物理学基礎 I（医・医）　第４回
減衰振動・過減衰運動・臨界減衰運動

川﨑猛史

名古屋大学理学部物理学科

Last update：May 7, 2021

第 4 回講義資料目次

第 4 回講義資料目次

1. 講義のスケジュール

講義資料は各講義予定日前日にアップロードする．

1. 4/16：第 1 回
2. 4/23：第 2 回 (第 1・2 回課題公開)
3. 4/30：第 3 回 (第 1・2 回課題提出期限)
4. **5/07：第 4 回 (第 3・4 回課題公開)**
5. 5/14：第 5 回 (**第 3・4 回課題提出期限**)
6. 5/21：第 6 回 (第 5・6 回課題公開)
7. 5/28：第 7 回 (**第 5・6 回課題提出期限**)
8. 6/04：第 8 回 (第 7・8 回課題公開)
9. 6/11：名大祭のため休講
10. 6/18：第 9 回 (**第 7・8 回課題提出期限**)
11. 6/25：第 10 回　(第 9・10 回課題公開)
12. 7/02：第 11 回 (**第 9・10 回課題提出期限**)
13. 7/09：第 12 回
14. 7/16：第 13 回 (第 11・12・13 回課題公開)
15. 7/17：補講（質問対応等）
16. 7/23：オリンピックのため休講　(**第 11・12・13 回課題提出期限**)
17. 8/6（予定）：　期末試験

第 4 回講義資料目次

2.1. 抵抗力と弾性力が働く物体の運動

(4) 抵抗力と弾性力が働く物体の運動 (参照：教科書 p50 〜 51 例題 4，p166(ii)))

今回は，弾性力と粘性抵抗力の両者が働く質点の運動を扱う．ここでは，一端を固定したばね（ばね定数 $k(>0)$）に質点とみなせる質量 $m(>0)$ の小球をつけ，滑らかな水平面上を 1 次元運動させる．小球にはさらに，速度と反対方向を向く粘性抵抗力（粘性抵抗係数 $\xi(>0)$）が働く．なお，この問題は教科書 p50 の例題 4 と同等であるが，本講では，広くパラメータ $(m,\ \xi,\ k)$ を変化させ，これらの大小関係により，質点運動が大きく変化する様子を考察する． いま，図 **1** のように，座標系を設定すると，運動方程式は x 方向のみ考えればよく，

$$\boxed{m\ddot{x}(t) = -\xi\dot{x}(t) - kx(t)} \tag{1}$$

となる．

2.1. 抵抗力と弾性力が働く物体の運動 (2)

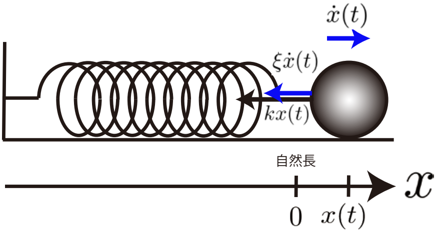

図 1: 弾性力と粘性抵抗力の両者が働く質点に関する座標系．

ここでは，簡単のため (後々のため) に，$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$，$\gamma = \frac{\xi}{2m}$ とおくと，運動方程式は

$$\boxed{\ddot{x}(t) = -2\gamma\dot{x}(t) - \omega^2 x(t)} \tag{2}$$

となる．これは前回の単振動と同様に，線形同次 2 階微分方程式である．これを特性方程式を用いて解こう．

いま，解を $x(t) = Ae^{\lambda t}$ とおく．ここで A と λ は定数である．すると，

$$\lambda^2 Ae^{\lambda t} = -2\lambda\gamma Ae^{\lambda t} - \omega^2 Ae^{\lambda t} \tag{3}$$

2.1. 抵抗力と弾性力が働く物体の運動 (3)

