物理学基礎 II

講義 9,10 の板書ノート

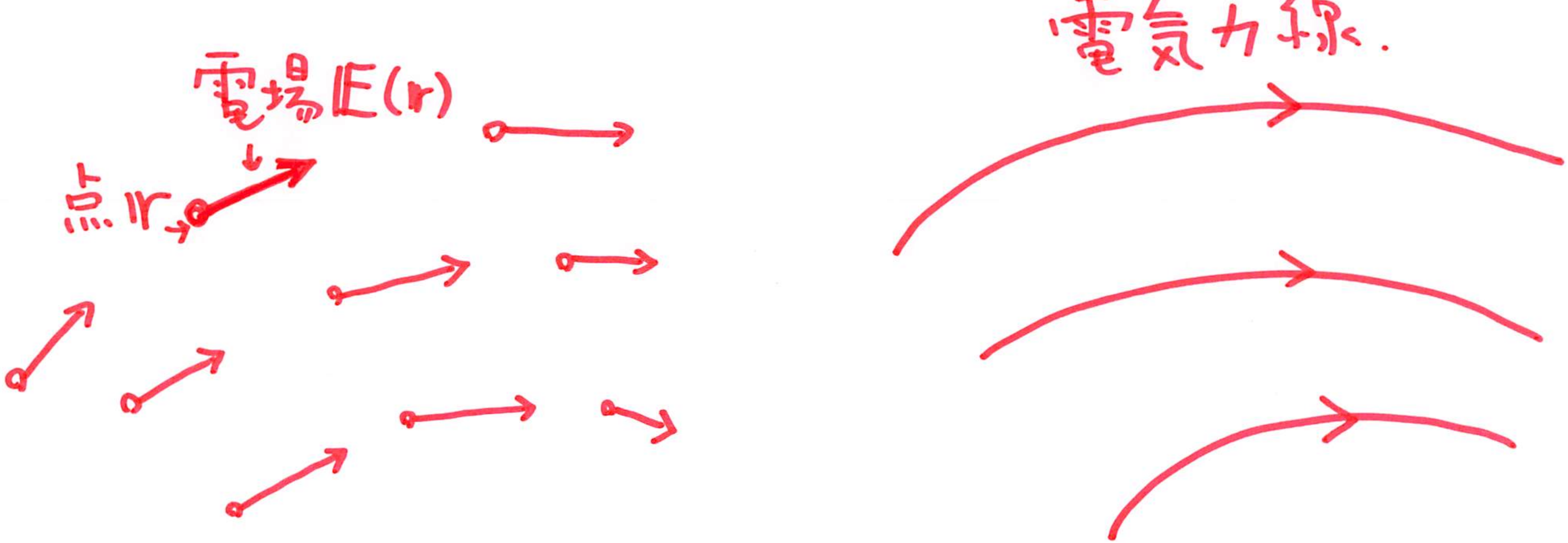
電束とガウスの法則，対称性

谷村 省吾

電気力線 (line of electric force)

電場ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ に沿う曲線.

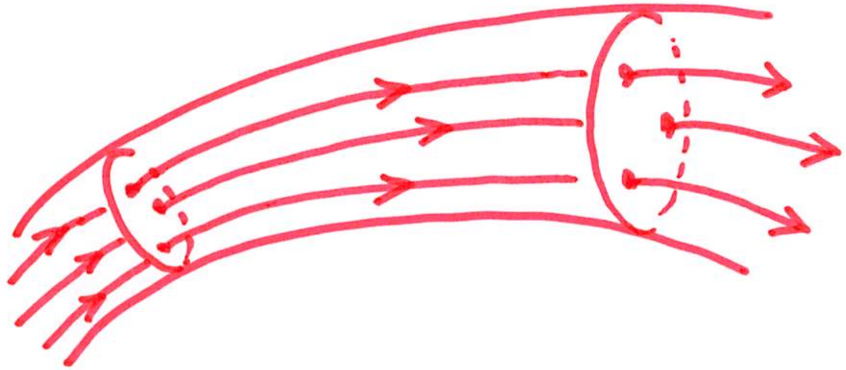
電場の向きと電気力線の向きは同じ.



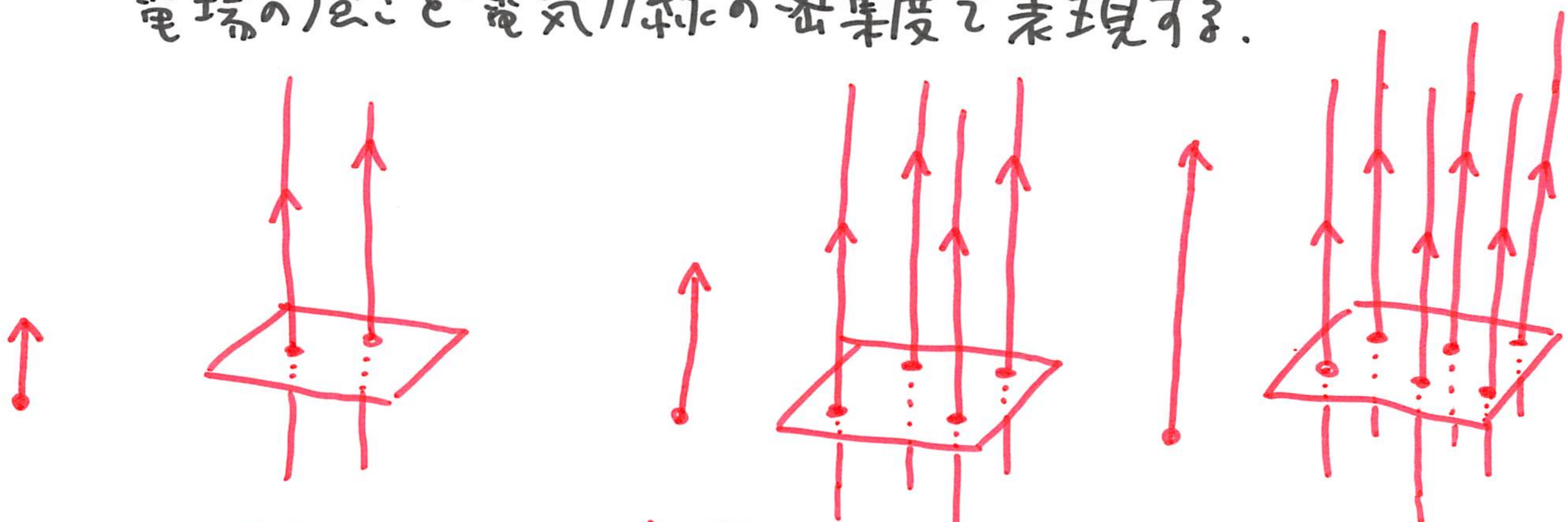
注 電場ベクトルも電気力線も描こうと思えば数限りなく描ける.

電束（でんそく） (electric flux)

電気力線の束（たば）のこと.



約束：単位面積を通過する電気力線の本数が、
電場の強さに比例するように電気力線を描く.
電場の強さを電気力線の密集度で表現する.



