物理学基礎 I（医・医）第 13 回
多質点系の運動とその回転運動，剛体運動のさわり

川﨑猛史

名古屋大学理学部物理学科

Last update：July 16, 2021

第 13 回講義資料目次

第 13 回講義資料目次

1.1. 講義日程

♣ スケジュール更新（7/16）

1. 4/16：第 1 回
2. 4/23：第 2 回 (第 1・2 回課題公開)
3. 4/30：第 3 回 (第 1・2 回課題提出期限)
4. 5/07：第 4 回 (第 3・4 回課題公開)
5. 5/14：第 5 回 (第 3・4 回課題提出期限)
6. 5/21：第 6 回 (第 5・6 回課題公開)
7. 5/28：第 7 回 (第 5・6 回課題提出期限)
8. 6/04：第 8 回 (第 7・8 回課題公開)
9. 6/11：名大祭のため休講
10. 6/18：第 9 回 (第 7・8 回課題提出期限)
11. 6/25：第 10 回　(第 9・10 回課題公開)
12. 7/02：第 11 回 (第 9・10 回課題提出期限)
13. 7/09：第 12 回 (第 11・12 回課題公開)
14. **7/16：第 13 回 (第 11・12 回課題提出期限)**
15. **7/23：第 14 回 (第 13・14 回課題公開)**
16. 7/30：**第 13・14 回課題提出期限**
17. 8/06：オンライン期末試験　2 限

1.2. 試験について

- 期末試験を以下の日時・方法で行います.
  - 日時： 8/6（金）2 限　10：30-12：00　（試験開始 10 分前に問題をアップロードします．答案提出トラブルに備え 12：30 までは時間内提出として認めます）
  - 試験方法： 遠隔試験．当 NUCT「課題」より出題．NUCT に学期末試験をアップロードしてから制限時間内に解答を所定の用紙（ルースリーフ等でも構わない）に記入して NUCT にアップロードしてください．解答欄の拡張は許可します。時間内であれば何度でも再提出を許可します。
  - ルール： 資料・教科書等の閲覧は許可しますが、試験ですので他人との相談は禁止します。
  - **期末試験の成績比重：　当講義成績の 5 割 (残り 5 割はレポートの成績を絶対評価で加算)**
  - 試験当日は原則全員後日指定する Zoom に入室してください。 Zoom を通してアナウンスを行います。
  - 試験当日に NUCT 小テストを用いて出欠アンケートをとります。試験を受けるひとは出席を宣言してください（受験人数を正確に把握するために行います)。

なお，当講義の合格点は期末試験とレポートの合計点の 6 割です.

第 13 回講義資料目次

2. 今回の内容

♣ 本講義内容（期末試験範囲）[教科書 p31-p103(力積を除く．p93 以降はごく基本的な内容に限る)]

- 導入：物理学とは.
- 質点の運動学：質点の位置，速度，加速度の関係，ならびに，これらの微分（積分）による表現方法を学ぶ。特に，自由落下，斜方投射，等速円運動などを具体的に扱う。
- 運動の原因となる「力」を導入する.
- 「運動の３法則」(慣性の法則，運動方程式，作用・反作用の法則）を導入し，様々な運動を運動方程式を用いて普遍的に表現する.
- 質点の運動方程式の解法：運動方程式を様々なタイプの微分方程式に落とし込み，これらを具体的に解く。特に，減衰運動，単振動，減衰振動，強制振動などを扱う。
- エネルギーとその保存則：仕事とエネルギーの関係を考察し，それらの具体的な問題を扱う.
- 中心力運動：重力系を例に，中心力による質点の軌道を考察する.
- 相対運動と慣性力：座標変換と相対運動を扱い，慣性力を導入する.
- 多質点系の並進運動：重心運動と相対運動に分けて考える.
- 多質点系の回転運動：慣性モーメントの導入.
- 剛体の動力学：慣性モーメントを用いて回転する剛体運動の簡単な例を扱う.