となり整理すると，特性方程式

$$\boxed{\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0} \tag{4}$$

が得られる．この特性方程式を満たす λ を用いることで，$Ae^{\lambda t}$ は式 (2) の解となる．$\gamma \neq \omega$ であるとき，この特性方程式の解は 2 つ見つかり，$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ となる．従って，この微分方程式の一般解は，未定係数 A_1 と A_2 を用いることで，

$$\boxed{x(t) = A_1 e^{-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}t} + A_2 e^{-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}t}} \tag{5}$$

となる．次に，この解の定性的振る舞いが γ と ω の大小関係により大きく変化することを示す．

2.2. 不足減衰条件 (減衰振動)

$\omega > \gamma$ の時（不足減衰条件）

この条件は，硬いばねを用いた場合，または，粘性抵抗の小さい場合に対応し，特性方程式の解は **2 つの複素数解**をもつ．この様に特性方程式の解が複素数になると，$x(t)$ に減衰と振動が混合した振る舞いが見られるようになる．実際，$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$ とおけば，式 (2) の一般解は，

$$\boxed{x(t) = A_1 e^{-\gamma t + i\omega_1 t} + A_2 e^{-\gamma t - i\omega_1 t} = e^{-\gamma t}(A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t})} \tag{6}$$

となり，さらに時間微分することで

$$\boxed{\dot{x}(t) = (-\gamma + i\omega_1)A_1 e^{-\gamma t + i\omega_1 t} + (-\gamma - i\omega_1)A_2 e^{-\gamma t - i\omega_1}} \tag{7}$$

が得られる．教科書の例題 4 では冒頭において解を $A(t)e^{-\gamma t}$ と置いているが，確かに今回得られた解も，その様な形をとっている．ただし教科書の説明だとそうおける根拠がよくわからない．

今，初期条件 $x(0) = x_0$，$\dot{x}(0) = 0$ を満たす特殊解を求めてみよう．特殊解に $t = 0$ を代入すれば，

$$x(0) = A_1 + A_2 = x_0 \tag{8}$$

$$\dot{x}(0) = (-\gamma + i\omega_1)A_1 + (-\gamma - i\omega_1)A_2 = 0 \tag{9}$$

2.2. 不足減衰条件 (減衰振動) (2)

となる．これらを連立して解くと，

$$A_1 = \frac{\gamma + i\omega_1}{2i\omega_1} x_0 \tag{10}$$

$$A_2 = \frac{-\gamma + i\omega_1}{2i\omega_1} x_0 \tag{11}$$

を得る．従って，初期条件を満たす特殊解は，

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}\left(\frac{\gamma + i\omega_1}{2i\omega_1} x_0 e^{i\omega_1 t} + \frac{-\gamma + i\omega_1}{2i\omega_1} x_0 e^{-i\omega_1 t}\right) \\ &= e^{-\gamma t}\frac{x_0}{\omega_1}\left\{\frac{\gamma}{2i}(e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t}) + \frac{\omega_1}{2}(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t})\right\} \\ &= e^{-\gamma t}\frac{x_0}{\omega_1}\{\gamma \sin(\omega_1 t) + \omega_1 \cos(\omega_1 t)\} \\ &= e^{-\gamma t}\frac{x_0}{\omega_1}\sqrt{\gamma^2 + \omega_1^2}\sin(\omega_1 t + \phi) \end{aligned} \tag{12}$$

となる．ここで，$\tan\phi = \frac{\omega_1}{\gamma}$ である．さらに，$x(t)$ を ω を用いて表せば，

$$\boxed{x(t) = \frac{x_0\omega}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t + \phi\right)} \tag{13}$$

2.2. 不足減衰条件 (減衰振動) (3)

となる．ここでの振る舞いは，周期 $\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-\gamma^2}}}$ で振動しながら振幅が徐々に小さくなっていく 減衰振動 を表す．またこの様な運動条件を， 不足減衰 **(under damping)** という．なお，不足減衰時における，式 (2) の一般解は，

$$\boxed{x(t) = Re^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t+\phi\right)} \tag{14}$$

