物理学基礎 I（医・医）第 10 回
中心力運動

川﨑猛史

名古屋大学理学部物理学科

Last update：June 25, 2021

第 10 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 今回の内容

3 中心力
- 中心力の性質
- 中心力系における角運動量保存則
- 万有引力
- 重力ポテンシャル
- ケプラーの法則
- ケプラーの法則の証明

4 補遺：ベクトルの外積

5 まとめ
- 第 10 回講義のまとめ
- 第 9・10 回レポート課題について

第 10 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 今回の内容

3 中心力
- 中心力の性質
- 中心力系における角運動量保存則
- 万有引力
- 重力ポテンシャル
- ケプラーの法則
- ケプラーの法則の証明

4 補遺：ベクトルの外積

5 まとめ
- 第 10 回講義のまとめ
- 第 9・10 回レポート課題について

1. 講義のスケジュール

♣ スケジュール更新（6/18）

1. 4/16：第 1 回
2. 4/23：第 2 回 (第 1・2 回課題公開)
3. 4/30：第 3 回 (第 1・2 回課題提出期限)
4. 5/07：第 4 回 (第 3・4 回課題公開)
5. 5/14：第 5 回 (第 3・4 回課題提出期限)
6. 5/21：第 6 回 (第 5・6 回課題公開)
7. 5/28：第 7 回 (第 5・6 回課題提出期限)
8. 6/04：第 8 回 (第 7・8 回課題公開)
9. 6/11：名大祭のため休講
10. 6/18：第 9 回 (第 7・8 回課題提出期限)
11. **6/25：第 10 回　(第 9・10 回課題公開)**
12. 7/02：第 11 回 (**第 9・10 回課題提出期限**)
13. 7/09：第 12 回 (第 11・12 回課題公開)
14. 7/16：第 13 回 (**第 11・12 回課題提出期限**)
15. 7/17 補講日：第 14 回 (第 13・14 回課題公開)
16. 7/23：オリンピックのため休講　**(後日指定) 第 13・14 回課題提出期限**
17. 7/30：なし
18. 8/6（予定）：　期末試験

第 10 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 今回の内容

3 中心力
- 中心力の性質
- 中心力系における角運動量保存則
- 万有引力
- 重力ポテンシャル
- ケプラーの法則
- ケプラーの法則の証明

4 補遺：ベクトルの外積

5 まとめ
- 第 10 回講義のまとめ
- 第 9・10 回レポート課題について

2. 今回の内容

♣ 本講義内容（期末試験範囲予定）[教科書 p31-p103(但し p93 以降はごく基本的な内容に限る)]

- 導入：物理学とは.
- 質点の運動学：質点の位置，速度，加速度の関係，ならびに，これらの微分（積分）による表現方法を学ぶ。特に，自由落下，斜方投射，等速円運動などを具体的に扱う。
- 運動の原因となる「力」を導入する.
- 「運動の３法則」（慣性の法則，運動方程式，作用・反作用の法則）を導入し，様々な運動を運動方程式を用いて普遍的に表現する.
- 質点の運動方程式の解法：運動方程式を様々なタイプの微分方程式に落とし込み，これらを具体的に解く。特に，減衰運動，単振動，減衰振動，強制振動などを扱う。
- エネルギーとその保存則：仕事とエネルギーの関係を考察し，それらの具体的な問題を扱う.
- 中心力運動：重力系を例に，中心力による質点の軌道を考察する.
- 相対運動と慣性力：座標変換と相対運動を扱い，慣性力を導入する.
- 多質点系の並進運動：重心運動と相対運動に分けて考える.
- 多質点系の回転運動：慣性モーメントの導入.
- 剛体の動力学：慣性モーメントを用いて回転する剛体運動の簡単な例を扱う.

