物理学基礎 I（医・医）第 14 回（最終回）
剛体運動

川﨑猛史

名古屋大学理学部物理学科

Last update：July 23, 2021

第 14 回講義資料目次

第 14 回講義資料目次

1. 講義・試験について

♣ スケジュール更新（7/16）

1. 4/16：第 1 回
2. 4/23：第 2 回 (第 1・2 回課題公開)
3. 4/30：第 3 回 (第 1・2 回課題提出期限)
4. 5/07：第 4 回 (第 3・4 回課題公開)
5. 5/14：第 5 回 (第 3・4 回課題提出期限)
6. 5/21：第 6 回 (第 5・6 回課題公開)
7. 5/28：第 7 回 (第 5・6 回課題提出期限)
8. 6/04：第 8 回 (第 7・8 回課題公開)
9. 6/11：名大祭のため休講
10. 6/18：第 9 回 (第 7・8 回課題提出期限)
11. 6/25：第 10 回　(第 9・10 回課題公開)
12. 7/02：第 11 回 (第 9・10 回課題提出期限)
13. 7/09：第 12 回 (第 11・12 回課題公開)
14. 7/16：第 13 回 (第 11・12 回課題提出期限)
15. **7/23：第 14 回 (第 13・14 回課題公開)**
16. 7/30：**第 13・14 回課題提出期限**
17. 8/06：オンライン期末試験　2 限

1.2. 試験について

- 期末試験を以下の日時・方法で行います．
  - 日時： 8/6（金）2 限　10：30-12：00　（試験開始 10 分前に問題をアップロードします．答案提出トラブルに備え 12：30 までは時間内提出として認めます）
  - 試験方法： 遠隔試験．当 NUCT「課題」より出題．NUCT に学期末試験をアップロードしてから制限時間内に解答を所定の用紙（ルースリーフ等でも構わない）に記入して NUCT にアップロードしてください．解答欄の拡張は許可します。時間内であれば何度でも再提出を許可します。
  - ルール： 資料・教科書等の閲覧は許可しますが、試験ですので他人との相談は禁止します。
  - 期末試験の成績比重：　当講義成績の **5** 割 **(**残り **5** 割はレポートの成績を絶対評価で加算**)**
  - 試験当日は原則全員後日指定する Zoom に入室してください。 Zoom を通してアナウンスを行います。
  - 試験当日に NUCT 小テストを用いて出欠アンケートをとります。試験を受けるひとは出席を宣言してください（受験人数を正確に把握するために行います)。

なお，当講義の合格点は期末試験とレポートの合計点の 6 割です．

第 14 回講義資料目次

2. 今回の内容

♣ **本講義内容（期末試験範囲）[教科書 p31-p103(力積を除く． p93 以降はごく基本的な内容に限る)]**

- 導入：物理学とは.
- 質点の運動学：質点の位置，速度，加速度の関係，ならびに，これらの微分（積分）による表現方法を学ぶ。特に，自由落下，斜方投射，等速円運動などを具体的に扱う。
- 運動の原因となる「力」を導入する.
- 「運動の３法則」（慣性の法則，運動方程式，作用・反作用の法則）を導入し，様々な運動を運動方程式を用いて普遍的に表現する.
- 質点の運動方程式の解法：運動方程式を様々なタイプの微分方程式に落とし込み，これらを具体的に解く。特に，減衰運動，単振動，減衰振動，強制振動などを扱う。
- エネルギーとその保存則：仕事とエネルギーの関係を考察し，それらの具体的な問題を扱う.
- 中心力運動：重力系を例に，中心力による質点の軌道を考察する.
- 相対運動と慣性力：座標変換と相対運動を扱い，慣性力を導入する.
- 多質点系の並進運動：重心運動と相対運動に分けて考える.
- 多質点系の回転運動：慣性モーメントの導入.
- 剛体の動力学：慣性モーメントを用いて回転する剛体運動の簡単な例を扱う.