電場ベクトル　電気力線　2倍に強くなった　3倍

点電荷Qを中心とする半径rの球面を通過する電気力線の本数

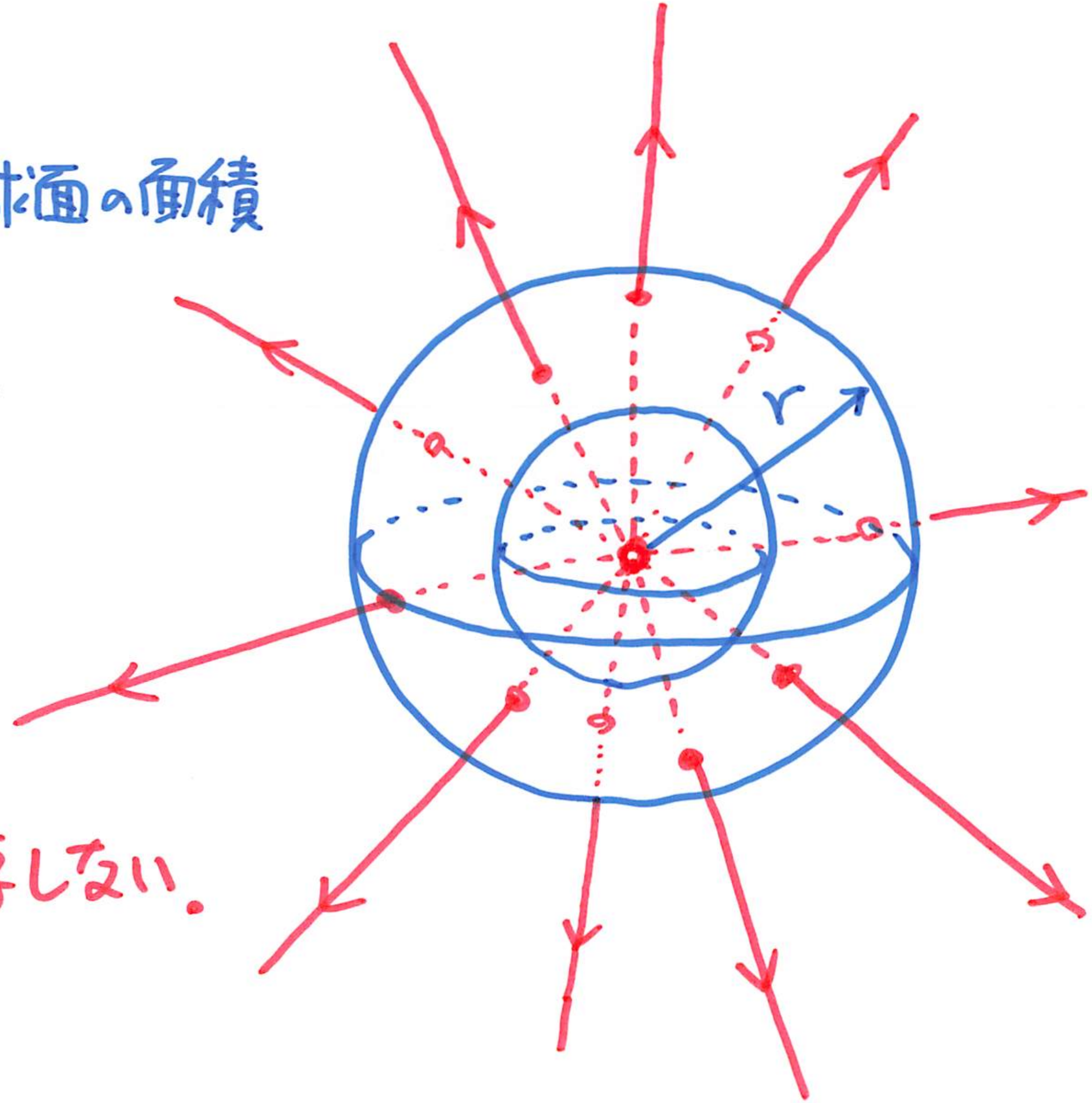
＝（単位面積あたりの電気力線の本数）×（面積）

$\propto$ 比例 $\quad \underbrace{E(r)}_{\text{半径}r\text{の点での電場の強さ}} \times \underbrace{S(r)}_{\text{半径}r\text{の球面の面積}}$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Qに比例する。rに依存しない。



電束 = 電荷となるように定義する.

$$\Phi_e := \varepsilon_0 E \cdot S$$

点電荷の場合は,

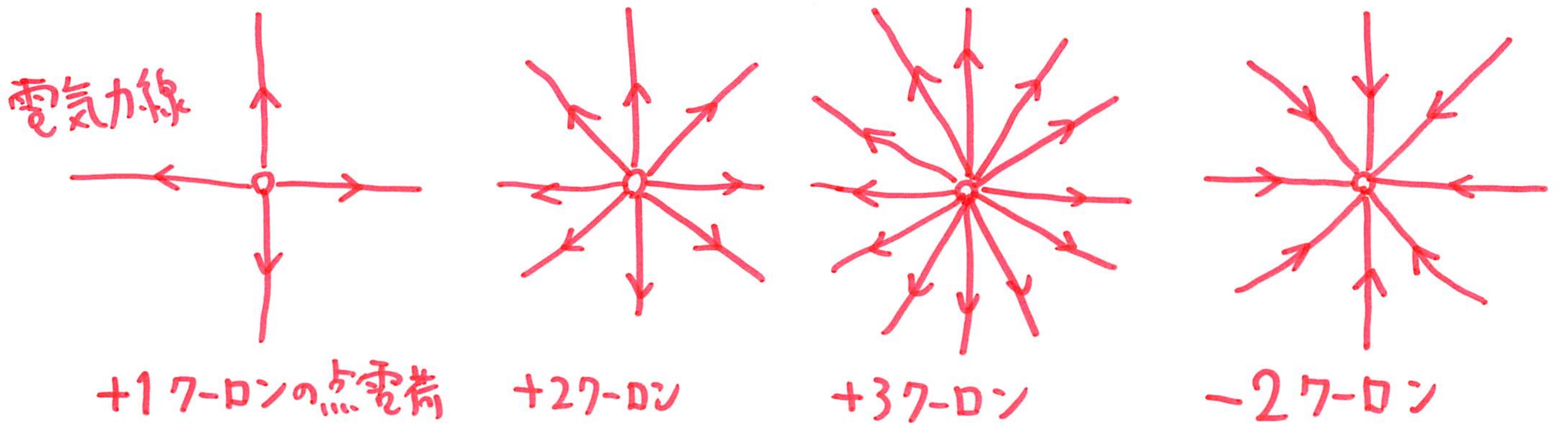
$$= \varepsilon_0 \times \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = Q$$

$$= D \cdot S$$

$\mathbb{D}(\mathbb{r}) = \varepsilon_0 \mathbb{E}(\mathbb{r})$ 電束密度, 単位面積あたりの電束

+1クーロンの電荷からは 1クーロンの電束が湧き出す.

−1クーロンの電荷には 1クーロンの電束が吸い込まれる.

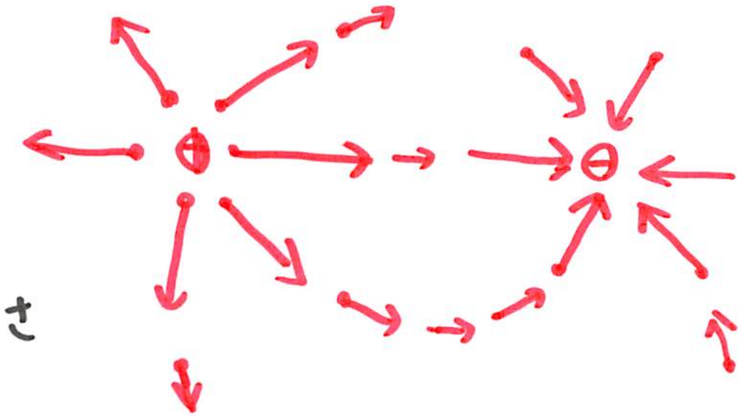


電場の描き方は3通りある.

1. ベクトル場を描く.

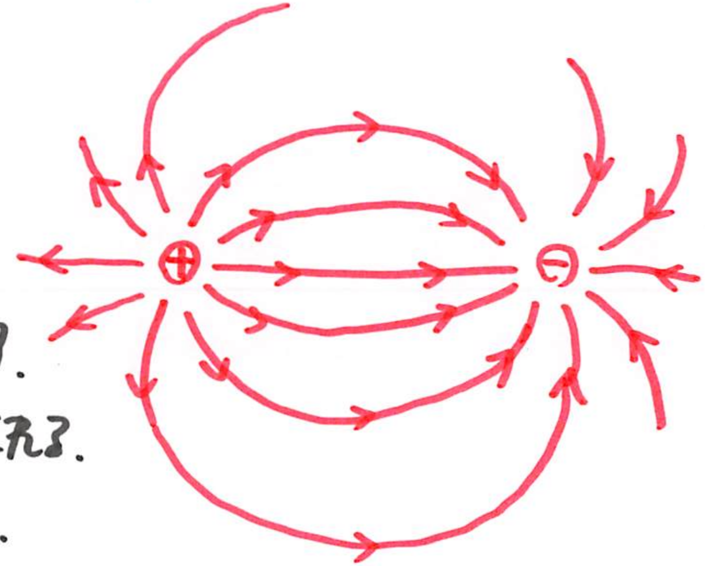
矢印の向き＝電場の向き, 矢印の長さ$\underset{}{\overset{\text{比例}}{\propto}}$電場の強さ

しかし電場の大きさは100倍, 1万倍にも変化するので,
矢印の長さで表現するのは無理がある.



