物理学基礎 I（医・医）第 11 回
相対運動と慣性力

川﨑猛史

名古屋大学理学部物理学科

Last update：July 2, 2021

第 11 回講義資料目次

第 11 回講義資料目次

1. 講義のスケジュール

♣ スケジュール更新（6/18）

1. 4/16：第 1 回
2. 4/23：第 2 回 (第 1・2 回課題公開)
3. 4/30：第 3 回 (第 1・2 回課題提出期限)
4. 5/07：第 4 回 (第 3・4 回課題公開)
5. 5/14：第 5 回 (第 3・4 回課題提出期限)
6. 5/21：第 6 回 (第 5・6 回課題公開)
7. 5/28：第 7 回 (第 5・6 回課題提出期限)
8. 6/04：第 8 回 (第 7・8 回課題公開)
9. 6/11：名大祭のため休講
10. 6/18：第 9 回 (第 7・8 回課題提出期限)
11. 6/25：第 10 回　(第 9・10 回課題公開)
12. **7/02：第 11 回 (第 9・10 回課題提出期限)**
13. 7/09：第 12 回 (第 11・12 回課題公開)
14. 7/16：第 13 回 (**第 11・12 回課題提出期限**)
15. 7/17 補講日：第 14 回 (第 13・14 回課題公開)
16. 7/23：オリンピックのため休講　**(後日指定) 第 13・14 回課題提出期限**
17. 7/30：なし
18. 8/6（予定）：　期末試験

第 11 回講義資料目次

2. 今回の内容

♣ 本講義内容（期末試験範囲予定）[教科書 p31-p103(但し p93 以降はごく基本的な内容に限る)]

- 導入：物理学とは.
- 質点の運動学：質点の位置，速度，加速度の関係，ならびに，これらの微分（積分）による表現方法を学ぶ。特に，自由落下，斜方投射，等速円運動などを具体的に扱う。
- 運動の原因となる「力」を導入する.
- 「運動の３法則」(慣性の法則，運動方程式，作用・反作用の法則）を導入し，様々な運動を運動方程式を用いて普遍的に表現する.
- 質点の運動方程式の解法：運動方程式を様々なタイプの微分方程式に落とし込み，これらを具体的に解く。特に，減衰運動，単振動，減衰振動，強制振動などを扱う。
- エネルギーとその保存則：仕事とエネルギーの関係を考察し，それらの具体的な問題を扱う.
- 中心力運動：重力系を例に，中心力による質点の軌道を考察する.
- 相対運動と慣性力：座標変換と相対運動を扱い，慣性力を導入する.
- 多質点系の並進運動：重心運動と相対運動に分けて考える.
- 多質点系の回転運動：慣性モーメントの導入.
- 剛体の動力学：慣性モーメントを用いて回転する剛体運動の簡単な例を扱う.

第 11 回講義資料目次

3.1. 相対運動とガリレイ変換

♣ 相対運動とガリレイ変換 [教科書 p69 〜参照]

- 物体の運動は座標系を定めて初めて意味をもつ.
- つまり位置，速度，加速度はそれぞれの座標系に対し定義される.
- 特に，ニュートン第一法則（慣性の法則）が成り立つ座標系を「慣性系」という（第 2 回講義資料図 3 参照）.
- 慣性系はただ一つではなく，等速直線運動する座標系も慣性系であることを以下示す.
- いま，静止座標系 $O-xyz$ に対して，$\mathbf{V}=(V_x,V_y,V_z)$ で等速直線運動する座標系 $O'-x'y'z'$ を考える（図 **1**）.

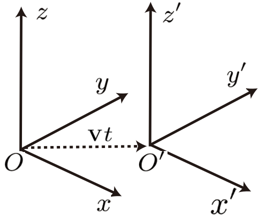


図 **1**: 座標系 $O-xyz$ と $O'-x'y'z'$ の関係.

