物理学基礎 I（医・医）第 12 回
多質点系の並進運動:重心運動と相対運動

川﨑猛史

名古屋大学理学部物理学科

Last update：July 9, 2021

第 12 回講義資料目次

第 12 回講義資料目次

1. 講義のスケジュール

♣ スケジュール更新（6/18）

1. 4/16：第 1 回
2. 4/23：第 2 回 (第 1・2 回課題公開)
3. 4/30：第 3 回 (第 1・2 回課題提出期限)
4. 5/07：第 4 回 (第 3・4 回課題公開)
5. 5/14：第 5 回 (第 3・4 回課題提出期限)
6. 5/21：第 6 回 (第 5・6 回課題公開)
7. 5/28：第 7 回 (第 5・6 回課題提出期限)
8. 6/04：第 8 回 (第 7・8 回課題公開)
9. 6/11：名大祭のため休講
10. 6/18：第 9 回 (第 7・8 回課題提出期限)
11. 6/25：第 10 回　(第 9・10 回課題公開)
12. 7/02：第 11 回 (第 9・10 回課題提出期限)
13. **7/09：第 12 回 (第 11・12 回課題公開)**
14. 7/16：第 13 回 (**第 11・12 回課題提出期限**)
15. 7/17 補講日：第 14 回 (第 13・14 回課題公開)
16. 7/23：**オリンピックのため休講　(後日指定) 第 13・14 回課題提出期限**
17. 7/30：なし
18. 8/6（予定）：　期末試験

第 12 回講義資料目次

2. 今回の内容

♣ 本講義内容（期末試験範囲予定）[教科書 p31-p103(但し p93 以降はごく基本的な内容に限る)]

- 導入：物理学とは.
- 質点の運動学：質点の位置，速度，加速度の関係，ならびに，これらの微分（積分）による表現方法を学ぶ。特に，自由落下，斜方投射，等速円運動などを具体的に扱う。
- 運動の原因となる「力」を導入する.
- 「運動の３法則」(慣性の法則，運動方程式，作用・反作用の法則）を導入し，様々な運動を運動方程式を用いて普遍的に表現する.
- 質点の運動方程式の解法：運動方程式を様々なタイプの微分方程式に落とし込み，これらを具体的に解く。特に，減衰運動，単振動，減衰振動，強制振動などを扱う。
- エネルギーとその保存則：仕事とエネルギーの関係を考察し，それらの具体的な問題を扱う.
- 中心力運動：重力系を例に，中心力による質点の軌道を考察する.
- 相対運動と慣性力：座標変換と相対運動を扱い，慣性力を導入する.
- 多質点系の並進運動：重心運動と相対運動に分けて考える.
- 多質点系の回転運動：慣性モーメントの導入.
- 剛体の動力学：慣性モーメントを用いて回転する剛体運動の簡単な例を扱う.

第 12 回講義資料目次

3.1. 多質点系の力学の導入

♣ 多質点系の力学の導入 [教科書 p77 参照]

- これまで主に，1 つの質点に力が作用している場合を考えてきた．
- 物体の運動に対してこの様な単純な見方ができるのは，力を生み出す他の物体の質量が相対的に大きく，静止しているものとみなすことができたからだ．
- 地上の物体に対する地球などはその好例だ．
- 一方，いくつかの同じくらいの質量をもつ物体がお互いに力を及ぼしながら運動する場合は，それらの運動を同時に考える必要がある．
- 今回はこの様な多質点系の運動を扱う．

3.2. 2 質点系の運動方程式：重心運動と相対運動

♣2 質点系の運動方程式 [教科書 p77 参照]

- 2 粒子がお互いに及ぼしあう力を内力といい，それ以外に外から加わる力を外力という．
- いま，粒子 1，粒子 2 に働く外力をそれぞれ $\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$ とする．
- 内力は作用・反作用則（ニュートンの第 3 法則）により，作用する力と反作用する力の大きさが等しく，向きが反対になる．
- 物体 2 から 1 に働く力を $\mathbf{F}_{21}$，物体 1（位置 $\mathbf{r}_1$，質量 m_1）から物体 2（位置 $\mathbf{r}_2$，質量 m_2）に働く力を $\mathbf{F}_{12}$ とすれば，

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0}} \tag{1}$$

の関係をもつ．

- すると、質点 1,2 に関する運動方程式は，それぞれ，

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{21} \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_{21} \end{aligned} \tag{2}$$