第 13 回講義資料目次

3.1. 一般の質点系

♣ 一般の質点系 [教科書 p83-p84 参照]

前回，主に 2 質点系の運動を扱ったが，そこでの議論は 3 体以上の質点系においても成り立つ．いま，n 個の質点からなる系 (質点系) を考える．各々の質点には番号を付けて粒子 i や粒子 j などと呼ぶ $(i, j = 1, 2, ..., n)$．また質点 i に働く外力を $\mathbf{F}_i$，質点 i が j に及ぼす内力を $\mathbf{F}_{ij}$ とする．質点 i が他の全ての粒子から受ける内力の和は，$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{ji}$ である．ただし，自身同士の内力は $\mathbf{F}_{11} = \mathbf{F}_{22} = \cdots = \mathbf{F}_{nn} = \mathbf{0}$ である．いま，内力は作用・反作用の法則から，

$$\boxed{\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}} \tag{1}$$

が成立する．

一方，質点 i の質量を m_i，位置座標を $\mathbf{r}_i$ とするとき，質点の運動方程式は，

$$\boxed{m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{ji}} \tag{2}$$

である．更に，上式の i に関して和を取れば，

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{ji}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{ji}}_{\text{内力総和} = \mathbf{0}\ \text{(後で示す)}\ (*)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \tag{3}$$

3.1. 一般の質点系 (2)

となる．ここで，全粒子の質量の和 $M=\sum_{i=1}^{n} m_i$，重心座標 $\mathbf{r}_\mathrm{G}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i$ を定義すると，上式は,

$$\boxed{M\ddot{\mathbf{r}}_\mathrm{G}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i} \tag{4}$$

となり，重心の運動方程式を得る．これより，重心に掛かる力は，外力のみであることが分かる．この式自体は，前回，2 体問題でやった時と同様である．

ちなみに，式 (3) において出てきた (*) の全内力の和が $\mathbf{0}$ になることは,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}_{ji}=\frac{1}{2}\Bigl(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}_{ji}+\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_{ij}}_{ij\ \text{交換．前項と実質同一}}\Bigr)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{(\mathbf{F}_{ji}+\mathbf{F}_{ij})}_{\text{作用・反作用の和}\ =\ \mathbf{0}}=\mathbf{0}} \tag{5}$$

によって示すことができる．

3.1. 一般の質点系 (3)

次に，外力 $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ の時を考えよう．この時，重心の運動方程式は，

$$\boxed{M\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{G}} = \mathbf{0}} \tag{6}$$

となる．つまり重心は静止，または等速直線運動する．次に，この式を時間積分すると

$$\boxed{M\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{G}} = \mathbf{C}} \tag{7}$$

を得る．ここで，$\mathbf{C}$ は定数ベクトルである．いま，各質点の運動量を $\mathbf{p}_i = m_i\dot{\mathbf{r}}_i$ とすれば，$M\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{G}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i$ であるので，

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i = \mathbf{C}} \tag{8}$$

を得る．これは運動量保存則である．2 体の時と同様に，外力が働かない場合，運動量保存則が成立する．

3.2. 質点系の角運動量とその保存則

♣ 質点系の角運動量とその保存則 [教科書 p89-92 参照]

n 個の質点において，各質点の 原点座標まわりの角運動量 を $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ と定義する．角運動量自体は，第 10 回講義で既に導入済みであり，回転平面や面積速度等を特徴づける量であることを学んだ．いま，各質点の角運動をすべての質点に対して足し合わせたものを全角運動量

$$\boxed{\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbf{L}_i}_{\text{粒子 } i \text{ の角運動量}}} \tag{9}$$

とよぶ．以下，質点系における全角運動量の性質について考える．

いま，式 (2)(質点 i の運動方程式) の両辺に対し，左側からベクトル $\mathbf{r}_i$ の外積を取り，さらに i に関する和を取ると，

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{ji}) \tag{10}$$

3.2. 質点系の角運動量とその保存則 (2)

となる．式 (10) 左辺は，外積の微分公式 $\frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}}$ を用いることで

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i}_{\text{平行ベクトルの外積は } \mathbf{0}} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \\
&= \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

となる．一方，式 (10) 右辺は，

$$
\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{ji}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{ji}}_{= \mathbf{0} \text{ になることを後で示す } (\clubsuit)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \qquad (12)
$$

3.2. 質点系の角運動量とその保存則 (3)