第 14 回講義資料目次

3. 慣性モーメントを扱い方とその算出

[教科書 p98-100 参照]　ここでは，例題形式で，剛体の回転運動の扱い方を学ぶ．
例題 1 は第 13 回講義で時間内に扱えず先送りした内容である．

例題 1　剛体振り子
重心を通らない固定した水平軸 O を回転軸として回転できる質量 M の剛体振り子の周期（振れ幅が小さい時）を求めよ．但し，O 周りの慣性モーメントを I，回転軸から重心までの距離を h とする．また外力である重力は重心の 1 点に掛かっているものと考えてよいことに注意せよ．以下証明あり．

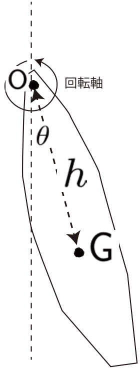

図 1: 設定図.

3. 慣性モーメントを扱い方とその算出 (2)

(解答)
回転軸と重心を結んだ線分 OG と鉛直軸とのなす角を θ とする．以下ベクトルの原点は，回転軸と鉛直軸の交点に定める．この時，回転の運動方程式は，

$$I\ddot{\theta}\mathbf{e}_z = N\mathbf{e}_z = \mathbf{N} \tag{1}$$

である．$\mathbf{e}_z$ は回転軸と平行な（紙面上向の）単位ベクトルでありここでは反時計回りのモーメントを正の方向にとっている．

3. 慣性モーメントを扱い方とその算出 (3)

いま，微小要素 i の質量を m_i，そして $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ とすると，剛体に働く重力のモーメントの総和は，各要素の位置ベクトルを $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i$ とすれば

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i) \times m_i \mathbf{g} \\
&= \mathbf{r}_G \times \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{g} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (m_i \mathbf{r}')}_{=\,\mathbf{0}(*)\ \text{以下示す}} \times \mathbf{g} \\
&= \mathbf{r}_G \times M\mathbf{g} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

となり，重力は重心の一点に掛かっていると考えることできる．

3. 慣性モーメントを扱い方とその算出 (4)

式 (2) の (*) の部分に関しては重心の定義から

$$\begin{aligned} M\mathbf{r}_G &= \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_G + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}'_i \\ &= M\mathbf{r}_G + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}'_i \end{aligned} \tag{3}$$

となることから

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}} \tag{4}$$

であることが示される.

3. 慣性モーメントを扱い方とその算出 (5)

さて，重力のモーメントベクトル $\mathbf{N} = N\mathbf{e}_z$ は紙面下（表から裏）向きであるので，N の符号に注意して，

$$N = -|\mathbf{r}_G \times M\mathbf{g}| = -Mgh\sin\theta = -Mgh\sin\theta \tag{5}$$

となる．いま，微小振動の条件 $\theta \ll 1$ を考慮すると，

$$N \sim -Mgh\theta \tag{6}$$

となる．すると，回転の運動方程式は，

$$I\ddot{\theta} = -Mgh\theta \tag{7}$$

となる．これは，単振動を示す 2 階同次微分方程式である．この時，角速度は $\omega = \sqrt{\frac{Mgh}{I}}$ である．よって周期 T は，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} \tag{8}$$

となる．

3. 慣性モーメントを扱い方とその算出 (6)

次に，慣性モーメントの具体的な値が，剛体の形や回転軸の取り方により変わる様子を例題を解きながら確認する．

例題 2 質点の結合系における慣性モーメント．
質量の無視できる長さ 3ℓ の棒の両端にそれぞれ質量 m と $2m$ の質点が結合している．この時，重心周りの慣性モーメント I_1 と，質量 m の質点まわりの慣性モーメント I_2 を求めよ．

(解答) 質量 m と $2m$ の質点の位置をそれぞれ $x_1 = 0$, $x_2 = 3\ell$ とする．すると重心の位置は $x_G = \frac{mx_1+2mx_2}{3m} = \frac{2m3\ell}{3m} = 2\ell$ である．したがって，重心周りの慣性モーメント I_1 は

$$I_1 = (x_1 - x_G)^2 m + (x_2 - x_G)^2 2m = 4\ell^2 m + 2\ell^2 m = 6\ell^2 m. \tag{9}$$

である．

3. 慣性モーメントを扱い方とその算出 (7)

次に，質量 m の質点周りの慣性モーメントは,

$$I_2 = (x_1 - x_1)^2 m + (x_2 - x_1)^2 2m = 0 + 18\ell^2 m = 18\ell^2 m \tag{10}$$