2. 電気力線の族を描く.

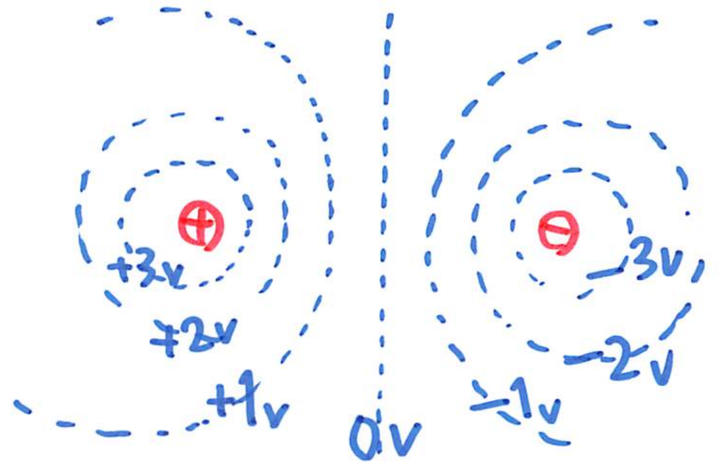
正電荷からは電荷量に比例した電気力線が湧き出す.
負電荷へは 〃 〃 〃 が吸い込まれる.
電場の向きと電気力線の向きはつねに一致させる.
電気力線の密集度が電場の強さに比例.



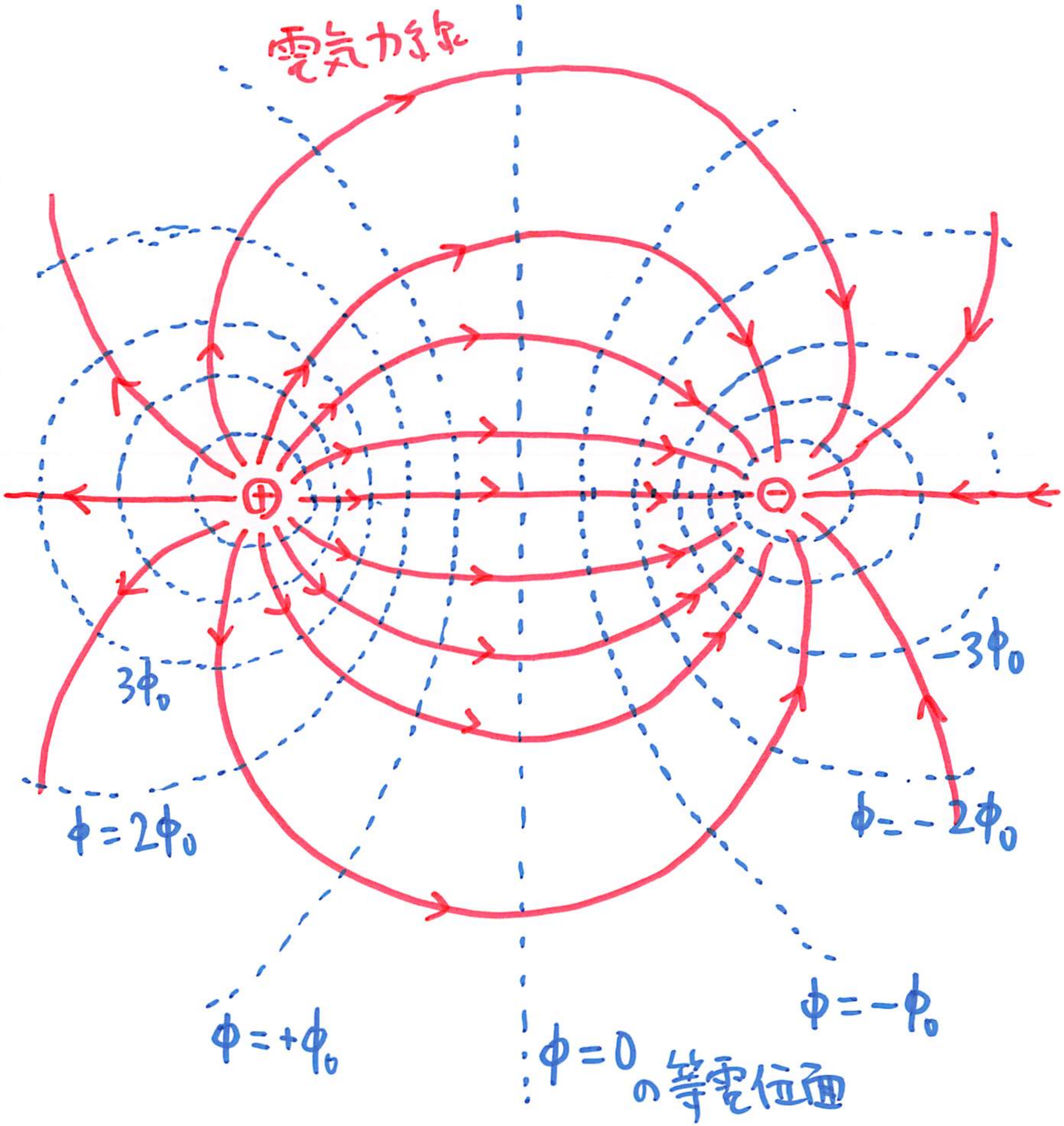
3. 等電位面の族を描く.

電位間隔が一定になるように描く.
等電位面の密集度が電場の強さに比例.

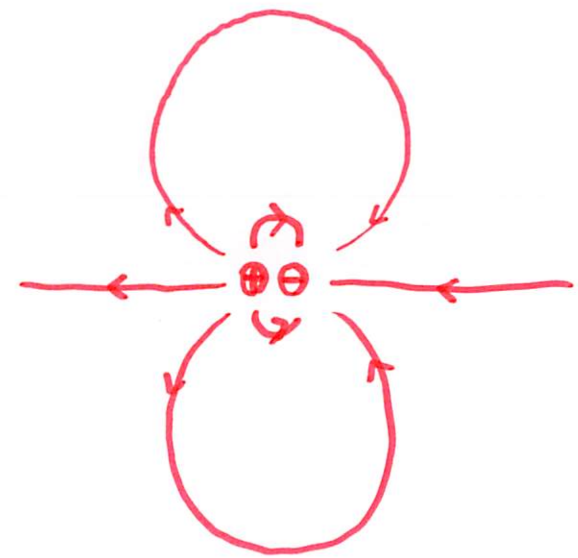
電気力線は必ず等電位面と直交する.