第 10 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 今回の内容

3 中心力
- 中心力の性質
- 中心力系における角運動量保存則
- 万有引力
- 重力ポテンシャル
- ケプラーの法則
- ケプラーの法則の証明

4 補遺：ベクトルの外積

5 まとめ
- 第 10 回講義のまとめ
- 第 9・10 回レポート課題について

3.1. 中心力の性質

♣ 中心力の性質 ~~[教科書 p60 参照]~~[講義オリジナル]

- 2 つまたはそれ以上の数の物体は，互いに離れていても厳密には力を及ぼしあう．
- この様な力を相互作用力と言う．
- 相互作用力は，電磁気力から，惑星間の万有引力に至るまで，空間スケールの異なる様々な系において普遍的にみられる．
- 相互作用力の多くが，今回扱う中心力の形をとる．

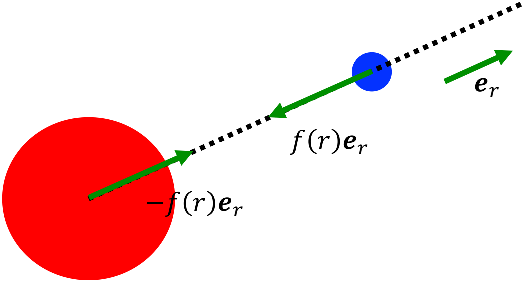

図 1: 2 つの物体の間の相互作用力

3.1. 中心力の性質 (2)

- 中心力とは，
  - 大きさ：ある物体を原点としたとき，相互作用する別の物体との距離 r にのみ依存
  - 向き：原点と相互作用する物体を結ぶ線に沿った方向を向く．
- 中心力を $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ とすれば,

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = f(r)\mathbf{e}_r} \tag{1}$$

となる．ここで，$f(r)$ は正負いずれも取ることができ，正の場合は反発する力（斥力），負の場合は引き合う力（引力）を表す.

- $\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r$ は動径方向の単位ベクトルである.

3.1. 中心力の性質 (3)

♣ 中心力は保存力 ~~[教科書 p60 参照]~~[講義オリジナル]

- 中心力は，保存力となることが知られている．
- このことは，$\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の回転をとることにより示すことができる．
- 実際，$\frac{\mathbf{r}}{r} = (x/r, y/r, z/r)$，$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (f(r)x/r, f(r)y/r, f(r)z/r)$ であることから，

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\ \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \left(\frac{\partial(f(r)\frac{z}{r})}{\partial y} - \frac{\partial(f(r)\frac{y}{r})}{\partial z}, \frac{\partial(f(r)\frac{x}{r})}{\partial z} - \frac{\partial(f(r)\frac{z}{r})}{\partial x}, \frac{\partial(f(r)\frac{y}{r})}{\partial x} - \frac{\partial(f(r)\frac{x}{r})}{\partial y}\right) \\ &= \frac{f'(r) - \frac{f(r)}{r}}{r^2}(yz - yz, xz - xz, xy - xy) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2}$$

となり，中心力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が保存力であることが示される．ここで $f'(r)$ は $f(r)$ の r 微分を表す．

- $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が保存力であれば，これに対応する位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）がベクトル $\mathbf{r}$ の関数 $U(\mathbf{r})$ として定義できる．

3.1. 中心力の性質 (4)

- 具体的には，前回までと同様に，力が保存力であれば，仕事積分は経路に依存しないことから，基準点を $\mathbf{r}_0$ とすれば，

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}' \tag{3}$$

となる．

- また，$\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は位置エネルギーの勾配として

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}) \tag{4}$$

3.2. 中心力系における角運動量保存則

♣ 中心力系における角運動量保存則 [教科書 p89-92]

- 中心力により運動する物体は，常に同一平面内を運動することが知られている．
- これを示すために，本講義資料補遺で補足するベクトルの外積を用いて，角運動量ベクトル $\mathbf{L}$ を

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (m\dot{\mathbf{r}})} \tag{5}$$

と定義する．

- 角運動量ベクトル $\mathbf{L}$ は，$\mathbf{r}$ と $\dot{\mathbf{r}}$ によって張られる平面に対し，垂直方向を向く．
- これを踏まえ，中心力で運動する物体の運動方程式の両辺に左から $\mathbf{r}$ の外積をとると，外積の性質：$\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ から，

$$\mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = \underbrace{\mathbf{r} \times f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}}_{=\mathbf{0}} \tag{6}$$

となる．

3.2. 中心力系における角運動量保存則 (2)

- 式 (6) 左辺は，外積の微分に関する性質 $\frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}}$（本講義資料補遺参照），$\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ となることに注意して，時間微分を外側に出すと

$$\mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) - \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}}}_{=\mathbf{0}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) \tag{7}$$