である．この様に，回転軸を平行にずらすと慣性モーメントが変化することが分かる．なお，この問題は，平行軸の定理 [教科書 p 98 参照] の一例である．

3. 慣性モーメントを扱い方とその算出 (8)

例題 3　棒の慣性モーメントの算出
質量 M，長さ ℓ，密度が一定である細い棒の重心 G を通り，棒に垂直な軸の周りの慣性モーメント I_G，および棒の端 A を通り棒に垂直な軸まわりの慣性モーメント I_A を求めよ．

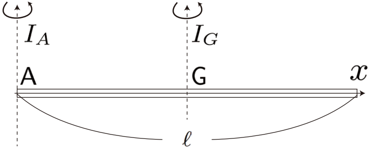

図 2: 設定図.

(解答)
棒の質量線密度を $\rho = M/\ell$ とする．棒に沿って x 軸を取り，回転中心である重心を $x = 0$ とする．いま，微小区間 $\mathrm{d}x$ における物体の質量は $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}x$ である．よって，

$$I_G = \int x^2 \mathrm{d}m = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} x^2 \rho \mathrm{d}x = \frac{\rho \ell^3}{12} = \frac{M\ell^2}{12} \tag{11}$$

3. 慣性モーメントを扱い方とその算出 (9)

を得る．

次に，棒の端 A を回転軸にする場合の慣性モーメント I_A は，回転軸から点 x までの距離は $x+\frac{\ell}{2}$ となるので

$$I_A = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} (x+\frac{\ell}{2})^2 \rho \mathrm{d}x = \int_0^{\ell} x'^2 \rho \mathrm{d}x' = \frac{M\ell^2}{3} \tag{12}$$

となる．

3. 慣性モーメントを扱い方とその算出 (10)

例題 4　円板の慣性モーメントの算出
質量 M，半径 a の一様 (質量密度が一定) な薄い円板の中心 O を通り，円板に垂直な軸まわりの慣性モーメント I_z を求めよ．
また，円板の直径方向を軸とした時の慣性モーメント I_x を求めよ．

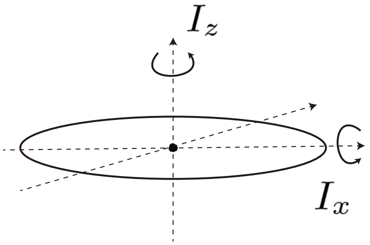

図 3: 設定図．

3. 慣性モーメントを扱い方とその算出 (11)

(解答)
円板の質量面密度は $\rho = M/\pi a^2$ である．いま，回転中心から r の位置にある幅 $\mathrm{d}r$ の同心円輪を考える．この円環の質量は $2\pi\rho r\mathrm{d}r$ である．円輪を微小要素に分けて考えると，円輪の慣性モーメントは $r^2 \sum_{i\in \text{円環内}} \mathrm{d}m_i = r^2 \times (\rho 2\pi r\mathrm{d}r) = 2\pi\rho r^3\mathrm{d}r$ となる（図 **4** 参照）．

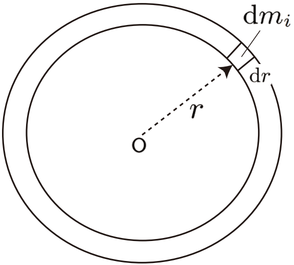

図 4: 円板を幅 $\mathrm{d}r$ の円輪に分割し，さらに微小要素 (質量 $\mathrm{d}m_i$) に分けた時の様子．

3. 慣性モーメントを扱い方とその算出 (12)

よって，円板全体の慣性モーメントは，円輪の慣性モーメントを r 方向に区間 $[0, a]$ で積分すればよいので，

$$\boxed{I_z = \int_0^a 2\pi\rho r^3 \mathrm{d}r = \frac{Ma^2}{2}} \tag{13}$$

となる．
円板と平行に中心を原点とする x 軸，y 軸を定義する．すると，先に求めた円板に垂直な軸まわりの慣性モーメントは，$r^2 = x^2 + y^2$ より，