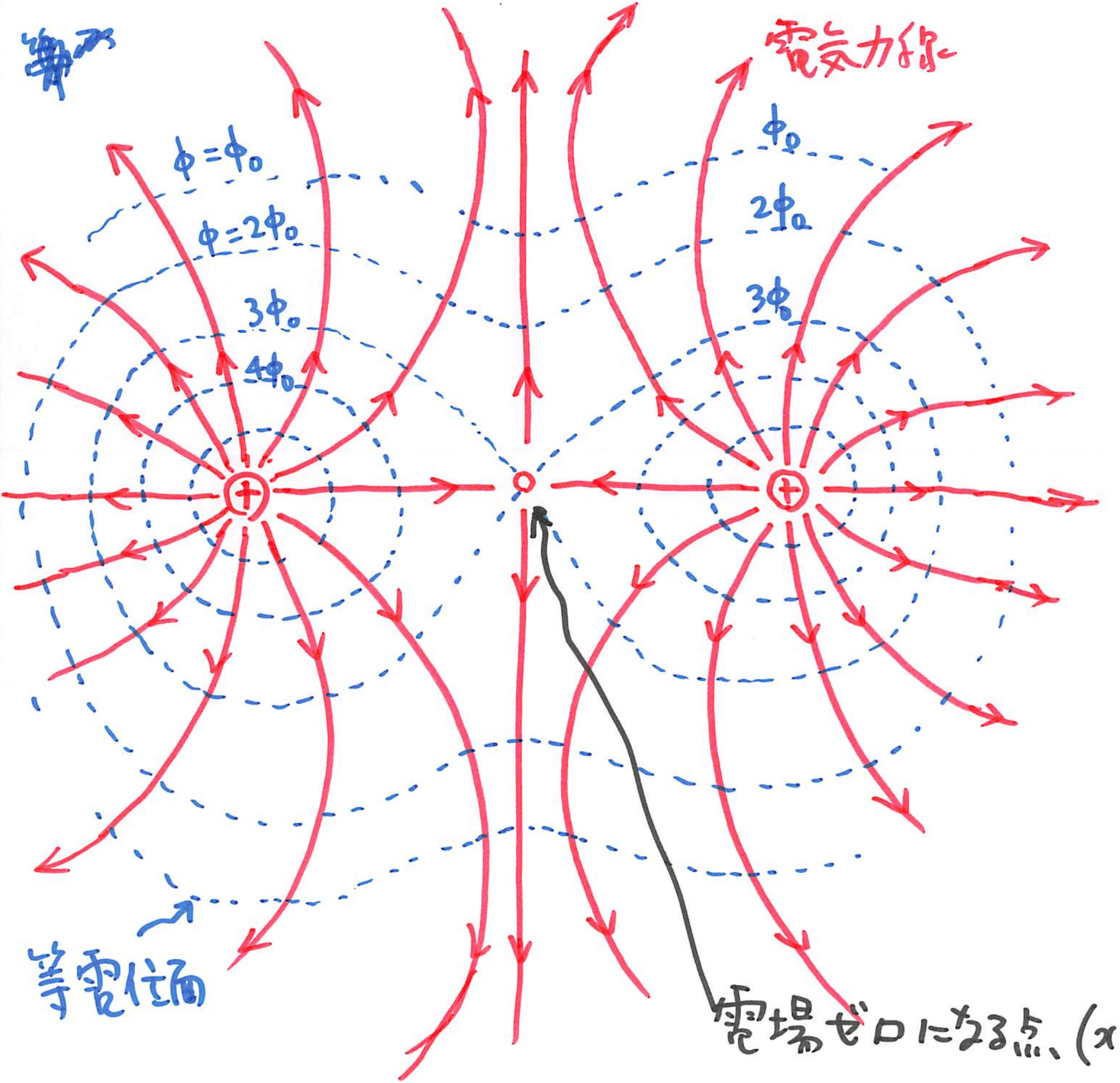
(i) 点$(x, y) = (-a, 0)$に電荷$+q$があり、点$(x, y) = (a, 0)$に電荷$-q$がある場合。



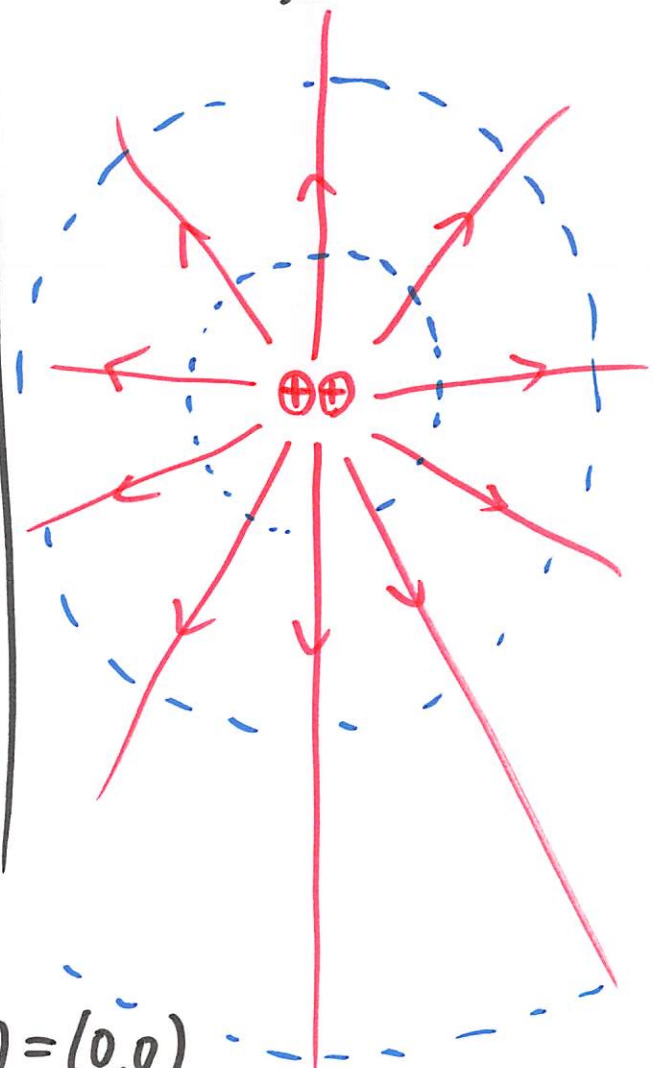
遠くから見ると、電荷の総量は
$+q + (-q) = 0$
なので、遠ざかると電場は
とても弱くなる。



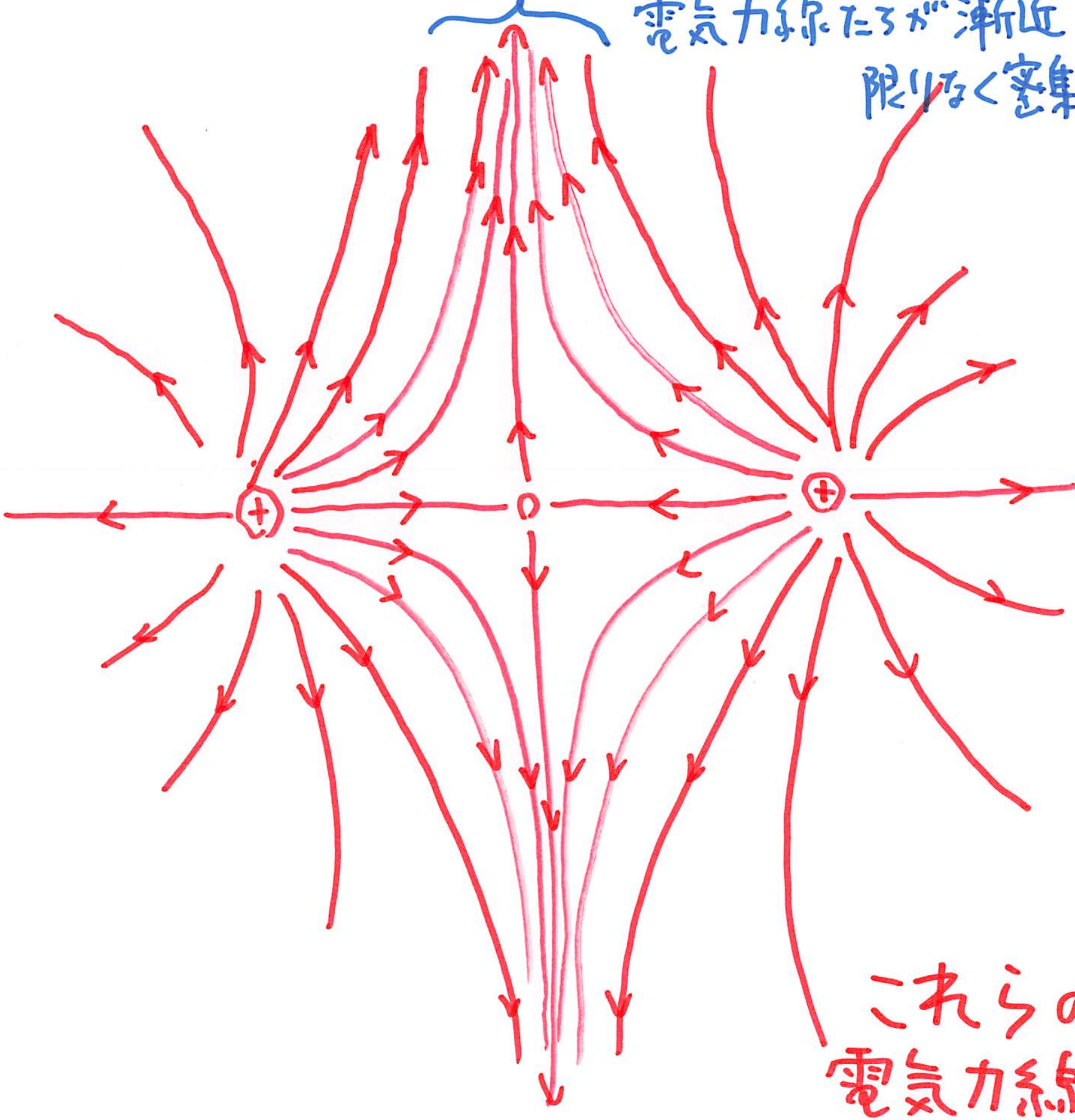
(ii) 点 $(x,y)=(-a,0)$ に電荷 $+q$ があり，点 $(x,y)=(a,0)$ に電荷 $+q$ がある場合．