3.1. 相対運動とガリレイ変換 (2)

- ある点の位置を，各座標系から測った際，その位置座標をそれぞれ $\mathbf{r}=(x,y,z)$, $\mathbf{r}'=(x',y',z')$ とすると，これらの関係は，$\boxed{\mathbf{r}'(t)=\mathbf{r}(t)-\mathbf{V}t}$ となる．
- 各成分ごとに見れば

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)-V_x t \\ y'(t) &= y(t)-V_y t \\ z'(t) &= z(t)-V_z t \end{aligned} \tag{1}$$

という関係を得る．

- ここで，座標系 $O'-x'y'z'$ は時間 0 では静止座標系 $O-xyz$ と一致し，時間区間 $[0,t]$ において移動したとする．
- この様な静止座標系から等速直線運動する座標系への座標変換を $\boxed{\text{ガリレイ変換}}$ という（初期位置，時間区間は任意）．

3.1. 相対運動とガリレイ変換 (3)

- 以下，ガリレイ変換について詳しく見ていく．いま，式 (1) 両辺を時間で微分すれば，

$$\dot{x}'(t) = \dot{x}(t) - V_x$$
$$\dot{y}'(t) = \dot{y}(t) - V_y$$
$$\dot{z}'(t) = \dot{z}(t) - V_z \tag{2}$$

を得る．

- 上式をさらに時間で微分すれば，

$$\ddot{x}'(t) = \ddot{x}(t)$$
$$\ddot{y}'(t) = \ddot{y}(t)$$
$$\ddot{z}'(t) = \ddot{z}(t) \tag{3}$$

となる．

- 物体には外力 $\mathbf{F}$ が掛っているとすればニュートンの運動方程式は，各座標系に対し，

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$
$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} \tag{4}$$

となる．

3.1. 相対運動とガリレイ変換 (4)

- すると，加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ や $\ddot{\mathbf{r}}'$ が合力 $\mathbf{F}$ に比例するので，ニュートン第 1 法則がいずれの座標系においても成立する．
- つまり，静止座標系とそれにガリレイ変換を施した座標系は慣性系である．
- このように，座標系にガリレイ変換を施しても運動方程式が普遍の保たれる性質をガリレイの相対性原理という．

- 次に，速度 $\mathbf{V}$ が一定でない場合を考える．
- すると，座標変換は $\mathbf{V}$ の時間積分を用いて，

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= x(t) - \int_0^t V_x(t')\mathrm{d}t' \\
y'(t) &= y(t) - \int_0^t V_y(t')\mathrm{d}t' \\
z'(t) &= z(t) - \int_0^t V_z(t')\mathrm{d}t'
\end{aligned}
\tag{5}
$$

を得る．

3.1. 相対運動とガリレイ変換 (5)

- これを時間に対して 2 回微分すれば，それぞれの座標系における加速度は，

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}'(t) &= \ddot{x}(t) - \dot{V}_x(t)\\
\ddot{y}'(t) &= \ddot{y}(t) - \dot{V}_y(t)\\
\ddot{z}'(t) &= \ddot{z}(t) - \dot{V}_z(t)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

である．

- いま，$\mathbf{A} = (\dot{V}_x(t), \dot{V}_y(t), \dot{V}_z(t))$ とすれば，運動方程式はそれぞれの系において

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F}\\
m\ddot{\mathbf{r}}' &= \mathbf{F} - m\mathbf{A}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

となる．

- この様に，座標系 $O' - x'y'z'$ は，加速度が合力に比例しなくなる．この様な系を非慣性系という．

3.2. 見かけの力 (慣性力)