となる．従って，式 (11)，(12) をまとめると，

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i} \tag{13}$$

となる．
いま，**質点 i の力のモーメント (トルク)，質点系の全トルク**をそれぞれ，$\mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$，$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i$ と定義すれば，

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{N}} \tag{14}$$

を得る．力のモーメントは，小学校の理科でお馴染みの「てこの原理」で計算する量（回転軸からの距離と回転方向の力の積）を大きさにもつベクトルである．また，系の全力のモーメントが $\mathbf{0}$ である場合，全角運動量は

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{C}} \tag{15}$$

3.2. 質点系の角運動量とその保存則 (4)

となり任意の時刻で定数となる．つまり，外力のかかっていない内力系であれば，系の全角運動量が保存する（＝面積速度が一定＋回転面が固定）．

（補足）先ほどの式 (12)(♣) のように $\mathbf{r}_i$ と内力との外積が $\mathbf{0}$ になることは，外積の展開式

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2+\cdots)=\mathbf{A}\times\mathbf{B}_1+\mathbf{A}\times\mathbf{B}_2+\cdots \tag{16}$$

つまり

$$\mathbf{A}\times\sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}_i=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}\times\mathbf{B}_i \tag{17}$$

3.2. 質点系の角運動量とその保存則 (5)

を用いることで，以下のように示すことができる．

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i \times \sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}_{ji} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}}_{\text{与式を展開}} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \underbrace{\overbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}}^{\text{和の順序交換可}}\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}}_{\text{前項と実質同一．前項に対し } ij \text{ 交換.}}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \underbrace{(-\mathbf{F}_{ji})}_{\text{作用反作用で } ij \text{ 交換かつ逆符号}}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}}_{\text{これらのベクトルは平行であるので外積は } \mathbf{0}} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

3.3. 回転運動の運動方程式と慣性モーメント

♣ 回転運動の運動方程式と慣性モーメント [教科書 p86-p87]

ここでは，剛体運動を考える準備として，コマの回転の様に，固定軸を持った物体に外力のモーメントが掛かることにより回転方向に加速する運動を考える（図 **1**）．質量を無視できる円板上において，回転軸から r 離れたところに質量 m の小球を固定する (r は不変)．さらに小球には絶えず円周の接線方向に大きさ F の力を加えるものとする．

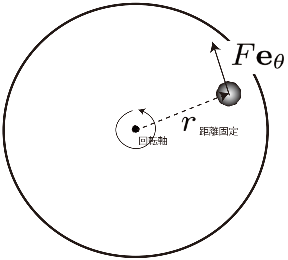

図 **1**: 円板上に固定された質点の運動．円板の中心を回転軸とし，質点の回転接線方向に力 F を与える．

3.3. 回転運動の運動方程式と慣性モーメント (2)

この時，角運動量ベクトルを $\mathbf{L}$ と置けば，

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{N} \tag{19}$$

である．ここで，外力のモーメントは　$\mathbf{N} = r\mathbf{e}_r \times F\mathbf{e}_\theta$，角運動量ベクトル $\mathbf{L} = r\mathbf{e}_r \times mr\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$，また，角運動量ベクトルの時間微分は

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{r\dot{\mathbf{e}}_r \times mr\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta}_{=\mathbf{0}\ (\text{since } \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)} + r\mathbf{e}_r \times mr\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \underbrace{r\mathbf{e}_r \times mr\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta}_{=\mathbf{0}\ (\text{since } \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r)} \tag{20}$$

であるので，これらを式 (19) に代入すると

$$\boxed{mr^2\ddot{\theta}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = rF\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta} \tag{21}$$

となり，$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta$ とすれば上式は

$$\boxed{mr^2\ddot{\theta}\mathbf{e}_z = Fr\mathbf{e}_z = \mathbf{N}} \tag{22}$$

3.3. 回転運動の運動方程式と慣性モーメント (3)