したがって，以上をまとめると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \tag{8}$$

をえる．

- これより，

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}} \tag{9}$$

- このことから，角運動量ベクトルは定数ベクトルであることがわかる．
- よって，常に，$\mathbf{r}$ と $\dot{\mathbf{r}}$ によって張られる平面は一定であることが分かる．

3.2. 中心力系における角運動量保存則 (3)

以下，G, M, m は正の定数とする万有引力 $f(r) = \frac{-GmM}{r^2}$ を出発点とし，中心力系の力学について概観する．

3.3. 万有引力

♣ 万有引力

- 1665 年，ニュートンは月の軌道を地球の周りに保つ力と，木から落ちるリンゴにかかる重力の根源が等しいことを発見した．
- これらの根源にある力が万有引力である．
- 万有引力は 2 つの物体間に働く力であり，いま 2 つの物体の質量をそれぞれ m_1，m_2 とし，2 つの物体の位置をそれぞれ $\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$ とする．動径方向を $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$，その大きさを r とすれば，質量 m_1 の物体から m_2 の物体に働く万有引力は，

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\mathbf{e}_r \tag{10}$$

  となる．
- ここで，$\mathbf{e}_r$ は動径方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$，$G$ は万有引力定数：$6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ である．万有引力定数は実験的に決定されている．

3.4. 重力ポテンシャル

♣ 重力ポテンシャル [教科書 p65-66]

- 万有引力は，中心力であるため，保存力である．したがって，位置エネルギーを定義できる．
- 万有引力に対応する位置エネルギーを重力ポテンシャルという．
- 質量 m_1 の物体によってもたらされる質量 m_2 の物体の重力ポテンシャル（以下単に重力ポテンシャルとよぶ）は，万有引力がする仕事を用いて定義するが，ここでの積分経路は，どのように取っても構わないので $\mathbf{e}_r$ 方向に限定しても一般性を失わない．(物体の位置座標を $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$) とおく．
- すると，重力ポテンシャルは，

$$U = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}' \tag{11}$$

である．

- いま，$\mathbf{F}(\mathbf{r}') = -\frac{Gm_1m_2}{r'^2}\mathbf{e}_r$，$\mathrm{d}\mathbf{r}' = \mathrm{d}r'\mathbf{e}_r$ であるので，それらの内積は，$-\frac{Gm_1m_2}{r'^2}\mathrm{d}r'$ である．したがって，

$$U = -\int_{r_0}^{r} -\frac{Gm_1m_2}{r'^2}\mathrm{d}r' \tag{12}$$

3.4. 重力ポテンシャル (2)

- ここで U は r の関数であるので $U(r)$ と書くことにする．いま，重力ポテンシャルの基準点を $r_0 = \infty$ にとると $U(r)$ は最も単純な形となり

$$U(r) = \int_{\infty}^{r} \frac{Gm_1m_2}{r'^2}\mathrm{d}r' = -\frac{Gm_1m_2}{r} \tag{13}$$

を得る．

- また，重力ポテンシャルの勾配を取ることにより，万有引力が

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}U(r) &= -U'(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) \\ &= -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) \\ &= -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\mathbf{e}_r \end{aligned} \tag{14}$$

となることが確かめられる．

3.5. ケプラーの法則

コペルニクスが 16 世紀に地動説を発表した後，ニュートンが万有引力を発見するまでの間，ティコ・ブラーエにによる天体の恒星や惑星に関する長年にわたる観測が行われた．そして，ティコ・ブラーエの膨大なデータを解析し，ケプラーが以下の法則を発見した．これが有名なケプラーの 3 法則である．

ケプラーの法則

- **第 1 法則:** 全ての惑星は太陽を焦点とする楕円軌道を描いている．
- **第 2 法則:** 太陽と惑星を結ぶ線が単位時間当たりに掃く面積は一定である．（面積速度一定の法則）
- **第 3 法則:** 惑星軌道の回転周期の 2 乗と長軸半径の 3 乗は比例する．

- これらの実験結果から導きだされた法則は，万有引力と運動方程式を用いて導くことができる．
- 特に，ケプラー第 2 法則は，角運動量保存則と同等である．
- 以下，中心力問題の例題として，ケプラー 3 法則を証明する．

3.6. ケプラーの法則の証明

[講義オリジナル] ケプラーの 3 法則を，第 2 法則，第 1 法則，第 3 法則の順に証明する．以下，太陽 (質量 M) の周りをまわる惑星 (質量 m) の軌道を考える．ただし $M \gg m$ であり，太陽は常に静止しているものとする．また，太陽の位置を原点とし，惑星の位置を $\mathbf{r}$ とする座標系をとる．