となる（図 **1**）．

3.2. 2 質点系の運動方程式：重心運動と相対運動 (2)

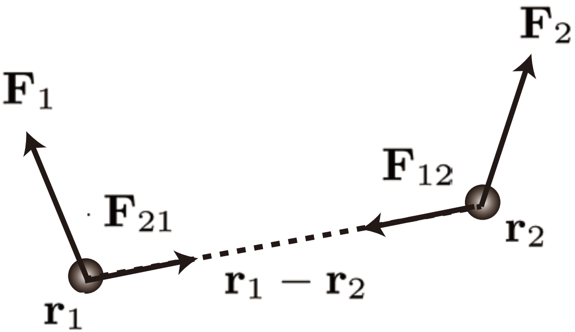

図 **1**: 2 体問題.

3.2. 2 質点系の運動方程式：重心運動と相対運動 (3)

- この 2 つの式の和をとると，$\mathbf{F}_{21}$，$\mathbf{F}_{12}$ は打ち消しあうが，外力項は残り，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \tag{3}$$

となる．

- いま，これらの質点の重心座標

$$\boxed{\mathbf{r}_\mathrm{G} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}} \tag{4}$$

を導入し，系全体の質量 $M = m_1 + m_2$ とすれば，式 (4) は，

$$\boxed{M\ddot{\mathbf{r}}_\mathrm{G} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2} \tag{5}$$

となり，重心に関する運動方程式を得る．

- これより，重心に掛かる合力は，外力のみであることがわかる．

- 以降，外力が掛かっていない場合を考える．

3.2. 2 質点系の運動方程式：重心運動と相対運動 (4)

- この時，重心の運動方程式は，

$$M\ddot{\mathbf{r}}_\mathrm{G} = \mathbf{0} \tag{6}$$

となる．これを時間積分すれば，

$$M\dot{\mathbf{r}}_\mathrm{G} = \mathbf{C} \tag{7}$$

を得る．ここで定数ベクトル $\mathbf{C}$ となる．

- ここで得た関係式は

$$\boxed{m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{C}} \tag{8}$$

または

$$\boxed{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{C}} \tag{9}$$

であり，$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ はそれぞれ質点 1 と質点 2 の速度である．

- いま，質量 m と速度 $\mathbf{v}$ の積を運動量 $\mathbf{p}$ と定義すると，質点 1 と質点 2 の運動量の和 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ が保存する．
- これを運動量保存則という．

3.2. 2 質点系の運動方程式：重心運動と相対運動 (5)

- 一般的に，外力が働いていない系においては，系の全運動量が保存する．
- 運動量はエネルギーと並んで重要な保存量である．

- 上の議論では，重心運動に注目することにより，外力の寄与を抽出した．これに対して，今度は内力の寄与の抽出を試みよう．
- また，引き続き外力が掛かっていない時を考える．
- いま，式 (2) のそれぞれの両辺に m_2，m_1 を掛けると

$$\begin{aligned} m_2 m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= m_2 \mathbf{F}_{21} \\ m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= m_1 \mathbf{F}_{12} = -m_1 \mathbf{F}_{21} \end{aligned} \tag{10}$$

となり，式 (10) の上から下を差し引きすると，

$$m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2) = (m_1 + m_2)\mathbf{F}_{21} \tag{11}$$

を得る．

3.2. 2 質点系の運動方程式：重心運動と相対運動 (6)

- ここで換算質量

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \tag{12}$$

および，相対座標

$$\boxed{\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2} \tag{13}$$

を導入すれば，相対座標と内力に関する運動方程式

$$\boxed{\mu \ddot{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{F}_{21}} \tag{14}$$

を得る.

- これより，相対座標に注目することで，内力の寄与を抽出することができた.
- 地球（質量 m_1）と太陽（質量 m_2）の 2 体運動のように，$m_1 \ll m_2$ の時，換算質量は

$$\mu \sim m_1 \tag{15}$$

となり，内力（万有引力）によって運動する地球の運動方程式

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{F}_{21} \tag{16}$$

が得られる.

- このことからも太陽は静止してるものとみなしてよいことが分かる.