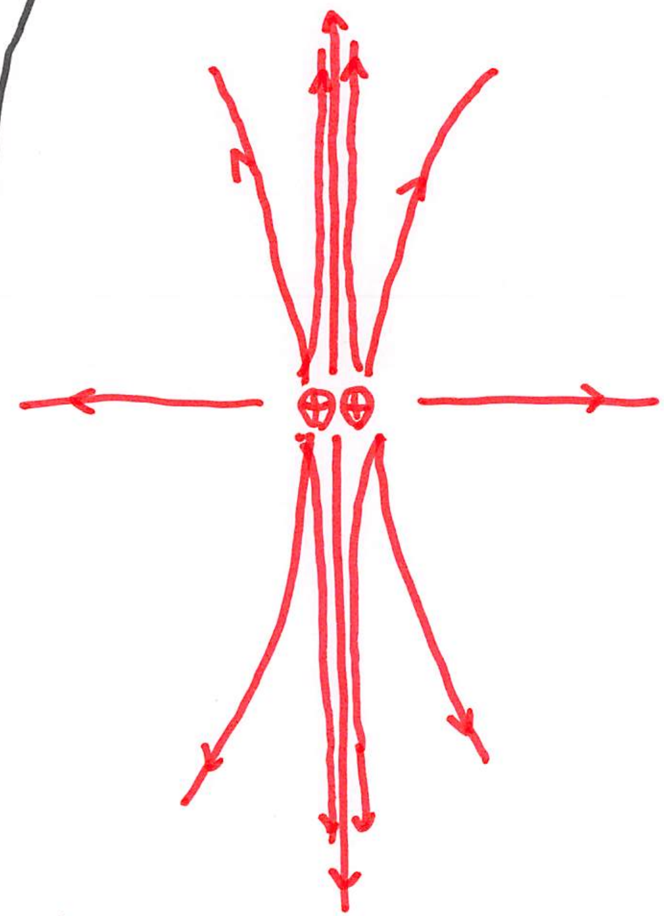
遠くから見ると
$+q+q=2q$ の点電荷の
ように見える．



(ii) こういう絵はおかしい!!



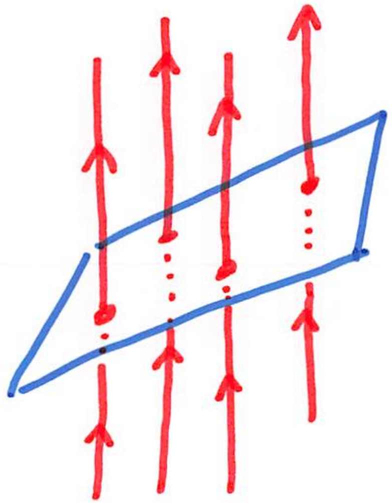
遠くから見ると
y軸方向に沿って電場が
異常に強くなることになる。

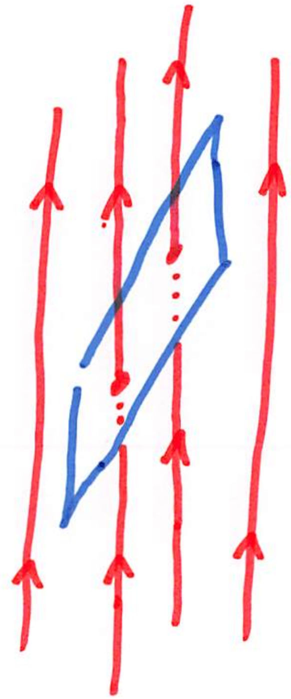


これらの絵は
電気力線の図としてはまちがってる!

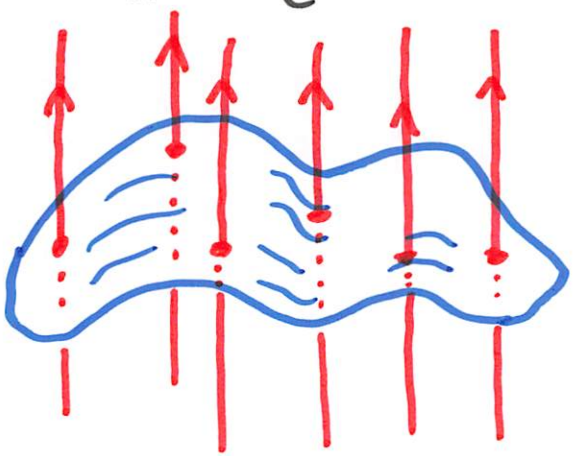
一般の場合の電束の定め方

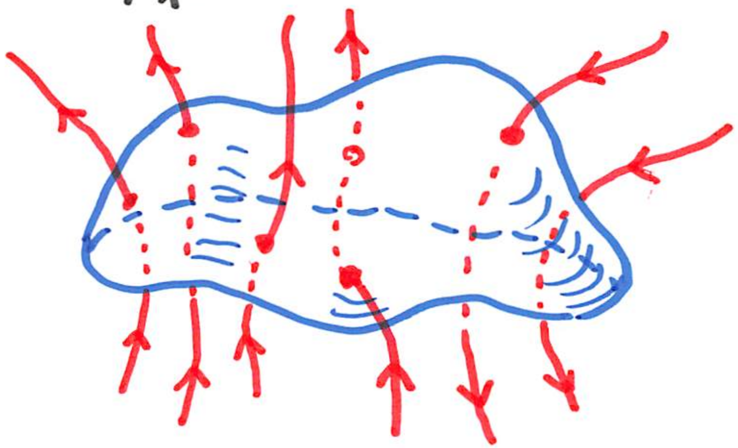
・電場の向きに対して通過面（横断面）が斜めのときは、電束をどう計算すべきか？





・曲面を貫く電束は？ 電場が一様でない場合は？





面の向き・傾きの表現方法

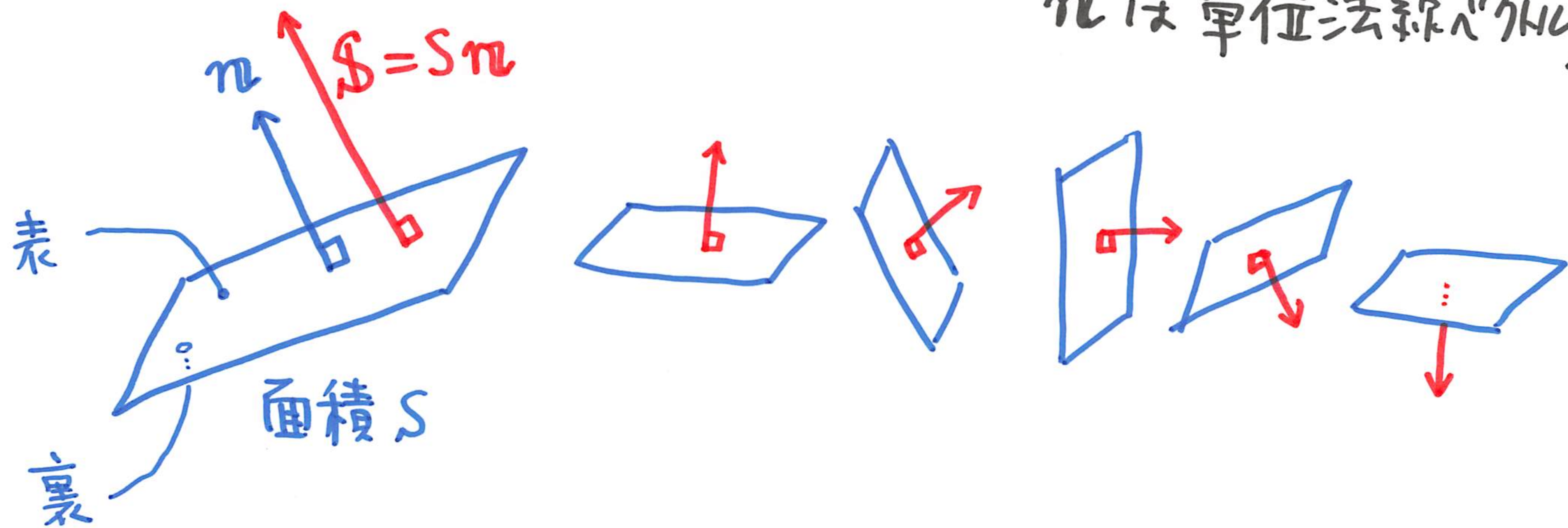
法線ベクトル (normal vector) $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$

面の裏から表に向かう，面に垂直なベクトル.