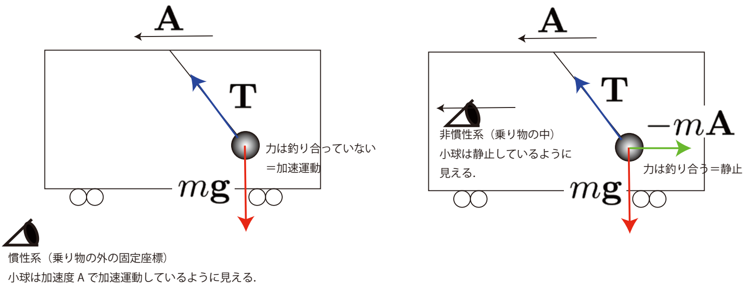
♣ 見かけの力 (慣性力)[教科書 p71-74 参照]

- 次に，加速度 $\mathbf{A}$ で移動する乗り物の中の振り子の運動を考えよう（図 **2**）.
- 乗り物の外から見れば，重りは加速度 $\mathbf{A}$ で移動しているので，運動方程式は，

$$\boxed{m\mathbf{A} = m\mathbf{g} + \mathbf{T}} \tag{8}$$

である.

- ここで，重力加速度は $\mathbf{g}$，糸からの張力は $\mathbf{T}$ である.



3.2. 見かけの力 (慣性力) (2)

図 2: 加速度 $\mathbf{A}$ で加速運動する乗り物の中の物体の運動．(左) 乗り物の外に固定座標を定義した際，重りは加速度 $\mathbf{A}$ で加速運動し，加速度が合力に比例するので慣性系といえる．（右）乗り物の中に座標系を定義した際，重りは静止しているように見えるので見かけの力 $-m\mathbf{A}$ を導入すれば全ての力の和は $\mathbf{0}$ になる．

- この様に乗り物の外の座標系においては，重りの加速度 $\mathbf{A}$ が重りの働く合力に比例するので慣性系である．
- 一方，乗り物の中から振り子の重りの運動を見ると，斜めに傾きながら静止しているように見える．
- このことは，式 (8) を以下の様に変形させることにより解釈できる．

$$\boxed{\mathbf{0} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} \underbrace{-m\mathbf{A}}_{\text{慣性力}}} \tag{9}$$

- ここで，左辺は加速度が $\mathbf{0}$ であるので力の釣り合いを表し，特に右辺においては，もともと重りに働く力 $m\mathbf{g} + \mathbf{T}$ に加え，力 $-m\mathbf{A}$ が掛かっているように解釈できる．
- $-m\mathbf{A}$ の様な力は実際に掛かる力ではなく見かけの力であり，「慣性力」という．
- また，式 (9) は物体の加速度が物体に掛かる実際の合力とは比例関係にないため，非慣性系の運動を表す．

第 11 回講義資料目次

4.1. 遠心力

♣ 遠心力 [教科書 p73]

- 前項においては並進運動する座標系での慣性力を扱った．
- ここでは，回転する座標系から物体の運動を観測した時に生じる慣性力を考える．
- まずは簡単の為に，回転座標系からみて物体が静止している場合を扱う（物体と一緒に回転する座標系をとる）．
- その例として，長さ ℓ の糸の一端を固定し他端に質量 m の物体を取り付け，これを等角速度 ω で回転運動させた時の物体の運動を，慣性系と非慣性系の双方から考察する．
- まず，動径方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_r$ とすれば，物体の位置は $\boxed{\mathbf{r} = \ell \mathbf{e}_r}$ である．
- 接線方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_\theta$ とすると，物体の速度や加速度は，

$$\dot{\mathbf{r}} = \ell\omega\mathbf{e}_\theta = v_\theta \mathbf{e}_\theta \tag{10}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\ell\omega^2\mathbf{e}_r = -\frac{v_\theta^2}{\ell}\mathbf{e}_r \tag{11}$$

となる．

4.1. 遠心力 (2)

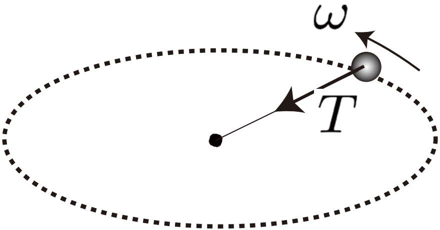


図 3: 長さ ℓ の糸の一端を固定し他端に質量 m の重りを取り付けこれを等角速度 ω で回転運動させた系の設定図.