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}m_i(x_i^2 + y_i^2) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}m_i x_i^2}_{I_y} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}m_i y_i^2}_{I_x} = I_y + I_x \tag{14}$$

と書ける．ここで，I_x と I_y はそれぞれ x 軸，y 軸まわりの慣性モーメントである．いま，x 軸と y 軸は対等であるので，$\boxed{I_x = I_y}$となる．従って，

$$\boxed{I_x = \frac{1}{2} I_z = \frac{Ma^2}{4}} \tag{15}$$

3. 慣性モーメントを扱い方とその算出 (13)

となる．
なお，この問題は，**垂直軸の定理** [教科書 p 98 参照] の一例である．

第 14 回講義資料目次

4. 剛体の落下運動

♣ 剛体の落下運動 [教科書 p100-p101 参照]

ここでは，慣性モーメントを用いて，回転しながら並進運動する剛体の運動を具体的に扱う．まず，図 **5** の様に，剛体は並進運動と回転運動からなる．一般的な運動はこれらの重ね合わせになる．

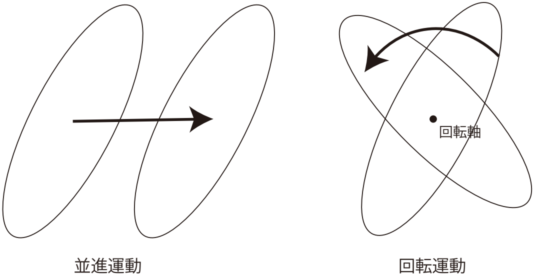

図 **5**: 剛体の並進運動と回転運動

4. 剛体の落下運動 (2)

まずは，平らな平面を転がり落ちる円柱や球の運動を考えよう．ここでの設定は，後で扱う例題 5 と同様であるので図 **6** を参照せよ．いま，剛体の全ての点は，斜面に垂直な平面内を運動する．重心の座標を (x_G, y_G) とすると，重心の運動方程式は,

$$\boxed{M\ddot{x}_G = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_x} \tag{16}$$

$$\boxed{M\ddot{y}_G = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_y} \tag{17}$$

である．ここで，M は剛体の質量，F_{ix}，F_{iy} は剛体の各点に掛かる外力，F_x，F_y はそれらの和である．また，重心の運動方程式は，並進運動を表す．一方，回転軸は，(x, y) 平面に対して垂直な方向 (z 方向) を向き，(x, y) 平面に対して平行移動する (次に扱う例題 1 と設定は等しいのでこれを参照せよ)．ここで，z 方向を回転軸とする重心周りの慣性モーメントを I_G とすれば，剛体の回転の運動方程式（力のモーメントに関する方程式）は,

$$\boxed{\dot{L} = N_z} \tag{18}$$

4. 剛体の落下運動 (3)

となる．なお，N_z は回転軸に対する力のモーメントの大きさである．一方，角運動量の大きさが $L = I\dot{\theta}$ であることから，角運動量を慣性モーメントと回転角 θ で書き換えると，

$$\boxed{I_G\ddot{\theta} = N_z} \tag{19}$$

を得る．平面運動においてはこの様な 3 本の方程式を立てることができる．

[教科書 p87-89，p95-97 参照] 次に，上の設定を踏襲し，重心周りで回転する剛体におけるエネルギー保存則を考える．剛体を「質点系」と考えれば，外力が重力などの保存力の場合，質点の全力学エネルギー E は，全運動エネルギー K と，全位置エネルギー U を用いて

$$\boxed{E = K + U} \tag{20}$$

4. 剛体の落下運動 (4)

であり，これは保存する．いま，全運動エネルギー K を重心座標と相対座標に分けると，

$$
\begin{aligned}
K &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_G + \mathbf{v}_i')^2 \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{v}_G^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + \underbrace{\mathbf{v}_G \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i'}_{\text{重心の定義から } \mathbf{0} \text{ になる}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{v}_i')^2 \\
&= \frac{M}{2} \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i \omega)^2 \\
&= \frac{M}{2} \mathbf{v}_G^2 + \frac{I_G}{2} \omega^2
\end{aligned}
$$