という形をとる．ここで，R と ϕ が未定係数であり，初期条件により決まる．

最後に，今回得た特殊解：式 (13) をコンピュータを用いて図示してみる．図 **2** は，横軸を ωt，縦軸を $x(t)/x_0$ とし，パラメータ ω/γ を変化させた際の振る舞いを表す．いずれも減衰振動の様子が見て取れるが，ω/γ が大きい時ほど，強い振動が見てとれる（ばねが硬いときに相当）．逆に，ω/γ が 1 に近づくと，殆ど減衰しか見えなくなる（粘性抵抗が大きい時に相当）．

2.2. 不足減衰条件 (減衰振動) (4)

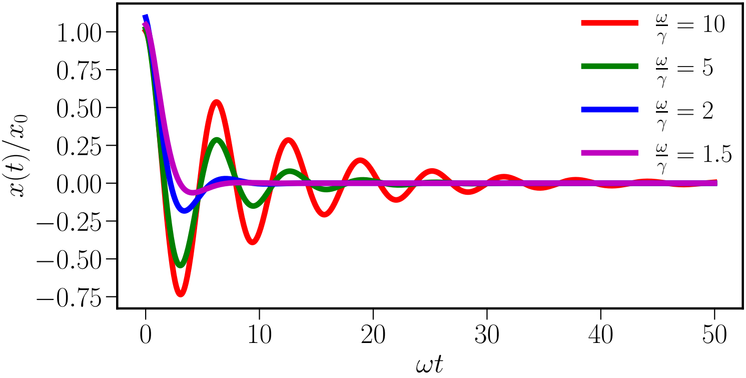

図 2: 式 (13) をパラメータを変化させ図示したものであり，減衰振動の様子が見て取れる．式 **(13)** は，$x(t)/x_0 = \frac{1}{\sqrt{1-(\gamma/\omega)^2}} e^{-(\gamma/\omega)\omega t} \sin\left(\sqrt{1-(\gamma/\omega)^2}\omega t + \phi\right)$，$\tan\phi = \sqrt{(\omega/\gamma)^2 - 1}$ と表されるので，グラフの軸の横軸を ωt（無次元数），縦軸を $x(t)/x_0$（無次元数）とすれば，曲線は ω/γ をパラメータとして一意に定まる．パラメータ ω/γ が 1 に近づくほど，振動が弱くなる．($\omega/\gamma = 1$ を臨界減衰条件といい，後で扱う．)

2.3. 過減衰条件

$\omega < \gamma$ の時（過減衰条件）

この条件は，柔らかいばねを用いた場合，または，粘性抵抗が大きい場合に対応し，特性方程式が **2つの実数解**をもつ．この時，式 (2) の一般解は，$\gamma_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ とすれば，

$$\boxed{x(t) = A_1 e^{-(\gamma-\gamma_1)t} + A_2 e^{-(\gamma+\gamma_1)t}} \tag{15}$$

となる．したがって，一般解に対応する速度は，

$$\boxed{\dot{x}(t) = (-\gamma+\gamma_1)A_1 e^{-(\gamma-\gamma_1)t} - (\gamma+\gamma_1)A_2 e^{-(\gamma+\gamma_1)t}} \tag{16}$$

となる．いま，不足減衰の時と同様に，初期条件 $x(0) = x_0$，$\dot{x}(0) = 0$ を満たす特殊解を求めよう．すると，未定係数 A_1，A_2 に関する関係式

$$x(0) = A_1 + A_2 = x_0 \tag{17}$$

$$\dot{x}(0) = (-\gamma+\gamma_1)A_1 - (\gamma+\gamma_1)A_2 = 0 \tag{18}$$

を得る．これらを連立させて，A_1，A_2 に関して解けば，

$$A_1 = \frac{\gamma+\gamma_1}{2\gamma_1} x_0 \tag{19}$$

2.3. 過減衰条件 (2)

$$A_2 = \frac{-\gamma + \gamma_1}{2\gamma_1} x_0 \tag{20}$$

となるので，初期条件を満たす特殊解は，

$$\boxed{x(t) = \frac{\gamma + \gamma_1}{2\gamma_1} x_0 e^{-(\gamma-\gamma_1)t} + \frac{-\gamma + \gamma_1}{2\gamma_1} x_0 e^{-(\gamma+\gamma_1)t}} \tag{21}$$