ケプラー第 2 法則の証明：

- まず準備として，前回少し触れた 2 次元極座標系を導入する．
- ここでは，動径方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta)$，接線方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$ とする．
- 位置ベクトル $\mathbf{r}$ を，

$$\boxed{\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r} \tag{15}$$

  とする．
- 前回は円運動を扱ったので，$r = \ell$ の様に r を定数とおいたが，今回は，動径 r が変化しうる状況を考える．

3.6. ケプラーの法則の証明 (2)

- いま，$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ となることに注意すると，速度は，

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta} \tag{16}$$

  を得る．

- さらに $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r$ となることに注意すれば，加速度は，

$$\boxed{\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta} \tag{17}$$

  である．

- 従って，惑星の運動方程式は，

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta} \tag{18}$$

  となる．

- いま，惑星に働く太陽との万有引力は中心力であるので，$\mathbf{e}_\theta$ 方向の力は 0 となる．

3.6. ケプラーの法則の証明 (3)

- よって

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = 0 \tag{19}$$

  を得る.
- $r \neq 0$ であるので，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = 0$ から，

$$\boxed{r^2\dot{\theta} = rv_\theta = h(\text{定数})} \tag{20}$$

  となる.
- つまり面積速度 $\frac{1}{2}rv_\theta$ は一定となり，ケプラー第 2 法則が証明された.
- なお，上で示した面積速度は図 **2** の青い領域を表す.

3.6. ケプラーの法則の証明 (4)

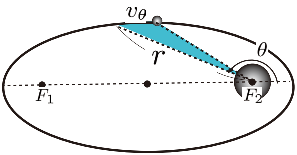

図 **2**: 青く塗った領域が面積速度.

ケプラー第 1 法則の証明

- 以下，惑星の軌道が楕円軌道であることを示す．ここでは，太陽と惑星の距離 r が θ の関数

$$\boxed{r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta}} \tag{21}$$

  となることを導く.
- この関数は，楕円，放物線，双曲線のいずれかの 2 次曲線となる.
- ここで，$\ell = a(1-\epsilon^2)$ は 2 次曲線における半直弦の長さ，ϵ は離心率である．特に $0 < \epsilon < 1$ の時，$\mathbf{r}$ の軌道は楕円となる (図 **3**).

3.6. ケプラーの法則の証明 (5)

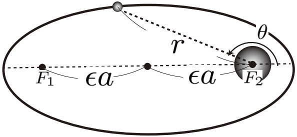

図 3: 楕円における極座標．F_1 と F_2 は楕円の焦点であり，座標の原点（太陽のある位置）を焦点とする．太陽と惑星を結んだ距離を r とする．またこれと長径のなす角度を θ とする．

- いま，惑星の運動方程式は，万有引力が中心力であることに注意すると

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{e}_r} \tag{22}$$

となる．

- これより，r は微分方程式

$$\boxed{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}} \tag{23}$$

の解となる．

3.6. ケプラーの法則の証明 (6)

- ここでケプラー第 2 法則で得られた定数:$h = r^2\dot{\theta}$ を用いることで $\dot{\theta}$ を消去することができ,

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \tag{24}$$

を得る.

- この微分方程式を解けば惑星軌道が得られる.
- ここでは微分方程式における変数が $1/u^2$ や $1/u^3$ という形を取り扱いづらいので, $r = \frac{1}{u}$ と変数変換してみよう.
- すると,

$$\frac{\mathrm{d}^2(\frac{1}{u})}{\mathrm{d}t^2} - h^2u^3 = -GMu^2 \tag{25}$$

となる.

- **いま,惑星の軌道を求めるために,$r = \frac{1}{u}$ の θ 依存性 (極方程式) を考える.**
- そのために, 式 (25) の左辺第 1 項の時間微分を, θ 微分に変換する.

3.6. ケプラーの法則の証明 (7)

- これを順を追って行うと，まず，1 階微分は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{u}\right)=\dot{\theta}\frac{-1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} \tag{26}$$

となる．ここではケプラー第 2 法則 $h=r^2\dot{\theta}=\dot{\theta}/u^2$ を用いた (h は定数).