となる．この様に，$\boxed{\text{重心の運動エネルギー } \frac{M}{2} \mathbf{v}_G^2}$ と $\boxed{\text{回転の運動エネルギー } \frac{I_G}{2} \omega^2}$ に分けることができた．

4. 剛体の落下運動 (5)

次に位置エネルギーであるが，ここでは簡単のために重力が h(高さ) 軸，負の方向に働いているとすれば，各質点の位置エネルギーは $m_i g h_i$ である．したがって，全位置エネルギーは

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i g h_i = M g h_G \tag{21}$$

となる．ここで $h_G = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i h_i}{M}$（高さ方向の重心位置）である．
従って，全力学的エネルギーは以下の様に，

$$\boxed{E = \frac{M}{2}\mathbf{v}_G^2 + \frac{I_G}{2}\omega^2 + M g h_G} \tag{22}$$

と具体的に書き下すことができ，これが時間に対して保存する．

これらの剛体の性質を，以下具体的に問題を解くことにより確認しよう．特に，質点が斜面を運動する際と比較してどの様な差違が生じるか考察しよう．

4. 剛体の落下運動 (6)

例題 5[教科書 p100 例題+章末問題 A8]

質量 M，半径 a で重心周りの慣性モーメントが $I_G = \frac{2Ma^2}{5}$ である一様な球が，滑ることなく傾斜角 α のあらい斜面を転がり落ちる（図 **6**）．この時以下の問いに答えよ．球の慣性モーメントについては当資料補遺に導出をまとめた．また教科書 p99 例題 5 を参照せよ．

(1) 重心の加速度を求めよ．

(2) 球と斜面の間の最大静止摩擦係数を μ_S とするとき，球が滑らないための条件を求めよ．

(3) 静止の位置から転がり出し，斜面上 ℓ だけ降下した際の重心の速さを求めよ．

4. 剛体の落下運動 (7)

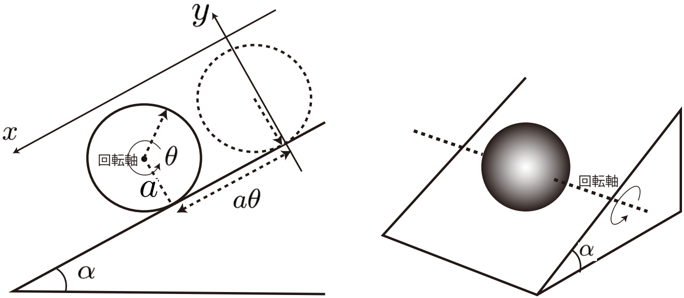

図 6: 設定図. (左) 断面図. (右) 鳥瞰図.

(解答)

4. 剛体の落下運動 (8)

(1) 重心の加速度を求めよ．
球に働く力は，重心に対し重力 $M\mathbf{g}$，斜面との接触点で働く垂直抗力 $\mathbf{R}$，摩擦力 $\mathbf{F}$ である（図 **7**）．ここでこれらの力の大きさは Mg，R，F である．いま，座標は図のように定める．この時，重心（並進）の運動方程式は，

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_G &= \underbrace{Mg\sin\alpha - F}_{x\text{ 方向の外力の和}} \\ M\ddot{y}_G &= \underbrace{R - Mg\cos\alpha}_{y\text{ 方向の外力の和}} \end{aligned} \tag{23}$$

であり重心周りの回転の方程式は

$$I_G\ddot{\theta} = \underbrace{aF}_{\text{重心まわりの力のモーメント}} \tag{24}$$

である．ここで θ は回転角である．

4. 剛体の落下運動 (9)

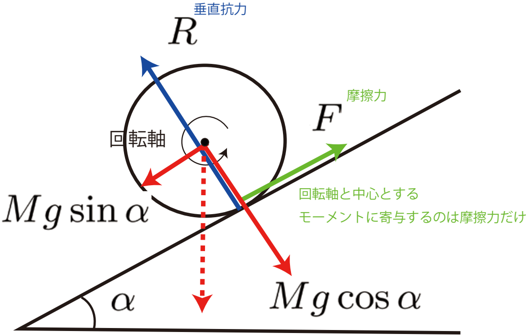

図 **7**: 剛体球に掛かる力.