となる．質点に対する Fr は力のモーメントの大きさであり，$\mathbf{N} = Fr\mathbf{e}_z = N\mathbf{e}_z$ である．ベクトルの係数比較を行えば,

$$\boxed{mr^2\ddot{\theta} = N} \tag{23}$$

を得る．特に，mr^2 は慣性モーメントと呼び $\boxed{I = mr^2}$ と表す．これを用いることで，関係式

$$\boxed{I\ddot{\theta} = N} \tag{24}$$

を得る．この式を回転の運動方程式とよび，並進の運動方程式とそっくりな恰好をしている．(I，$\ddot{\theta}$，N は，並進運動における質量，加速度，力にそれぞれ対応するものとイメージするとよい．)

3.3. 回転運動の運動方程式と慣性モーメント (4)

次に，$\boxed{n\ \text{個の小球が回転面に固定されている場合}}$を考えよう．それぞれの質点の質量は m_i，回転軸からの距離を r_i（固定）とする．この時，先の議論と同様に，全角運動量ベクトルを $\mathbf{L}$，全トルクを $\mathbf{N}$ と置けば，

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{N} \tag{25}$$

を満たす．全角運動量ベクトルを $\mathbf{L}$，全トルクを $\mathbf{N}$ は，1 個の小球が回転面に固定されている場合の結果を i に関する和を取ればよいので

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{e}_{r_i} \times m_i r_i \dot{\theta}_i \mathbf{e}_{\theta_i} \tag{26}$$

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{e}_{r_i} \times F_i \mathbf{e}_{\theta_i} \tag{27}$$

3.3. 回転運動の運動方程式と慣性モーメント (5)

となる．また，$\mathbf{e}_{r_i}$，$\mathbf{e}_{\theta_i}$ は回転軸からみた質点 i の動径方向，接線方向の単位ベクトルであり，$\mathbf{e}_{z_i} = \mathbf{e}_{r_i} \times \mathbf{e}_{\theta_i}$ とすれば，$\mathbf{e}_{z_i}$ はすべての粒子で回転軸の方向となり $\boxed{\mathbf{e}_{z_i} = \mathbf{e}_z}$ とおける．すると，

$$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \ddot{\theta}_i \mathbf{e}_z = \mathbf{N} = N\mathbf{e}_z \tag{28}$$

を得る．ここで，全ての質点は等しい角速度で回転するので $\boxed{\dot{\theta}_i = \dot{\theta} \text{ としてよい}}$ ので，$\boxed{\ddot{\theta}_i = \ddot{\theta}}$ である．式 (28) の両辺におけるベクトルの係数比較を行えば，

$$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \ddot{\theta} = N \tag{29}$$

となる．さらに慣性モーメントを多質点に対して拡張し

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2} \tag{30}$$

3.3. 回転運動の運動方程式と慣性モーメント (6)

とすれば，1 質点系と同様の回転の運動方程式

$$\boxed{I\ddot{\theta} = N} \tag{31}$$

を得る．

3.4. 剛体の慣性モーメント

♣ 剛体の慣性モーメント

次に，これまで得た多質点系の結果を剛体の運動に拡張する．剛体は変形しない大きさを持つ物体である．剛体の運動は並進運動と回転運動を考える必要がある．**これらの運動は，回転軸からの距離が固定された膨大な数の「微小な質点」の集合体の運動として近似的に考えことができる (図 2).**

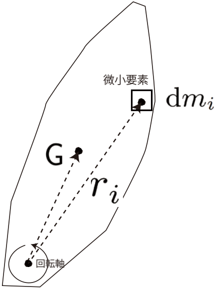

図 2: 剛体とその微小要素．微小要素の質量を $\mathrm{d}m_i$，回転軸からの距離を r_i とする．剛体の場合これらの量は運動中において常に一定である．Gは重心を表す．

3.4. 剛体の慣性モーメント (2)

いま，微小要素の質量を $\mathrm{d}m_i$（微小な質量），回転軸からの距離を r_i とすれば，慣性モーメントにおける和の計算を，積分に書き換えることができて，

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \mathrm{d}m_i = \int r^2 \mathrm{d}m} \tag{32}$$

を得る．例えば棒の慣性モーメントを考える際，質量線密度を ρ とすれば微小質量は $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}x$ となる．ここで $\mathrm{d}x$ は微小領域の長さである．これは棒の要素の位置 x の積分となるので，慣性モーメントは剛体の形に依存することが分かる．また回転の運動方程式自体は慣性モーメントさえ求めれば先ほど導入したものと同様に，

$$\boxed{I\ddot{\theta} = N} \tag{33}$$

となる．

3.4. 剛体の慣性モーメント (3)