3.3. 2 体問題の例題

♣ 2 体問題の例題 [講義オリジナル]

例題 1

- ばね定数 k のばねの両端に質量 m_1 と m_2 の物体 1,2 がついている系を考える．
- いま，物体 2 には定数 F の外力がかかっているとする．また，ばねの自然長を ℓ，時刻 t における物体の位置座標をそれぞれ $x_1(t)$，$x_2(t)(x_1(t) < x_2(t))$ とし，物体の運動は 1 次元上に限定されるとする．
- 時刻 $t = 0$ において，物体 1，2 はそれぞれ，0，x_0 の位置に静止していたとする **(つまり，初期条件は，$x_1(0) = 0$，$x_2(0) = x_0$，$\dot{x}_1(0) = 0$，$\dot{x}_2(0) = 0$ である)**.
- この時，以下の手順で物体の運動を解析しよう．

3.3. 2 体問題の例題 (2)

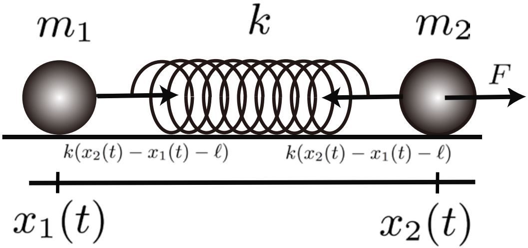

図 2: 設定図．自然長が ℓ であるので，ばねの伸びは $x_2(t)-x_1(t)-\ell$ となる．よってばねの弾性力の大きさは $k(x_2(t)-x_1(t)-\ell)$.

3.3. 2 体問題の例題 (3)

設問

(1) 物体 1，2 に関する運動方程式を立てよ．

(2) 時刻 t における 2 つの物体の重心座標 $x_{\rm G} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$，重心速度 $v_{\rm G} = \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m_1 + m_2}$ を t の関数として表せ．[ヒント：重心座標，重心速度の初期条件は，$x_{\rm G}(0) = \frac{m_1 x_1(0) + m_2 x_2(0)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 x_0}{m_1 + m_2}$，$v_{\rm G}(0) = \frac{m_1 \dot{x}_1(0) + m_2 \dot{x}_2(0)}{m_1 + m_2} = 0$ である．]

(3) 物体 1，2 の相対座標 $x_{12}(t) = x_1(t) - x_2(t)$ に関する運動方程式を立て，解 $x_{12}(t)$ を求めよ．

(4) 時刻 t における，位置座標 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ を t の関数で表せ．

解答:

3.3. 2 体問題の例題 (4)

(1) **物体 1，2 に関する運動方程式を立てよ．**

時刻 t における，ばねの伸びは $x_2(t) - x_1(t) - \ell$ と表される．すると，物体 1 の運動方程式は,

$$m_1 \ddot{x}_1 = \underbrace{k(x_2(t) - x_1(t) - \ell)}_{\text{内力}} \tag{17}$$

物体 2 の運動方程式は,

$$m_2 \ddot{x}_2 = \underbrace{-k(x_2(t) - x_1(t) - \ell)}_{\text{内力}} \underbrace{+F}_{\text{外力}} \tag{18}$$

となる．

3.3. 2 体問題の例題 (5)

(2) 時刻 t における 2 つの物体の重心座標 $x_{\mathrm{G}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$，重心速度 $v_{\mathrm{G}} = \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m_1 + m_2}$ を t の関数として表せ．[ヒント：重心座標，重心速度の初期条件は，$x_{\mathrm{G}}(0) = \frac{m_1 x_1(0) + m_2 x_2(0)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 x_0}{m_1 + m_2}$，$v_{\mathrm{G}}(0) = \frac{m_1 \dot{x}_1(0) + m_2 \dot{x}_2(0)}{m_1 + m_2} = 0$ である．]

2 つの物体の運動方程式を足し合わせると，

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_G = F \tag{19}$$

を得る．これは等加速度運動を表すので，

$$\dot{x}_{\mathrm{G}} = \frac{Ft}{M} \tag{20}$$

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{m_2 x_0}{M} + \frac{Ft^2}{2M} \tag{21}$$

を得る．ここで $M = m_1 + m_2$，初期条件 $x_G(0) = \frac{m_2 x_0}{M}$，$v_G(0) = 0$ を用いた．

3.3. 2 体問題の例題 (6)