4. 剛体の落下運動 (10)

真っ先に分かることは，球が斜面から離れない時，$\ddot{y}_G$ は 0 であるので，垂直抗力の大きさは，

$$R = Mg\cos\alpha \tag{25}$$

である．続いて，この問題を解く鍵は，球が斜面に対して滑らない時，回転した円弧の長さ $a\theta$ と，重心の移動距離が等しいことである．このことは高校数学で出てきたサイクロイドの考え方を参照せよ．つまり，転がり始めた位置を座標原点とすれば，

$$x_G = a\theta \tag{26}$$

を得る．このことから，

$$\ddot{x}_G = a\ddot{\theta} \tag{27}$$

である．これを用いることで回転の運動方程式は

$$I_G \frac{\ddot{x}_G}{a} = aF \tag{28}$$

4. 剛体の落下運動 (11)

と変形される．これより並進 x 方向の運動方程式と連立し F を消去すれば,

$$M\ddot{x}_G = Mg\sin\alpha - I_G\frac{\ddot{x}_G}{a^2} \tag{29}$$

を得る．これを整理することにより，重心方向の加速度は,

$$\ddot{x}_G = \frac{Mga^2\sin\alpha}{Ma^2 + I_G} \tag{30}$$

となる．ここで，球の重心周りの慣性モーメント $I_G = \frac{2Ma^2}{5}$（**当資料補遺，教科書 p99 参照**）を用いれば,

$$\ddot{x}_G = \frac{5g\sin\alpha}{7} \tag{31}$$

を得る．このことから，回転運動を考慮すると，質点に比べて加速度が 5/7 になる．

4. 剛体の落下運動 (12)

(2) **球と斜面の間の最大静止摩擦係数を μ_{S} とするとき，球が滑らないための条件を求めよ．**

式 (31) を式 (23)x 成分に代入すれば，静止摩擦力 F は,

$$F = Mg\sin\alpha - M\ddot{x}_G = \frac{2Mg\sin\alpha}{7} \tag{32}$$

となる．接触点で滑らない為の条件は，静止摩擦力が最大静止摩擦力を越えないこと：

$$F \leq \mu_{\mathrm{S}} R = \mu_{\mathrm{S}} Mg\cos\alpha \tag{33}$$

を満たすことである．これより，条件,

$$\mu_{\mathrm{S}} \geq \frac{2}{7}\tan\alpha \tag{34}$$

を得る．

4. 剛体の落下運動 (13)

(3) 静止の位置から転がり出し，斜面上 ℓ だけ降下した際の重心の速さを求めよ．

力学的エネルギー保存則より

$$Mg\ell\sin\alpha = \frac{M}{2}\dot{x_G}^2 + \frac{I_G}{2}\dot{\theta}^2 \tag{35}$$

となる．いま，$\theta = \frac{x_G}{a}$，$I_G = \frac{2Ma^2}{5}$ であることから，

$$\begin{aligned} Mg\ell\sin\alpha &= \frac{M}{2}\dot{x_G}^2 + \frac{Ma^2}{5}(\frac{\dot{x}_G}{a})^2 \\ &= \frac{7M}{10}\dot{x_G}^2 \end{aligned} \tag{36}$$

となる．つまり並進の運動エネルギーと回転の運動エネルギーの比が 5:2 である．
よって，斜面を下る重心の速さは

$$\dot{x}_G = \sqrt{\frac{10g\ell\sin\alpha}{7}} \tag{37}$$

となる．

第 14 回講義資料目次

5.1. 第 14 回講義のまとめ

回転する剛体の具体的な運動を扱った．

- 剛体運動は，$\boxed{\text{並進方向}}$と$\boxed{\text{回転方向}}$の運動方程式を立てる．
- 並進の運動方程式は，$\boxed{\text{重心に掛かる合力}}$に対して立てる．これと釣り合う慣性項は$\boxed{M\ddot{\mathbf{r}}_G}$である．
- 回転の運動方程式は，回転軸を中心とする力のモーメントに対して立てる．これと釣り合う慣性項は$\boxed{\text{角運動量の時間微分 } \dot{\mathbf{L}}}$でありその$\boxed{\text{大きさは } I\dot{\omega}}$または$\boxed{I\ddot{\theta}}$である．
- 慣性モーメント I の大きさは，同じ剛体であっても回転軸の取り方により変化する．