となる．ここでは，指数の項が 2 項現れるが，$\gamma - \gamma_1 > 0$，$\gamma + \gamma_1 > 0$ であることから，長時間極限（十分長い時間が経った際）においては，いずれも単調に 0 へ収束する．この様な運動条件を **過減衰（over damping）** という．なお，$x(t)$ の第 1 項は第 2 項に比べ，初期強度が大きいため支配的であり，前者を主緩和，後者を副緩和という．主緩和の時定数は，$\frac{1}{\gamma-\gamma_1}$，副緩和の時定数は，$\frac{1}{\gamma+\gamma_1}$ であり，前者の方が大きくなる．

最後に，特殊解：式 (21) をコンピュータを用いて図示してみる（図 **3**）．総じて単調減衰を表し，パラメータ ω/γ が 1 より小さくなるほど，緩和が遅くなることが見て取れる．

2.3. 過減衰条件 (3)

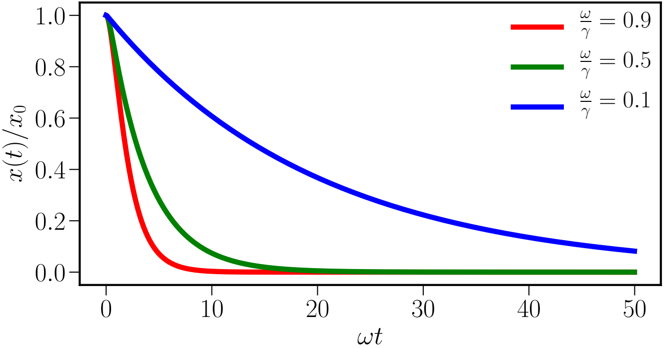

図 **3**: パラメータを変化させた式 (21) の曲線を図示したもの．減衰の様子が見て取れる．パラメータ ω/γ が 1 より小さくなるほど，緩和が遅くなる．$\omega/\gamma \to 0$ 極限ではほとんど減衰しなくなり停止しているように振舞う．

2.4. 臨界減衰条件

$\omega = \gamma$ の時 (臨界減衰条件)

最後に，パラメータ空間上において残された 1 点，ω と γ が釣り合う時を考える．この時，特性方程式が重解をもつようになる．すると，解

$$\lambda = -\gamma \tag{22}$$

1 つしか得られず，これまでの方法では一般解を作ることができない（$Ae^{\lambda t}$ の一次結合を作ることができず，未定係数を 1 つしか置くことができない）．従来の方法では $x(t) = Ae^{-\gamma t}$ とおいたが，ここでは定数としていた A を $A(t)$ という変数に拡張させ，

$$x(t) = A(t)e^{-\gamma t} \tag{23}$$

とおく．実際，$A(t)$ が定数であれば特殊解にはなるので方程式の解となる要件は満たしている．ここでは $A(t)$ が定数以外にも値を取りうるかを考える．（このような方法を 定数変化法 という.）

いま，このようにおいた $x(t)$ の時間微分が

$$\dot{x}(t) = \dot{A}(t)e^{-\gamma t} - \gamma A(t)e^{-\gamma t} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \ddot{A}(t)e^{-\gamma t} - \gamma\dot{A}(t)e^{-\gamma t} - \gamma\dot{A}(t)e^{-\gamma t} + \gamma^2 A(t)e^{-\gamma t} \\ &= \ddot{A}(t)e^{-\gamma t} - 2\gamma\dot{A}(t)e^{-\gamma t} + \gamma^2 A(t)e^{-\gamma t} \end{aligned} \tag{25}$$

2.4. 臨界減衰条件 (2)