- さらに t で微分すれば,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)=-h\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)=-h\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}=-h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} \tag{27}$$

となる.

- これを式 (25) に代入し，$u\neq 0$ のもと整理すると，u に関する微分方程式,

$$\boxed{h^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}=-h^2u+GM=-h^2\left(u-\frac{GM}{h^2}\right)} \tag{28}$$

を得る.

- これは単振動を表す微分方程式と同型である.

3.6. ケプラーの法則の証明 (8)

- よって，一般解は

$$\boxed{u = \frac{GM}{h^2} + A\cos(\theta + \theta_0)} \tag{29}$$

となる．

- ここで A と θ_0 は定数である．
- よって，

$$r = \frac{1}{\frac{GM}{h^2} + A\cos(\theta + \theta_0)} = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \frac{Ah^2}{GM}\cos(\theta + \theta_0)} \tag{30}$$

をえる．

- ここで，$\ell = a(1 - \epsilon^2) = \frac{h^2}{GM}$，$\epsilon = \frac{Ah^2}{GM}$ とし，θ_0 の値は，基準点（軸）をどこにとるかにより決まる．いま，$\theta_0 = 0$ を満たす軸を取ることにしよう．

3.6. ケプラーの法則の証明 (9)

- すると，

$$\boxed{r = \frac{\ell}{1 + \epsilon\cos\theta}} \tag{31}$$

となりケプラー第 1 法則が証明された．

- ここで得た関係式は，2 次曲線を表す．離心率 ϵ の値は，運動条件により様々な値を取るが，惑星や周期彗星の場合 $0 < \epsilon < 1$ を取り楕円軌道となる．
- 特に，太陽系の場合，$M \gg Ah^2/G$ であることが知られているので，$\epsilon \sim 0$ であることから，惑星の軌道は円に近い楕円軌道となる．
- なお，非周期彗星などは $\epsilon \geq 1$ を満たす放物線や双曲線軌道を取ることがあるが，その場合は太陽系外からやってきたものであり天体の力学的エネルギーは正の値を取る（無限遠で運動エネルギーをもつ）．

ケプラー第 3 法則の証明：

3.6. ケプラーの法則の証明 (10)

- 惑星の公転周期を T とするとき，楕円軌道の長径を a，短径を b，惑星の面積速度を v_{s} とすれば，

$$T = \pi ab/v_{\mathrm{s}} = \pi ab/(h/2) \tag{32}$$

となる．

- いま図 **3** 上図のように，楕円の幾何学的性質から，離心率 ϵ を用いることで，短径 b は，直角三角形の三平方の定理を用いることで

$$b = a\sqrt{1-\epsilon^2} \tag{33}$$

を得る．

3.6. ケプラーの法則の証明 (11)

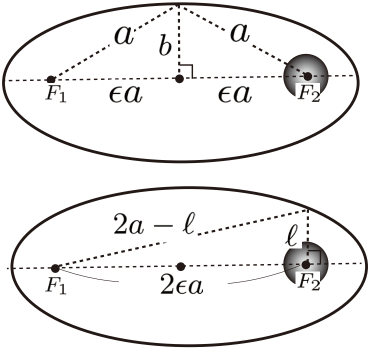

図 4: 長径 a，短径 b の楕円軌道の幾何学的性質．半直弦は ℓ である．

- また，ケプラー第１法則を導く際，半直弦の長さ ℓ を用いて

$$\ell = a(1-\epsilon^2) = \frac{h^2}{GM} \tag{34}$$

という関係を得た．

3.6. ケプラーの法則の証明 (12)

- これより

$$h = \sqrt{GMa(1-\epsilon^2)} \tag{35}$$

である．

- 従って，G や M は a に依存しないことから，

$$T = \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-\epsilon^2}}{\sqrt{GMa(1-\epsilon^2)}} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}} \propto a^{\frac{3}{2}} \tag{36}$$