[教科書 p98-100 参照]　ここでは，例題形式で，剛体の回転運動の扱い方を学ぶ．

例 1　剛体振り子
重心を通らない固定した水平軸 O を回転軸として回転できる質量 M の剛体振り子の周期（振れ幅が小さい時）を求めよ．但し，O 周りの慣性モーメントを I，回転軸から重心までの距離を h とする．**また外力である重力は重心の 1 点に掛かっているものと考えてよいことに注意せよ．以下証明あり．**

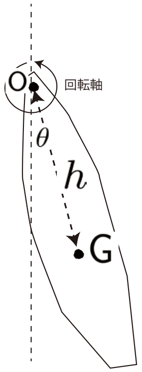

図 3: 設定図.

3.4. 剛体の慣性モーメント (4)

(解答)
回転軸と重心を結んだ線分 OG と鉛直軸とのなす角を θ とする．この時，回転の運動方程式は，

$$I\ddot{\theta}\mathbf{e}_z = N\mathbf{e}_z = \mathbf{N} \tag{34}$$

である．$\mathbf{e}_z$ は回転軸と平行な（紙面上向の）単位ベクトルでありここでは半時計回りのモーメントを正の方向にとっている．

いま，微小要素 i の質量を m_i，そして $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ とすると，剛体に働く重力のモーメントの総和は，各要素の位置ベクトルを $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i$ とすれば

3.4. 剛体の慣性モーメント (5)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i) \times m_i \mathbf{g} \\
&= \mathbf{r}_G \times \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{g} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (m_i \mathbf{r}')}_{= \mathbf{0}(*)\ \text{以下示す}} \times \mathbf{g} \\
&= \mathbf{r}_G \times M \mathbf{g} \qquad (35)
\end{aligned}
$$

このように，重力は重心の一点に掛かっていると考えることできる．

3.4. 剛体の慣性モーメント (6)

いま，式 (35) の (*) の部分に関しては重心の定義から

$$
\begin{aligned}
M\mathbf{r}_G &= \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_G + \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i \\
&= M\mathbf{r}_G + \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i
\end{aligned} \tag{36}
$$

となることから

$$
\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i = \mathbf{0} \tag{37}
$$

3.4. 剛体の慣性モーメント (7)

となる. 従って，重力のモーメントベクトル $\mathbf{N} = N\mathbf{e}_z$ は紙面下向きであるので，N の符号に注意して，

$$N = -|\mathbf{r}_G \times M\mathbf{g}| = -Mgh\sin\theta = -Mgh\sin\theta \tag{38}$$

をえる．いま，微小振動の条件 $\theta \ll 1$ を考慮すると，

$$N \sim -Mgh\theta \tag{39}$$

となる．すると，回転の運動方程式は，

$$I\ddot{\theta} = -Mgh\theta \tag{40}$$

となる．これは，単振動を示す 2 階同次微分方程式である．この時，角速度は $\omega = \sqrt{\frac{Mgh}{I}}$ である．よって周期 T は，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} \tag{41}$$

となる.

第 13 回講義資料目次

4.1. 第 13 回講義のまとめ

多質点系の回転運動から，剛体の回転運動を導入した.

- 多質点系・剛体系問わず，並進（重心）の運動方程式は,

$$\boxed{M\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}},$$

回転の運動方程式は,

$$\boxed{I\ddot{\theta}\mathbf{e}_z = N\mathbf{e}_z}$$

となる．ここで，M は系の全質量，$\mathbf{F}$ は総外力，I は慣性モーメント，N は全力のモーメントの大きさ，$\mathbf{e}_z$ は回転軸方向の単位ベクトルである.

- 多質点系における慣性モーメントは,

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2}$$

となる.

4.1. 第 13 回講義のまとめ (2)

- 剛体系における慣性モーメントは,

$$\boxed{I = \int r^2 \mathrm{d}m}.$$

となる.

次回予告：（最終回）剛体運動の簡単な例