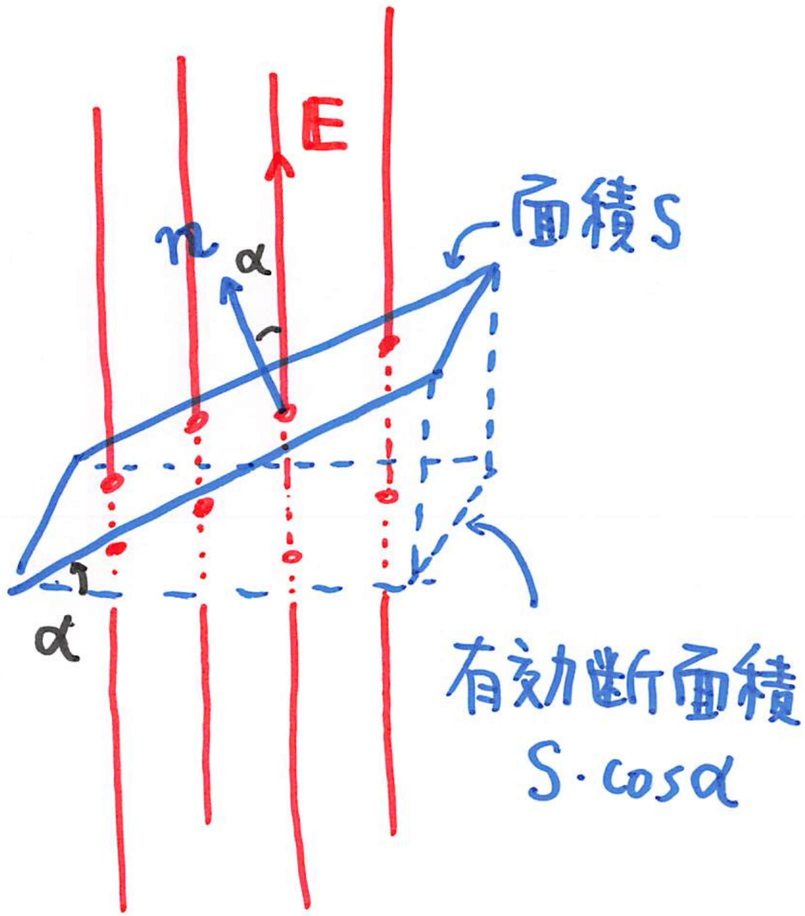
単位法線ベクトル

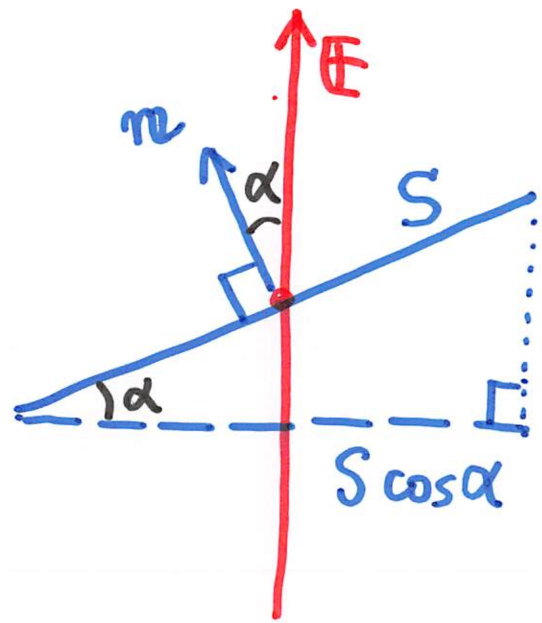
長さが1の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$

向き付けられた面積 $\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{n}$ （Sは面の面積
$\boldsymbol{n}$は単位法線ベクトル）



面を斜めに横切る電場の電束





Sを貫く電束は

$$
\begin{aligned}
\Phi_e &:= \varepsilon_0 E S \cos\alpha \\
&= \varepsilon_0 \mathbb{E}\cdot\mathbb{S} \\
&= \varepsilon_0 \mathbb{E}\cdot n S \\
&= \mathbb{D}\cdot\mathbb{S}
\end{aligned}
$$

電束密度（ベクトル場）

$$\mathbb{D} := \varepsilon_0 \mathbb{E} = (D_x, D_y, D_z)$$

・向き付け可能な曲面 (orientable surface)

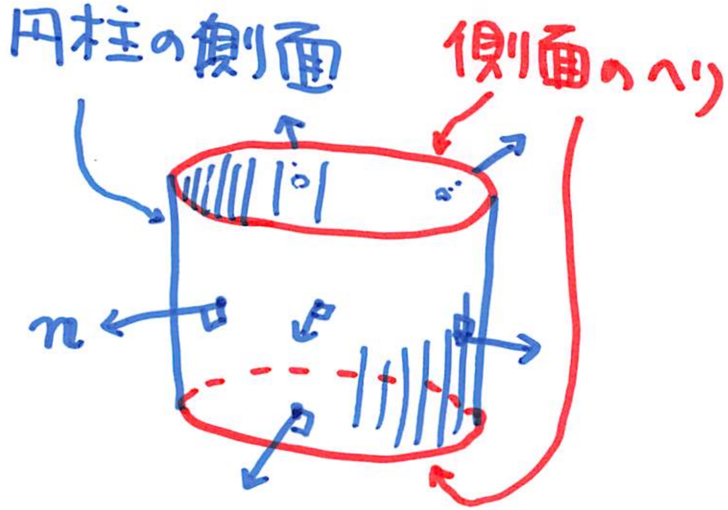
曲面全体にわたって裏・表の区別ができる曲面.

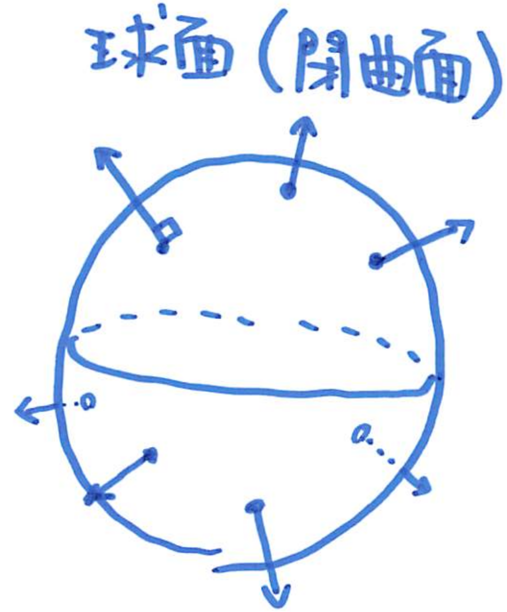
・向き付けられた曲面 (oriented surface)