(3) 物体 1，2 の相対座標 $x_{12}(t) = x_1(t) - x_2(t)$ に関する運動方程式を立て，解 $x_{12}(t)$ を求めよ．

物体 1 の運動方程式，物体 2 の運動方程式のそれぞれに m_2，m_1 を掛けて，それぞれ差し引きすると，

$$m_1 m_2(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = (m_1 + m_2)k(x_2(t) - x_1(t) - \ell) - m_1 F \tag{22}$$

となる．両辺を $M = m_1 + m_2$ で割ると

$$\begin{aligned} \mu \ddot{x}_{12} &= -k(x_{12}(t) + \ell) - \frac{m_1}{M} F \\ &= -k(x_{12}(t) + \ell + \frac{m_1 F}{Mk}) \end{aligned} \tag{23}$$

となる．ここで μ は換算質量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ である．いま，$X(t) = x_{12}(t) + \ell + \frac{m_1 F}{Mk}$ とすれば，

$$\mu \ddot{X}(t) = -kX(t) \tag{24}$$

3.3. 2 体問題の例題 (7)

となるので，$X(t)$ は，振動数 $\omega=\sqrt{\frac{k}{\mu}}$ の単振動となる．いま，初期条件は $X(0)=-x_0+\ell+\frac{m_1F}{Mk}$，$\dot{X}(0)=0$ となるので，単振動の特殊解は，

$$X(t)=X(0)\cos(\omega t)=(-x_0+\ell+\frac{m_1F}{Mk})\cos(\omega t) \tag{25}$$

となる．したがって，$x_{12}(t)$ に関する特殊解は

$$\begin{aligned} x_{12}(t) &= (-x_0+\ell+\frac{m_1F}{Mk})\cos(\omega t)-\ell-\frac{m_1F}{Mk} \\ &= -x_0+(-x_0+\ell+\frac{m_1F}{Mk})(\cos(\omega t)-1) \end{aligned} \tag{26}$$

を得る．

3.3. 2 体問題の例題 (8)

(4) 時刻 t における，位置座標 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ を t の関数で表せ． $x_1(t)$ と $x_2(t)$ は重心座標と相対座標を用いることで

$$\boxed{x_1(t) = x_G - \frac{m_2}{M}(x_2(t) - x_1(t)) = x_G + \frac{m_2 x_{12}(t)}{M}} \tag{27}$$

$$\boxed{x_2(t) = x_G + \frac{m_1}{M}(x_2(t) - x_1(t)) = x_G - \frac{m_1 x_{12}(t)}{M}} \tag{28}$$

となる．よって，式 (21)，(26) の結果を代入すると，

$$x_1(t) = \frac{Ft^2}{2M} + \frac{m_2}{M}(x_0 - \ell - \frac{m_1 F}{Mk})(1 - \cos(\omega t)) \tag{29}$$

$$x_2(t) = x_0 + \frac{Ft^2}{2M} - \frac{m_1}{M}(x_0 - \ell - \frac{m_1 F}{Mk})(1 - \cos(\omega t)) \tag{30}$$

を得る．この運動は，重心の等加速度運動に対して，相対運動の単振動（周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)k}}$）を合成した解になっている．

3.4. 運動量と力積

♣ 運動量と力積 [教科書 p79-83]

- これまで物体に一定の力が働く状況を扱ってきた．ここでは，バットでボールを打つときの様に，ごく短時間の接触による物体の運動の変化について扱う．
- ここでは，物体 1 が別の物体 2 と衝突する際の運動方程式を考える．
- 衝突はごく短時間でも，その間物体間には作用・反作用の力が働くのでそれぞれの運動方程式は，

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_{21} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_{12} \end{aligned} \tag{31}$$

  となる．
- ただし，物体には外力は働いていない場合を考える．ここで，時間区間 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ において，上記運動方程式を積分すると，

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1(t_0+\Delta t) - \mathbf{p}_1(t_0) &= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \mathbf{F}_{21} \mathrm{d}t' \sim \mathbf{F}_{21} \Delta t \\ \mathbf{p}_2(t_0+\Delta t) - \mathbf{p}_2(t_0) &= -\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \mathbf{F}_{21} \mathrm{d}t' \sim -\mathbf{F}_{21} \Delta t \end{aligned} \tag{32}$$

3.4. 運動量と力積 (2)