であることから，$A(t)e^{-\gamma t}$ を微分方程式（式 (2)）に代入すると，

$$\begin{aligned}\ddot{A}(t)e^{-\gamma t} &- 2\gamma\dot{A}(t)e^{-\gamma t} + \gamma^2 A(t)e^{-\gamma t} \\ &+ 2\gamma(\dot{A}(t)e^{-\gamma t} - \gamma A(t)e^{-\gamma t}) + \omega^2 A(t)e^{-\gamma t} = 0\end{aligned} \tag{26}$$

これを $\gamma = \omega$ に注意して整理すると，

$$\boxed{\ddot{A}(t) = 0} \tag{27}$$

を得る．つまりこの様な $A(t)$ を用いれば $A(t)e^{-\gamma t}$ は微分方程式の解となる．この時，変数 $A(t)$ は加速度 0 の等速直線運動を表す．従って，これを時間で 2 回積分すると，

$$A(t) = A_1 + A_2 t \tag{28}$$

が得られる．ここで A_1，A_2 は未定係数である．従って，

$$\boxed{x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\gamma t}} \tag{29}$$

となり，未定係数を 2 つ含む $x(t)$ が得られ，これは 2 階微分方程式の一般解である．この様な運動の条件を **臨界減衰 (Critical damping)** という．この解は，振動の様相を見せるが，周期は無限大で定義できない．

2.4. 臨界減衰条件 (3)

次に，初期条件 $x(0) = x_0$，$\dot{x}(0) = 0$ を満たす特殊解を求めよう．いま，一般解 $x(t)$ を時間微分すると，速度は，

$$\dot{x}(t) = \{(A_2 - \gamma A_1) - \gamma A_2 t\}e^{-\gamma t} \tag{30}$$

となる．すると，

$$x(0) = A_1 = x_0 \tag{31}$$

$$\dot{x}(0) = A_2 - \gamma A_1 = 0 \tag{32}$$

となることから，未定係数は $A_1 = x_0$，$A_2 = \gamma x_0$ と定まる．従って，これらを用いて，初期条件を満たす特殊解，

$$\boxed{x(t) = x_0(1 + \gamma t)e^{-\gamma t}} \tag{33}$$

を得る．**(修正メモ：5/6 版では式 (33) の左辺が $\dot{x}(t)$ となっていたので 5/7 に修正しました。)**

最後に，特殊解：式 (33) をコンピュータを用いて図示してみる（図 **4**）．見た目は，単調減衰だが，少しでも ω/γ が大きくなると，振動が見られるようになる．

2.4. 臨界減衰条件 (4)

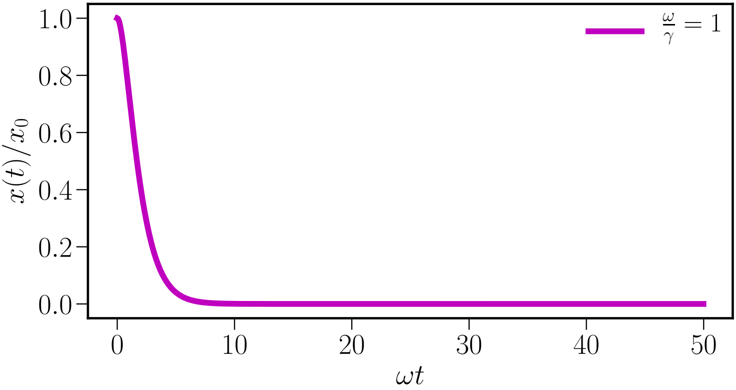

図 **4**: 式 (33):臨界減衰を図示したもの．

第 4 回講義資料目次

3. 練習問題（不足減衰と過減衰の解から臨界減衰の解を漸近的に求める）

練習問題（不足減衰と過減衰の解から臨界減衰の解を漸近的に求める）

初期条件 $x(0) = x_0$，$\dot{x}(0) = 0$ を満たす，不足減衰，過減衰で得られた特殊解 $x(t)$ ：式 (13) および式 (21) において，それぞれ，$\frac{\omega}{\gamma} \to 1$ の極限で，臨界減衰で得らえた特殊解 $x(t)$：式 (33) に漸近することを示せ．