- いま，物体に働く力は糸からの張力 $-T\mathbf{e}_r(T > 0)$ のみである.

4.1. 遠心力 (3)

- すると，物体の運動方程式は，動径方向にしか力が働かないことから，

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\ell\omega^2\mathbf{e}_r = -\frac{mv_\theta^2}{\ell}\mathbf{e}_r = -T\mathbf{e}_r \tag{12}$$

(13)

[MEMO: 7/2 訂正：**(12)** 式の赤字の m が抜けていました。それから **(13)** 式は存在しません。**]**

- すなわち，高校物理でお馴染み，円運動における向心方向の運動方程式

$$\frac{mv_\theta^2}{\ell} = T \tag{14}$$

をえる．

- 一方，物体と一緒に回転する座標系 $\mathbf{r}'$ を考えよう．この座標系では，
- 物体は常に静止しているように見える．

4.1. 遠心力 (4)

- すると，式 (13) の動径方向における運動方程式を左辺を移項すれば，

$$0 = T \underbrace{- \frac{mv_\theta^2}{\ell}}_{\text{慣性力：遠心力}} \tag{15}$$

となる．

- いま，$-\frac{mv_\theta^2}{\ell}$ を慣性力とすれば，物体に掛かる力は釣り合い，静止しているように見える．
- この様に，回転座標系において**動径方向に掛かる慣性力を遠心力という**．
- 遠心力はカーブに差し掛かった乗り物の中で感じる外に押し出されるように感じる力のことである．
- もし物体に外力が掛かっていない場合，回転系では，物体は外にはじきだされることがわかる（**第 9・10 回レポート課題第 2 問を参照**）．

4.2. コリオリ力

♣ コリオリ力 [教科書 p73]

- 回転系では遠心力のほかにコリオリ力という見かけの力が働く．
- いま，等角速度 ω で回転する円盤上を，円盤とともに回転する座標系において，速度 $\mathbf{v}'$ で物体が移動すると，半時計まわりの回転の場合，$\mathbf{v}'$ の方向（進行方向）と常に右側垂直方向に大きさ $\boxed{2m\omega v'}$ の見かけ上の力が働く (後で証明する)． これがコリオリ力である．
- 台風の渦は，コリオリ力の好例である．
- 地球は角速度 ω で自転する為，地球上の大気や雲の振る舞いは非慣性系での振る舞いとみなすことができる．
- もし，地球の自転がなければ，大気は，台風の外側から内側に流れる．
- これに対し地球が自転すると，北半球の場合，等緯度面においては進行方向から右方向に大気がコリオリ力を受け，大気の流れが逸れていく． この様にして渦が形成される (図 **4**)．

4.2. コリオリ力 (2)

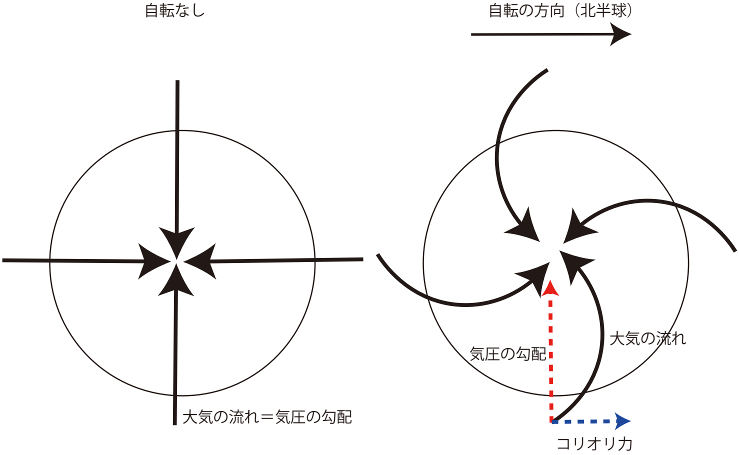


図 4: 台風の渦形成の原理．自転がないと（左図），大気は常に台風の中心へまっすぐ流れる．自転があると，コリオリ力により，大気の流れが進行方向右方向にずれる（右図：北半球の場合）．

