両辺の $\sin\omega_0 t$ の係数を比較すれば

$$A = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \tag{8}$$

を得る．つまり，

$$x_c(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin\omega_0 t \tag{9}$$

は微分方程式 (2) の特殊解の一つである．従って，これを用いることで，$\omega \neq \omega_0$ である時の $x(t)$ の一般解は，

$$\boxed{x(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin\omega_0 t + C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t} \tag{10}$$

と表されることが分かる．

2.1. 粘性抵抗を無視した振動子の強制振動 (5)

次に，初期条件 $x(0) = 0$，$\dot{x}(0) = 0$ を満たす特殊解を求めよう．まず，一般解の時間微分は

$$\boxed{\dot{x}(t) = \frac{f_0\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos\omega_0 t + C_1\omega\cos\omega t - C_2\omega\sin\omega t} \tag{11}$$

である．したがって，式 (10)，(11) に $t = 0$ を代入すれば，

$$x(0) = C_2 = 0 \tag{12}$$

$$\dot{x}(0) = \frac{f_0\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} + C_1\omega = 0 \tag{13}$$

であることから $C_1 = -\frac{f_0\omega_0}{\omega(\omega^2-\omega_0^2)}$，$C_2 = 0$ を得る．これより，初期条件を満たす特殊解は，

$$\boxed{x(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\left(\sin\omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega}\sin\omega t\right)} \tag{14}$$

と求まる．

2.1. 粘性抵抗を無視した振動子の強制振動 (6)

次に，初期条件を満たす特殊解：式 (14) の定性的振る舞いを，コンピュータで描画した図 **2** を用いて考察する．この関数は，周波数 ω_0 と ω の周期関数の重ね合わせとなっている．特に，ω_0 と ω が有意に離れている場合，図 **2**（左）の様に振る舞う．一方，ω_0 が ω に近くなると振る舞いが変化する．ここでは図 **2**（右）の様に，$\omega_0/\omega = 1.05$ の時，うなり（短周期振動の振幅が長周期で変化する振る舞い）が観測されている．実際この時，式 (14) は，およそ

$$\begin{aligned} x(t) &\sim \frac{f_0}{\omega^2-\omega_0^2}(\sin\omega_0 t - \sin\omega t) \\ &= \frac{2f_0}{\omega^2-\omega_0^2}\cos\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right) \end{aligned} \tag{15}$$

と三角関数の和積公式を用いることで 2 つの周期の異なる単振動の掛け算として表すことができる．ここで，速い振動の周期 T_1 は，$\cos\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)$ の周期であるので $\omega T_1 = 2\pi\omega/\{(\omega_0+\omega)/2\} \sim 6.1$ となる．また $|\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)|$ は，うなりの振幅と解釈できるので，振幅の周期 T_2 は $\omega T_2 = \pi\omega/\{(\omega_0-\omega)/2\} = 40\pi \sim 125$ となる．実際図 **2** では，時間 T_2 ごとに，うなりの振幅が最大となる．

2.1. 粘性抵抗を無視した振動子の強制振動 (7)