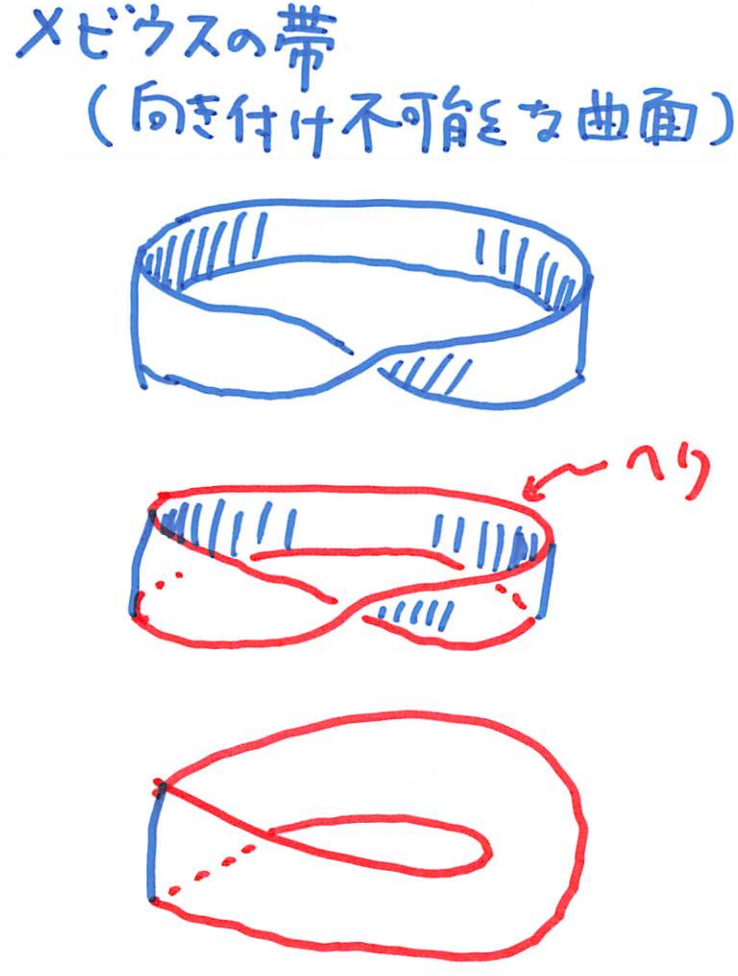
曲面の各点で裏から表に向かい、面に垂直な単位ベクトル n が定められた曲面.

・閉曲面 (closed surface)

縁(へり)がない曲面.





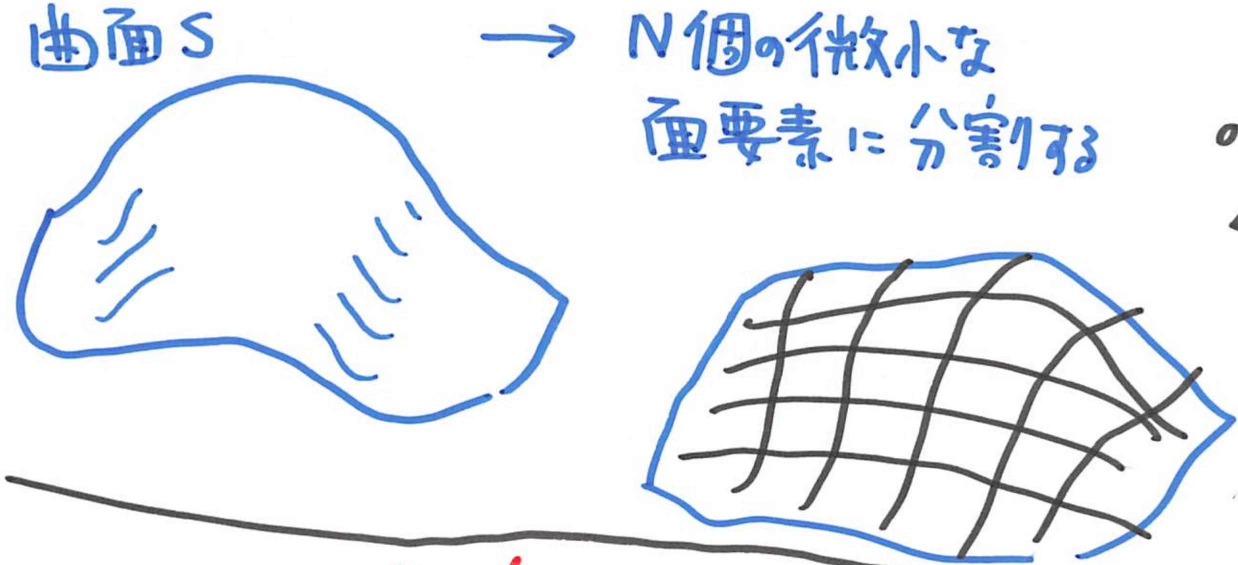


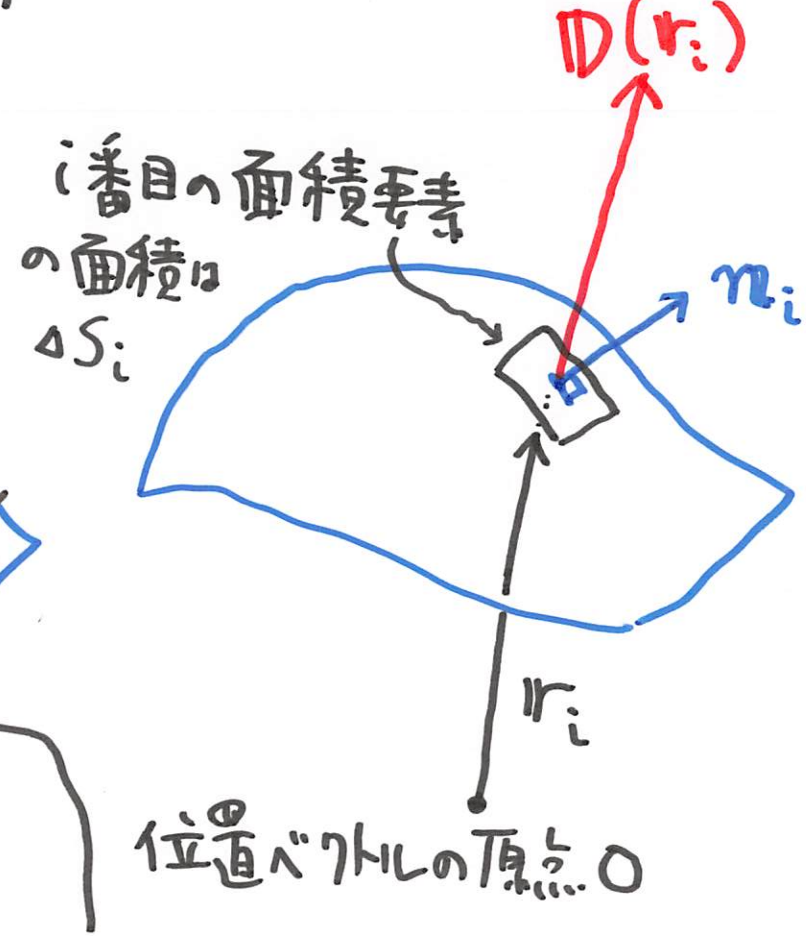
面積分 (surface integral)

向き付けられた曲面 S とベクトル場 $\mathbb{D}(\mathbf{r})$ が与えられたとき，

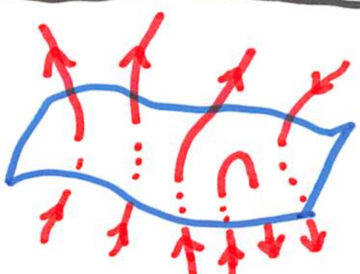
S を貫く $\mathbb{D}$ の面積分

$$\int_S \mathbb{D}\cdot\mathbf{n}\,dS := \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{D}(\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}_i\,\Delta S_i$$





$$\int_S \mathbb{D}\cdot\mathbf{n}\,dS =$$



曲面 S を貫く $\mathbb{D}$ の正味の総量

とくに電場$\mathbb{E}$，真空の誘電率ε_0で定まる

電束密度(electric flux density) $\mathbb{D} := \varepsilon_0 \mathbb{E}$

の面積分

$$\Phi_e(S) := \int_S \mathbb{D} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \varepsilon_0 \int_S \mathbb{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