4.3. 2 次元回転座標系

♣ 2 次元回転座標系 [講義オリジナル]

- 以下，2 次元回転座標系を用いて，遠心力とコリオリ力を統一的に導出する．
- いま，等角速度 ω で回転する回転盤上における物体の位置を，回転盤外の固定座標系から測ると $\boxed{\mathbf{r} = (x, y)}$，回転盤と一緒に回転する回転座標系から測ると $\boxed{\mathbf{r}' = (x', y')}$ と表されるものとする．ただし共に回転盤の中心を原点とする（図 **5**）.
- いま，物体に外力が働いている状況を考える．
- この外力は座標系によって見え方が異なり，固定座標系では $\boxed{\mathbf{F} = (F_x, F_y)}$，回転座標系では $\boxed{\mathbf{F}' = (F'_x, F'_y)}$ と見えるものとする．（図 **6**）
- いま，固定座標系を用いて，運動方程式を立てると，

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}} \tag{16}$$

  となる．
- 一方，同じ位置でも固定座標系 $\mathbf{r} = (x, y)$ を用いて表現したものは，回転座標系 $\mathbf{r}'$ を用いたものに比べ，相対的に必ず角度 ωt だけ回転しているようにみえる．
- つまり $\mathbf{r}'$ を ωt 回転させれば $\mathbf{r}$ に変換される（図 **5**）.

4.3. 2 次元回転座標系 (2)

- 同様に，外力についても $\mathbf{F}'$ を ωt 回転させれば $\mathbf{F}$ に変換される（図 **6**）.

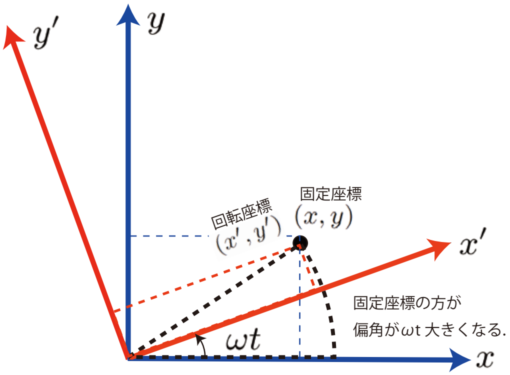


図 **5**: 固定座標系 (x, y) と回転座標系 (x', y') の関係．同じ点に対して固定座標系の方が ωt だけ偏角が大きくなる．

4.3. 2 次元回転座標系 (3)

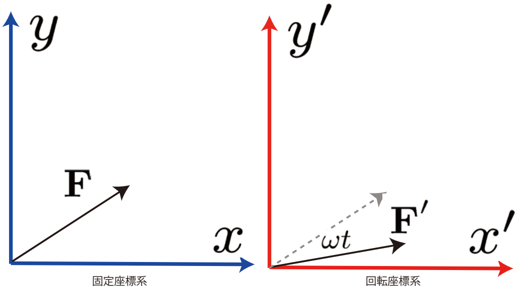


図 6: 同じ力を固定座標系と回転座標系で見た時の違いについて．回転座標系でみると偏角が ωt 小さくなったように見える．

- これらの関係を表すために，複素数を用いて回転変換を行おう（回転行列を用いてもよいが，複素数を用いるのが一番計算が簡単だと思う）．

4.3. 2 次元回転座標系 (4)