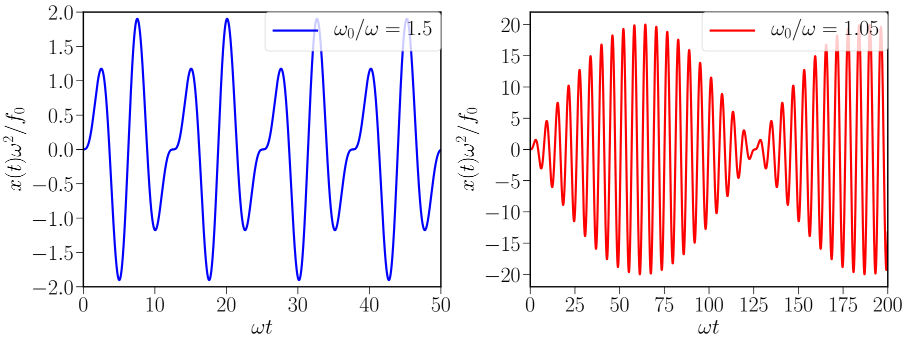

図 2: 強制振動の特殊解：式 (14) の時間依存性．(左) $\omega_0/\omega = 1.5$ の時．(右) $\omega_0/\omega = 1.05$ の時．ω と ω_0 が近い時は，うなりの様子が見て取れる．ここでの短周期振動の周期 T_1 は $\omega T_1 = 4\pi\omega/(\omega_0+\omega) \sim 6.1$，長周期振動の周期 T_2 は，$\omega T_2 = 2\pi\omega/(\omega_0-\omega) = 40\pi \sim 125$ となる．

2.2. 粘性抵抗を無視した振動子の共鳴

粘性抵抗を無視した振動子の共鳴: 次に，強制振動の特殊解：式 (14) において，$\omega_0 \to \omega$ の極限を考える．先ほどの議論では，ω_0 と ω が近づくと長周期のうなりが生じた．このうなりの周期は，$\omega_0 \to \omega$ の極限で無限大となり，うなりの振幅はどこまでも大きくなる．この様な振る舞いを共鳴（共振）という．ここでは共鳴時における，質点の位置 $x(t)$ の時間変化を求める．

いま，$\omega_0 = \omega + \Delta\omega$ とする ($\Delta\omega \ll 1$：物凄く小さいという意味)．これを式 (14) に代入すると，

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{f_0}{\omega^2 - (\omega + \Delta\omega)^2}\left(\sin(\omega t + \Delta\omega t) - \frac{\omega + \Delta\omega}{\omega}\sin(\omega t)\right) \\ &= \frac{f_0}{-2\omega\Delta\omega - (\Delta\omega)^2}\left(\sin(\omega t)\cos(\Delta\omega t) + \sin(\Delta\omega t)\cos(\omega t) - (1 + \frac{\Delta\omega}{\omega})\sin(\omega t)\right) \end{aligned} \tag{16}$$

となる．ここで以下の項に関しては

$$\sin(\Delta\omega t) \sim \Delta\omega t$$

$$\cos(\Delta\omega t) \sim 1$$

の様にマクローリン展開の最低次の項まで考慮する (高次の項は次の極限計算で落ちる)．$\Delta\omega \to 0$ の極限をとると式 (16) は，

$$\boxed{x(t) = \frac{f_0}{2\omega^2}\{\sin(\omega t) - \omega t\cos(\omega t)\}} \tag{17}$$

2.2. 粘性抵抗を無視した振動子の共鳴 (2)

となる．これをコンピュータを用いて図示したものが，図 **3** である．振動振幅が，時々刻々と増大してゆく共鳴の様子が見て取れる．

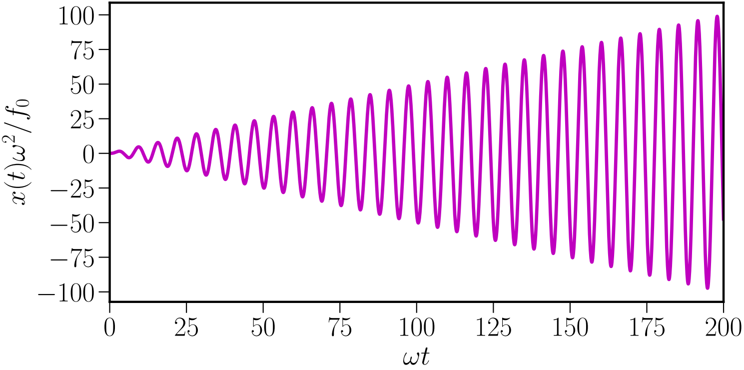

図 **3**: $\omega_0/\omega = 1$:共鳴時における特殊解 (14) の振る舞い．

2.3. 粘性抵抗を考慮した振動子の強制振動と共鳴

粘性抵抗を考慮した振動子の強制振動と共鳴 (参照：教科書 p167(iii)):