- ここで，$\mathbf{p}_k = m_k \dot{\mathbf{r}}_k$ であり物体 $k(=1,2)$ の運動量を表す．Δt は十分短いとし，時間区間において $\mathbf{F}_{21}$ は一定であるとした．
- ここで出てきた量 $\mathbf{F}_{21}\Delta t$ を力積という．
- この様に，力積により各物体の運動量が変化する様子が見て取れる．
- 次に式 (32) の 2 つの式を足し合わせると，

$$\mathbf{p}_1(t_0+\Delta t) - \mathbf{p}_1(t_0) + \mathbf{p}_2(t_0+\Delta t) - \mathbf{p}_2(t_0) = \mathbf{0} \tag{33}$$

となり，これを同時刻に関して整理すると，

$$\boxed{\mathbf{p}_1(t_0) + \mathbf{p}_2(t_0) = \mathbf{p}_1(t_0+\Delta t) + \mathbf{p}_2(t_0+\Delta t)} \tag{34}$$

となる．この式は運動量保存則に他ならない．（外力が働かず，作用・反作用の力のみが働く状況では運動量は保存する．）

- 次に，簡単のため，衝突前の各物体の速度を v_1，v_2 衝突後の速度を u_1，u_2 と置こう．

3.4. 運動量と力積 (3)

- この時，運動量保存則は

$$\boxed{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2} \tag{35}$$

となる．

- これから，衝突前の各物体の速度を条件として，衝突後の速度を求めよう．
- しかし式 (35) だけでは，衝突後の速度は定まらない．
- 実際，物体の衝突後の速度は，衝突前の速度が等しくても，物体が金属である場合と，粘土である場合で大きく異なることを，我々は経験的によく知っている．
- ここでは，物体固有の量である跳ね返り度合いの指標を与えることで衝突後の速度を算出することができる．
- この様な跳ね返りの指標である反発係数を

$$\boxed{e = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}} \tag{36}$$

の様に与えよう．

- 特に，$e = 1$ の場合を完全弾性衝突，$e < 1$ の場合を非弾性衝突という．

3.4. 運動量と力積 (4)

- 金属の様に固い物体の場合反発係数は $e=1$ に近く，また粘土の様に衝突後一体化してしまう場合 $(u_1-u_2=0)$ は $e=0$ を示す．
- また，式 (35)，(36) を連立させれば，衝突後の速度は，

$$\boxed{u_1 = v_1 + \frac{m_2(1+e)(v_2-v_1)}{m_1+m_2}} \tag{37}$$

$$\boxed{u_2 = v_2 - \frac{m_1(1+e)(v_2-v_1)}{m_1+m_2}} \tag{38}$$

  を得る．
- $e=1$ の時のみ力学的エネルギーが保存し，$e<1$ においては力学的エネルギーを散逸する（失う）．

3.4. 運動量と力積 (5)

- 実際，$e = 1$ の時，衝突後の力学的エネルギーは，

$$\begin{aligned} \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} &= \frac{m_1}{2}\left(v_1 + \frac{2m_2(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(v_2 - \frac{2m_1(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}\right)^2 \\ &= \text{(中略: 式を展開し整理するだけ)} \\ &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \end{aligned} \tag{39}$$

となり，衝突前の力学的エネルギーが保存している様子が確かめられる.

第 12 回講義資料目次

4.1. 第 12 回講義のまとめ

多質点系の力学について考察した（今回は主に 2 体問題）

- 2 体問題は，重心運動と相対運動に分解すると見通しがよくなる．
- 内力のみの系は運動量が保存する．
- 反発係数が 1 の場合，力学的エネルギーは保存する．反発係数が 1 未満の場合は力学的エネルギーを散逸する．

次回予告： 多質点系の回転運動と剛体運動のさわり

4.2. 第 11・12 回レポート課題について

- 当科目 NUCT 内「課題」欄に、「第 11・12 回レポート課題」を用意しました．その中に，問題兼解答用紙をアップしましたので，各自印刷し，所定欄に解答の上，電子化した解答のスキャンを同ページ所定欄に添付してください．
- 解答用紙の印刷が諸事情により難しい場合は，通常のレポート用紙に解答してもよいこととします．
- 採点結果は，NUCT を通して各人へお知らせします．
- 添付ファイルは 1 つにまとめていることが望ましいです。
- ファイル名は 第 11・12 回レポート課題 (氏名).pdf と命名してください．
- スキャン方法の詳細は NUCT のフォーラムを参照ください。