- 固定座標系を用いた複素数 $z = x + iy$，回転座標系を用いた複素数 $z' = x' + iy'$ を定義すると，z の複素数平面上の偏角は，z' のそれにくらべて，ωt だけ大きいので，複素数の回転変換に関する性質を用いると，これらの関係は

$$\boxed{z = \{\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\}z'} \tag{17}$$

となる．

- この式は，オイラーの関係式 $\cos(\omega t) + i\sin(\omega t) = e^{i\omega t}$ を用いれば，

$$\boxed{z = e^{i\omega t}z'} \tag{18}$$

となり以下の微分の計算が容易になる．ここで両辺を時間で微分すれば

$$\dot{z} = (i\omega)e^{i\omega t}z' + e^{i\omega t}\dot{z}' \tag{19}$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 e^{i\omega t}z' + 2(i\omega)e^{i\omega t}\dot{z}' + e^{i\omega t}\ddot{z}' \tag{20}$$

を得る．

4.3. 2 次元回転座標系 (5)

- いま，式 (20) の両辺に m を掛けると，複素数の実部と虚部はそれぞれ，**固定座標系の x 成分，y 成分の運動方程式**となるので，

$$\boxed{m\ddot{z} = F_x + iF_y = -m\omega^2 e^{i\omega t} z' + 2m(i\omega)e^{i\omega t}\dot{z}' + me^{i\omega t}\ddot{z}'} \tag{21}$$

となる．

- いま，両辺を $e^{i\omega t}$ で割ると，

$$(F_x + iF_y)e^{-i\omega t} \quad = \quad -m\omega^2 z' + 2m(i\omega)\dot{z}' + m\ddot{z}' \tag{22}$$

となる．

- ここで式 (22) の右辺第 2 項で $i\dot{z}' = i(\dot{x}' + i\dot{y}') = (-\dot{y}' + i\dot{x}')$ となることに注意し，また，$(F_x + iF_y)e^{-i\omega t} = F'_x + iF'_y$ とすれば，実部と虚部はそれぞれ，

$$F'_x \quad = \quad -m\omega^2 x' - 2m\omega\dot{y}' + m\ddot{x}' \tag{23}$$
$$F'_y \quad = \quad -m\omega^2 y' + 2m\omega\dot{x}' + m\ddot{y}' \tag{24}$$

を得る．

- これより，全ての変数を回転座標の関数で表すことができた．

4.3. 2 次元回転座標系 (6)

- 以上をまとめると，回転座標系における運動方程式は，非慣性系であるので，外力に加えて見かけの力（遠心力とコリオリ力）が加わり，

$$\begin{aligned} m\ddot{x}' &= \underbrace{F'_x}_{\text{外力}} + \underbrace{m\omega^2 x'}_{\text{遠心力}} \underbrace{+2m\omega\dot{y}'}_{\text{コリオリ力}} \\ m\ddot{y}' &= \underbrace{F'_y}_{\text{外力}} + \underbrace{m\omega^2 y'}_{\text{遠心力}} \underbrace{-2m\omega\dot{x}'}_{\text{コリオリ力}} \end{aligned} \tag{25}$$

となる．

- これをベクトル表記すると，

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}}' = \underbrace{\mathbf{F}'}_{\text{真の力}} + \underbrace{m\omega^2\mathbf{r}'}_{\text{遠心力}} \underbrace{+2m\omega\mathbf{v}'_\perp}_{\text{コリオリ力}}} \tag{26}$$

を得る．

- ここで，$\mathbf{v}'_\perp = (\dot{y}', -\dot{x}')$（進行方向 $\mathbf{v}' = (\dot{x}', \dot{y}')$ に対して右向きに垂直回転したベクトル）である．

4.3. 2 次元回転座標系 (7)

以下，具体な回転座標系の問題に適用してみる．

例１：等速直線運動を回転座標系から見る

- 図 **7** の様に，摩擦のない回転円盤上を慣性系（固定座標系）から見た時，物体は等速直線運動しているとする．
- つまり物体には何も力は働いていない．
- 一方，同じ現象を台の上から観察すると，物体は進行方向に対し，右側に逸れていく．
- この様に，右側に軌道が逸れる為には，何かしらの力が必要である．この力が慣性力であり，具体的には遠心力とコリオリ力である．