最後に，粘性抵抗力を考慮した振動子に周期的な外力 $F_0 \sin(\omega_0 t)$ が働く場合を考える．この時の運動方程式は，

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + \xi\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)} \tag{18}$$

であり，第 4 回講義と同様に，$\xi = 2m\gamma$ とおけば

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f_0 \sin(\omega_0 t)} \tag{19}$$

となる．ここでは式 (19) を解こう．まずは特殊解 $x_c(t)$ を見つけたいのだが，代入してみればわかるが単純な $A\sin(\omega_0 t)$ などではなさそうである．そこで以下のように，変数 $x(t)$ を以下の複素数 $z(t) = y(t) + ix(t)$ の虚部の関数であるとする．さらに，式 (19) に対して，新たに

$$\boxed{\ddot{y}(t) + 2\gamma\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = f_0 \cos(\omega_0 t)} \tag{20}$$

というダミー変数に関する微分方程式を新たに導入する．式 (19) に虚数単位 i をかけて式 (20) を足し合わせると

$$\boxed{\ddot{z}(t) + 2\gamma\dot{z}(t) + \omega^2 z(t) = f_0 e^{i\omega_0 t}} \tag{21}$$

2.3. 粘性抵抗を考慮した振動子の強制振動と共鳴 (2)

となる．この微分方程式は外力が指数関数であり，特殊解は $z_c(t) = Ae^{i\omega_0 t}$ とおくことができ，これを式 (21) に代入すると

$$-\omega_0^2 Ae^{i\omega_0 t} + 2\gamma i\omega_0 Ae^{i\omega_0 t} + \omega^2 Ae^{i\omega_0 t} = f_0 e^{i\omega_0 t} \tag{22}$$

となるので，整理すると

$$A(\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\gamma\omega_0) = f_0 \tag{23}$$

したがって，

$$A = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\gamma\omega_0} \tag{24}$$

を得る．このことから，特殊解は

$$\begin{aligned} z_c(t) &= \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\gamma} e^{i\omega_0 t} \\ &= \frac{f_0(\omega^2 - \omega_0^2 - 2i\gamma\omega_0)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} (\cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t) \end{aligned} \tag{25}$$

2.3. 粘性抵抗を考慮した振動子の強制振動と共鳴 (3)

となる．ここで，$z_c(t) = y_c(t) + ix_c(t)$ とかけるので，式 (19) の特殊解 $x_c(t)$ は，式 (25) の虚部をとればよく，

$$
\begin{aligned}
x_c(t) &= \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)\sin\omega_0 t - 2\gamma\omega_0\cos\omega_0 t}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} f_0 \\
&= R(\omega_0)\sin(\omega_0 t + \phi) \qquad (26)
\end{aligned}
$$

ここで，振幅は三角関数の合成から

$$\boxed{R(\omega_0) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}}} \qquad (27)$$

となり位相 ϕ は $\tan\phi = -\frac{2\gamma\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$ を満たす．ここで，式 (19) の一般解を $x(t)$ とすると，余関数 $x(t) - x_c(t)$ は第 4 回講義で扱った減衰運動を示す．一方，時刻 t が十分大きな極限を考えると，余関数の寄与は減衰により無視できるようになる．したがってこの時の一般解は，初期条件に依存せず

$$\boxed{x(t) \sim x_c(t) \quad (t \to \infty)} \qquad (28)$$

という定常状態に収束することがわかる．最後に振動振幅 $R(\omega_0)$ の外力の振動数 ω_0 依存性を議論する．ここでパラメータ ω/γ を変化させたときの様子について図示したものが 図 **4** と図 **5** である．

2.3. 粘性抵抗を考慮した振動子の強制振動と共鳴 (4)