を得る．

- 従って，惑星の公転周期の 2 乗が楕円軌道の長半径の 3 乗に比例する，ケプラー第 3 法則

$$\boxed{T^2 \propto a^3} \tag{37}$$

が示された．

第 10 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 今回の内容

3 中心力
- 中心力の性質
- 中心力系における角運動量保存則
- 万有引力
- 重力ポテンシャル
- ケプラーの法則
- ケプラーの法則の証明

4 補遺：ベクトルの外積

5 まとめ
- 第 10 回講義のまとめ
- 第 9・10 回レポート課題について

4. 補遺：ベクトルの外積

ベクトルの外積

ベクトル $\mathbf{A} = (a_x, a_y, a_z)$ とベクトル $\mathbf{B} = (b_x, b_y, b_z)$ の外積をベクトル $\mathbf{C}$ とする．この時，これらの関係は，外積記号 $\times$ を用いて，

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x) \tag{38}$$

と表される．なお，ベクトル $\mathbf{C}$ には以下の性質がある．

(1) ベクトル $\mathbf{A}$（大きさ A）とベクトル $\mathbf{B}$（大きさ B）のなす角度を $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると，ベクトル $\mathbf{C}$ の大きさ C は

$$C = AB \sin\theta \tag{39}$$

となる．これより，平行なベクトル同士の外積は $\mathbf{0}$ となる．

(2) ベクトル $\mathbf{C}$ は，ベクトル $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ それぞれと直交する．

(3) ベクトルの外積と微分：

$$\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}} \tag{40}$$

4. 補遺：ベクトルの外積 (2)

- **性質 (1)(2) の証明**

  xyz 空間において，一般性を失わない範囲で，計算しやすい位置にベクトル $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ を置く．まず，これらのベクトルは xy 平面上に張られるものとし，ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角度を $\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると，それぞれ

$$\mathbf{A} = (A, 0, 0) \tag{41}$$

$$\mathbf{B} = (B\cos\theta, B\sin\theta, 0) \tag{42}$$

  と置くことができる．これを用いて，外積の定義からベクトル $\mathbf{C}$ を計算すると，

$$\mathbf{C} = (0, 0, AB\sin\theta) \tag{43}$$

  となる．これより，$\mathbf{C}$ は z 軸方向を向いているため，性質 (2) が示される．またその大きさは，$C = AB\sin\theta$ であり，性質 (1) が示される．

4. 補遺：ベクトルの外積 (3)

■ 性質 **(3)** の証明

$$\dot{\mathbf{C}} = (0, 0, \dot{A}B\sin\theta + A\dot{B}\sin\theta + \dot{\theta}A\cancel{\dot{B}}B\cos\theta) \tag{44}$$

$$\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} = (0, 0, \dot{A}B\sin\theta) \tag{45}$$

$$\mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}} = (0, 0, A\dot{B}\sin\theta + \dot{\theta}AB\cos\theta) \tag{46}$$

よって,

$$\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}} \tag{47}$$

が成立する.

第 10 回講義資料目次

1 講義のスケジュール

2 今回の内容

3 中心力
- 中心力の性質
- 中心力系における角運動量保存則
- 万有引力
- 重力ポテンシャル
- ケプラーの法則
- ケプラーの法則の証明

4 補遺：ベクトルの外積

5 まとめ
- 第 10 回講義のまとめ
- 第 9・10 回レポート課題について

5.1. 第 10 回講義のまとめ

中心力運動する物体の運動を太陽の周りを回る惑星の軌道を例に概観した.

- 惑星の軌道は，その角運動量が保存することから常に同一平面上にある.
- 惑星の軌道は同一平面上にあることから，2 次元極座標系において，動径方向と接線方向の運動に分けて考えた.
- 接線方向に力が掛からないことから，ケプラー第 2 法則が示される.
- 動径方向の運動方程式を解くことにより，ケプラー第 1 法則が示される.
- これらを組み合わせて，楕円の幾何学的性質から，ケプラー第 3 法則が示される.

次回予告： ガリレイ変換，慣性力

5.2. 第 9・10 回レポート課題について

- 当科目 NUCT 内「課題」欄に、「第 9・10 回レポート課題」を用意しました．その中に，問題兼解答用紙をアップしましたので，各自印刷し，所定欄に解答の上，電子化した解答のスキャンを同ページ所定欄に添付してください．
- 解答用紙の印刷が諸事情により難しい場合は，通常のレポート用紙に解答してもよいこととします．
- 採点結果は，NUCT を通して各人へお知らせします．
- 添付ファイルは 1 つにまとめていることが望ましいです。
- ファイル名は 第 9・10 回レポート課題 (氏名).pdf と命名してください．
- スキャン方法の詳細は NUCT のフォーラムを参照ください。