(解答)：

- 不足減衰時の特殊解，式 (13) と恒等関係にある以下の式を出発点として評価する．

$$x(t) = e^{-\gamma t}\frac{x_0}{\omega_1}\left\{\gamma \sin(\omega_1 t) + \omega_1 \cos(\omega_1 t)\right\} \tag{34}$$

$\frac{\omega}{\gamma} \to 1$ の極限を取れば，$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ は極めて小さくなるので，以下の関数を

$$\begin{aligned} \sin(\omega_1 t) &\sim \omega_1 t \\ \cos(\omega_1 t) &\sim 1 \end{aligned}$$

の様に変数の最低時まで展開したものを用いて，これらを式 (34) に代入すれば，

$$\begin{aligned} x(t) &\sim e^{-\gamma t}\frac{x_0}{\omega_1}\left\{\gamma\omega_1 t + \omega_1\right\} \\ &= x_0 e^{-\gamma t}(1 + \gamma t) \end{aligned}$$

を得る．

3. 練習問題（不足減衰と過減衰の解から臨界減衰の解を漸近的に求める）(2)

- 次に，過減衰時の特殊解，式 (21) を考える．これは

$$x(t) = \frac{\gamma + \gamma_1}{2\gamma_1} x_0 e^{-\gamma t} e^{\gamma_1 t} + \frac{-\gamma + \gamma_1}{2\gamma_1} x_0 e^{-\gamma t} e^{-\gamma_1 t}$$

は $\gamma_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ より， $\frac{\omega}{\gamma} \to 1$ の極限では，γ_1 極めて小さくなる．の様に表されることから，以下の部分をマクローリン展開し，高次の項を無視すれば，

$$e^{\gamma_1 t} \sim 1 + \gamma_1 t$$

$$e^{-\gamma_1 t} \sim 1 - \gamma_1 t$$

と近似することができる．すると，

$$\begin{aligned} x(t) &\sim \frac{\gamma + \gamma_1}{2\gamma_1} x_0 e^{-\gamma t}(1 + \gamma_1 t) + \frac{-\gamma + \gamma_1}{2\gamma_1} x_0 e^{-\gamma t}(1 - \gamma_1 t) \\ &= x_0(1 + \gamma t)e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

となり，これも臨界減衰 (式 (33)) と一致する．

第 4 回講義資料目次

4.1. 第４回のまとめ

抵抗力と弾性力が働く物体の運動は，線形同次 2 階微分方程式

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

で記述される．そして，この解は方程式のパラメータの大小関係により以下の様に分類される．

- $\omega > \gamma$ の時，減衰振動（不足減衰）：周期 $T = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega^2 - \gamma^2}}$，減衰の時定数 $\frac{1}{\gamma}$
- $\omega < \gamma$ の時，過減衰：周期はない．減衰の時定数は，主緩和：$\frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}$，副緩和：$\frac{1}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}$．
- $\omega = \gamma$ の時，臨界減衰：周期はない．減衰の時定数は $\frac{1}{\gamma}$．

4.2. 第３・４回レポート課題について

- 当科目 NUCT 内「課題」欄に、「第３・４回レポート課題」を用意しました．その中に，問題兼解答用紙をアップしましたので，各自印刷し，所定欄に解答の上，電子化した解答のスキャンを同ページ所定欄に添付してください．なお，解答用紙の印刷が諸事情により難しい場合は，通常のレポート用紙に解答してもよいこととします．採点結果は，NUCT を通して各人へお知らせします．添付ファイルは１つにまとめていることが望ましいです。
- ファイル名は 第３・４回レポート課題 (氏名).pdf と命名してください．スキャン方法の詳細は NUCT のフォーラムを参照ください。