全 **14** 回を通して，大学初年度で扱う，「古典力学」を一通り扱いました．ペースが速く大変だったと思いますが，ついてきて下さりありがとうございます．期末試験まで，質問を受け付けております．それでは，今期もあとひといき，宜しくお願いします．

5.2. 第 13・14 回レポート課題について

- 当科目 NUCT 内「課題」欄に、「第 13・14 回レポート課題」を用意しました．その中に，問題兼解答用紙をアップしましたので，各自印刷し，所定欄に解答の上，電子化した解答のスキャンを同ページ所定欄に添付してください．
- 解答用紙の印刷が諸事情により難しい場合は，通常のレポート用紙に解答してもよいこととします．
- 採点結果は，NUCT を通して各人へお知らせします．
- 添付ファイルは 1 つにまとめていることが望ましいです。
- ファイル名は 第 13・14 回レポート課題 (氏名).pdf と命名してください．
- スキャン方法の詳細は NUCT のフォーラムを参照ください。

第 14 回講義資料目次

6. 補遺：球の慣性モーメント

[教科書 p99 例題 5 参照] ここでは，球の中心を通る軸に対する慣性モーメントを求める．球の慣性モーメントは，球をスライスした薄い円盤の慣性モーメントを求め，これを高さ方向に積分するという方針で求める．今回の講義で，半径 a，質量 M の薄い円盤の慣性モーメントが $\frac{Ma^2}{2}$ であることを導入した．

いま，半径 a，質量 M の球に対して，その中心を原点とする xyz 座標系を導入し，z 軸まわりの慣性モーメント I_z を求めよう．ここでは，任意の位置 z において，z 方向に対して垂直な面で球を厚さ $\mathrm{d}z$ の円板にスライスしていく．この円板の半径は三平方の定理から $\sqrt{a^2 - z^2}$ である．この円板の体積は $\pi(a^2 - z^2)\mathrm{d}z$ であることから，その質量 $\mathrm{d}m$ は，球全体の体積 $\frac{4\pi a^3}{3}$ と質量 M を用いて，

$$\mathrm{d}m = M\frac{\pi(a^2 - z^2)\mathrm{d}z}{\frac{4\pi a^3}{3}} \tag{38}$$

を得る．

6. 補遺：球の慣性モーメント (2)

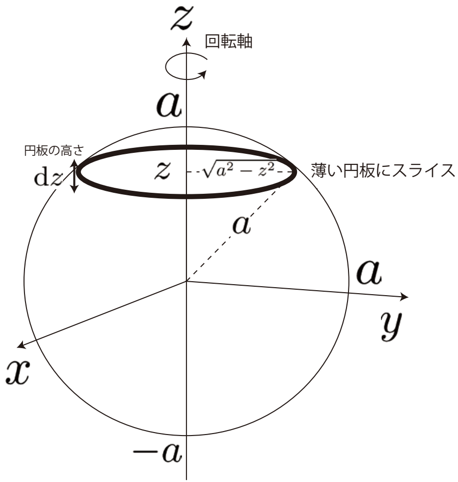

図 8: 設定図．球を z 軸に対して垂直な方向にスライスした円板を考える．

6. 補遺：球の慣性モーメント (3)

従って，この円板の慣性モーメント $\mathrm{d}I_z$ は，薄い円板の慣性モーメントの結果に，上で求めた半径，質量へと置き換えることにより

$$\mathrm{d}I_z = \frac{1}{2}M\frac{\pi(a^2-z^2)\mathrm{d}z}{\frac{4\pi a^3}{3}}(a^2-z^2) = \frac{3M(a^2-z^2)^2}{8a^3}\mathrm{d}z \tag{39}$$

となる．従って，I_z は，$\mathrm{d}I_z$ を z に対して $[-a,a]$ の範囲で積分すればよいので，

$$I_z = \int_{-a}^{a}\frac{3M(a^2-z^2)^2}{8a^3}\mathrm{d}z = \frac{2Ma^2}{5} \tag{40}$$

を得る．