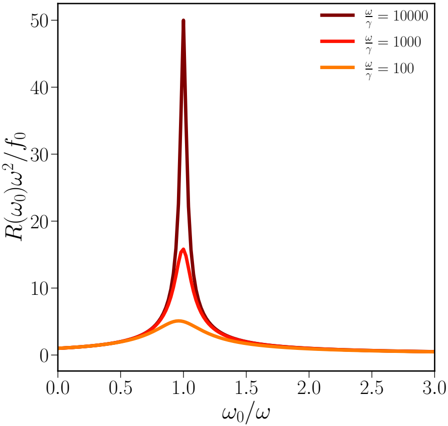

図 4: 振動振幅 $R(\omega_0)$ の外力の振動数 ω_0 依存性. 不足減衰条件の様子を図示したもの．ω/γ が大きいとき $\omega_0 \sim \omega$ で $R(\omega_0)$ はピークを示す．ただし厳密には，ピーク位置は $\omega_0^* = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2} = \omega\sqrt{1-2(\gamma/\omega)^2}$. ω/γ の減少にともないピークが低振動数側にシフトし，その高さは低くなる．

2.3. 粘性抵抗を考慮した振動子の強制振動と共鳴 (5)

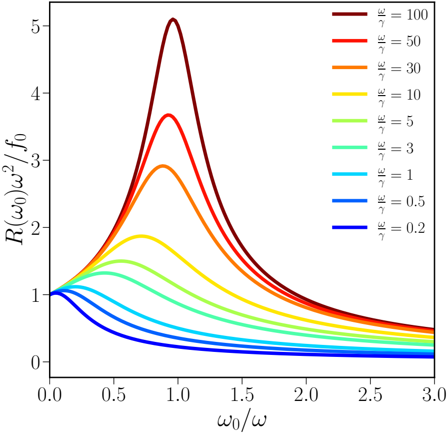

図 5: 振動振幅 $R(\omega_0)$ の外力の振動数 ω_0 依存性. 不足減衰条件から過減衰条件まで幅広く図示したもの.

2.3. 粘性抵抗を考慮した振動子の強制振動と共鳴 (6)

以下図 **4**，**5** からわかることを纏める．

粘性抵抗を考慮した振動子の強制振動と共鳴の纏め

- ω/γ が大きいとき　$\omega_0^* \sim \omega$ で $R(\omega_0)$ はピークを示す．ただし厳密には，ピーク位置は $\omega_0^* = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2} = \omega\sqrt{1 - 2(\gamma/\omega)^2}$.
- 振動強度が発散せずにピークを示すことも共鳴という．振幅が発散しない点，抵抗を無視した理想的な設定とは異なる．
- ω/γ の減少にともないピークが低振動数側にシフトし，その高さは低くなる．

第５回講義資料目次

3. まとめ

周期外力が働く振動子の運動は，強制振動型の線形同次 2 階微分方程式

$$\ddot{x}(t) + 2m\gamma\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f_0 \sin(\omega t)$$

の様に表される．

- 強制振動型の線形非同次微分方程式の解き方：
  1. 与えられた微分方程式の特殊解を一つ求める．
  2. $x(t)$ の定数項を $= 0$ とおいた方程式の解：余関数を求める．
  3. 余関数と特殊解の和が，与えられた微分方程式の一般解．
- $\gamma = 0$ の場合，$\omega_0 \to \omega$ の極限で共鳴（共振）が起こり，振動強度が発散する．
- $\gamma \neq 0$ の場合，$\omega_0 \sim \omega$ の辺りで振動強度が大きくなるが発散はしない.

- 今回扱ったモデルは，マクロ（**eg** 地震）からミクロスケール（**eg** 分光， **NMR**）に至る，幅広いスケールの共振現象を普遍的に説明する．
- これで微分方程式シリーズは終了．質問があれば，どんどんお寄せください．

次回予告： 仕事とエネルギー（**1** 次元）