4.3. 2 次元回転座標系 (8)

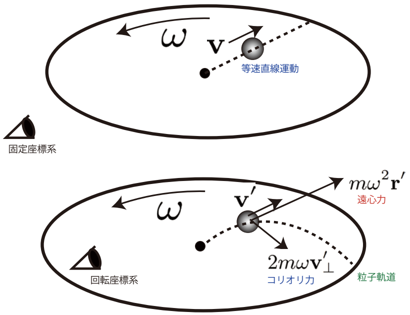


図 7: 固定座標系（上）ではまっすぐ進む等速直線運動の場合，回転座標系（下）においては，慣性力（遠心力とコリオリ力）によって，軌道は進行方向に対して右方向に逸れていく．但し，外力はかかっていないとする．これの現象を平易に言い換えると，台の外から物体の運動を見ると等速直線運動であるが，台の上から同じ運動を見ると，進行方向に対し右側に逸れていくように見える．右側に逸れる為には何かしらの力が必要で，これこそが慣性力である．

4.3. 2 次元回転座標系 (9)

例 2：第 9・10 回レポート課題第 2 問

- レポート課題では，慣性系の運動方程式を用いて回転する物体の運動を解析した．
- 一方，同じ問題を遠心力とコリオリ力を導入した非慣性系の運動方程式を用いても解くことができるので確かめてみよう．
- ここで，棒と平行方向に x' 軸，垂直方向に y' 軸をとり，これらの軸は棒とともに角速度 ω で回転するものとする．

- 解答
  - 外力は垂直抗力のみであり，非慣性系において測ると $\mathbf{N}' = (0, N_\theta)$ である．
  - $y' = 0$，$\dot{y}' = 0$，$\ddot{y}' = 0$ の条件を，式 (25) に代入すると，非慣性系の運動方程式は，成分ごとに

$$m\ddot{x}' = \underbrace{0}_{\text{外力}} + \underbrace{mx'\omega^2}_{\text{遠心力}} + \underbrace{0}_{\text{コリオリ力}} \tag{27}$$

$$\underbrace{0}_{\text{加速度} = 0} = \underbrace{N_\theta}_{\text{外力}} + \underbrace{0}_{\text{遠心力}} \underbrace{-2m\omega\dot{x}'}_{\text{コリオリ力}} \tag{28}$$

である．

4.3. 2 次元回転座標系 (10)

- いま，式 (27) は，2 階同時微分方程式であるので，一般解は，

$$x'(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \tag{29}$$

となる．ここで初期条件 $x'(0) = a$，$\dot{x}'(0) = 0$ を代入すると，

$$x'(0) = A + B = a \tag{30}$$
$$\dot{x}'(0) = \omega(A - B) = 0 \tag{31}$$

より，$A = B = \frac{a}{2}$ となる．よって，特殊解

$$x'(t) = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \tag{32}$$

を得る．垂直抗力は，式 (28) より

$$N_\theta = 2m\omega\dot{x}' = ma(e^{\omega t} - e^{-\omega t})\omega^2 \tag{33}$$

となる．これらは，慣性系で解いた時の結果と同等である．

第 11 回講義資料目次

5.1. 第 11 回講義のまとめ

慣性系間の変換であるガリレイ変換および，非慣性系における慣性力を導入した．

- 等速運動する座標系は慣性系である (ガリレイ変換).
- 加速運動する座標系は非慣性系であり，物体に見かけの力である慣性力が働いているように見える．
- 回転座標系は非慣性系であり，動径方向に遠心力，接線方向にコリオリ力が働く．

次回予告： 多質点系力学：重心運動と相対運動（**2** 体運動）