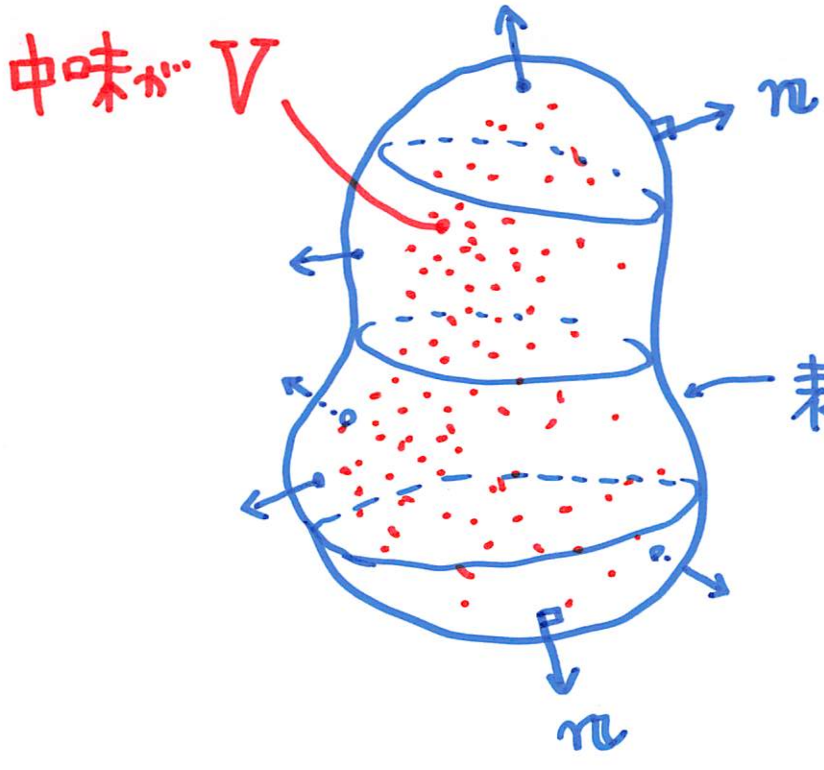
を曲面Sを貫く電束という。

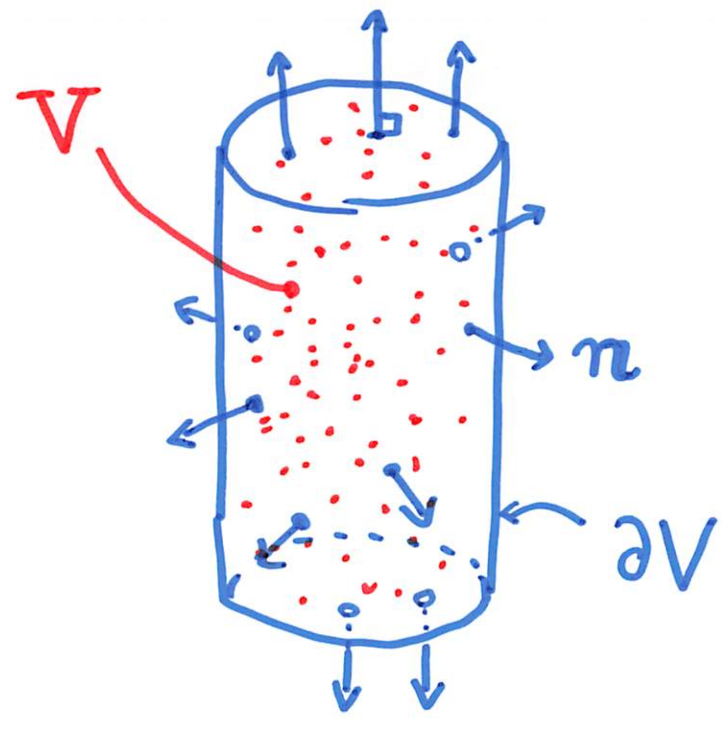
・3次元空間の領域（立体領域）(domain) V

・∂V (boundary of V と読む)

Vの表面・境界面．2次元曲面になる．

Vの内側が裏，Vの外側が表になるような∂Vに向きを付ける．





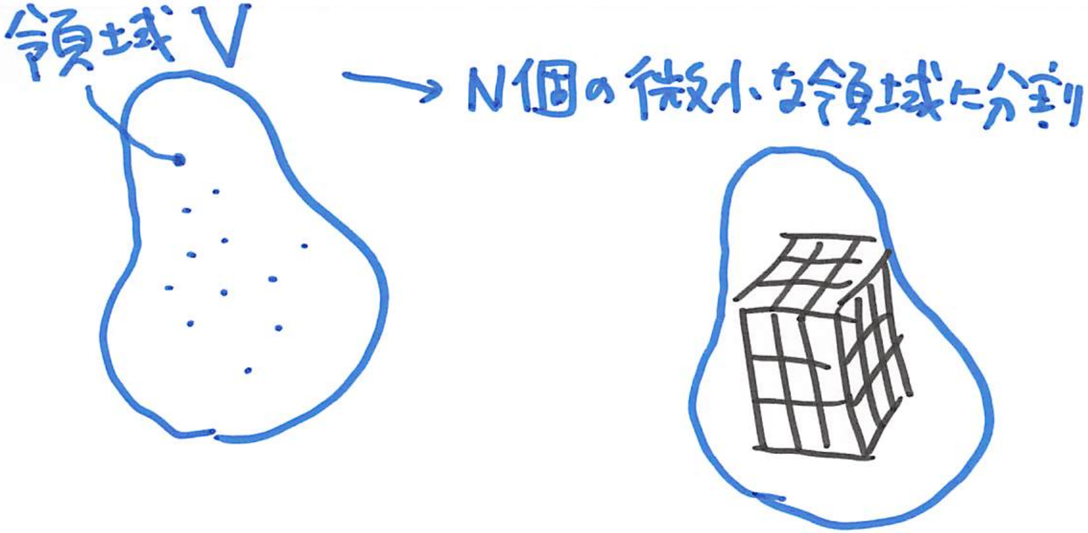
体積積分 (volume integral)

立体領域 V とスカラー場 $\rho(\mathbf{r})$ が与えられたとき，

V における ρ の体積積分

← 質量密度や電荷密度

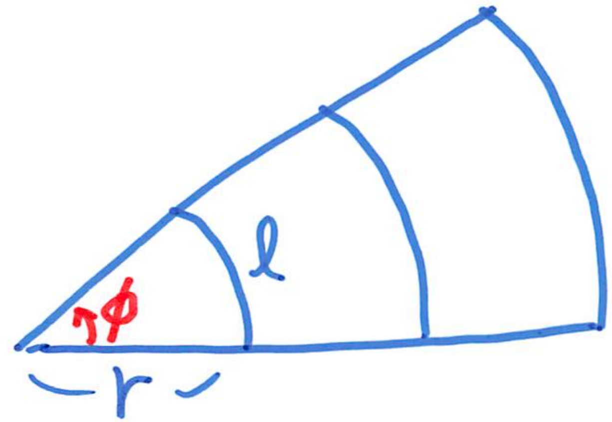
$$\int_V \rho\, dv := \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} \rho(\mathbf{r}_i)\,\Delta V_i$$



ρ が質量密度(単位体積あたりの質量)なら

$\int_V \rho\, dv$ はVに入っている全質量． ρ が電荷密度なら $\int_V \rho\, dv$ はVの全電荷

平面角の弧度法



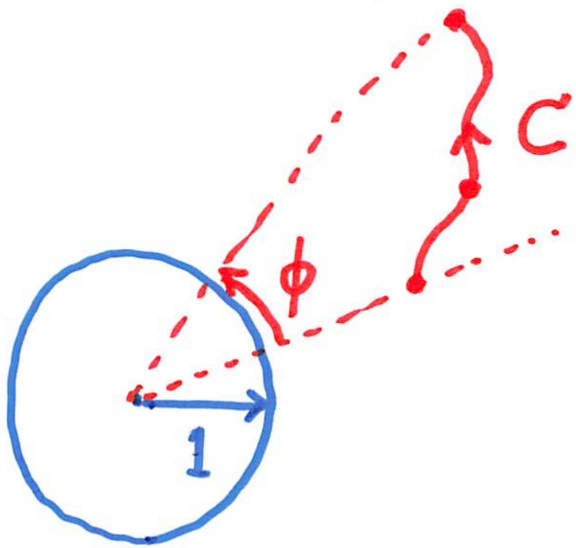
半径 r の扇形の弧の長さ ℓ.

中心角が一定であれば, ℓ は r に比例する.

$$\ell = r\phi$$

となるように角 ϕ を測る単位がラジアン(rad)

半径1の円周に投影した弧の長さが動点が動いた角のラジアン表示



1周すると $\ell = 2\pi r = r \cdot 2\pi$

なので1周角は $\phi = 2\pi$ rad

$\dfrac{\phi}{2\pi}$ は 回転した回数

周回した割合 を与える.

立体角

錐体面(cone)：一定の点(頂点)を端とする半直線が動いてできる曲面.

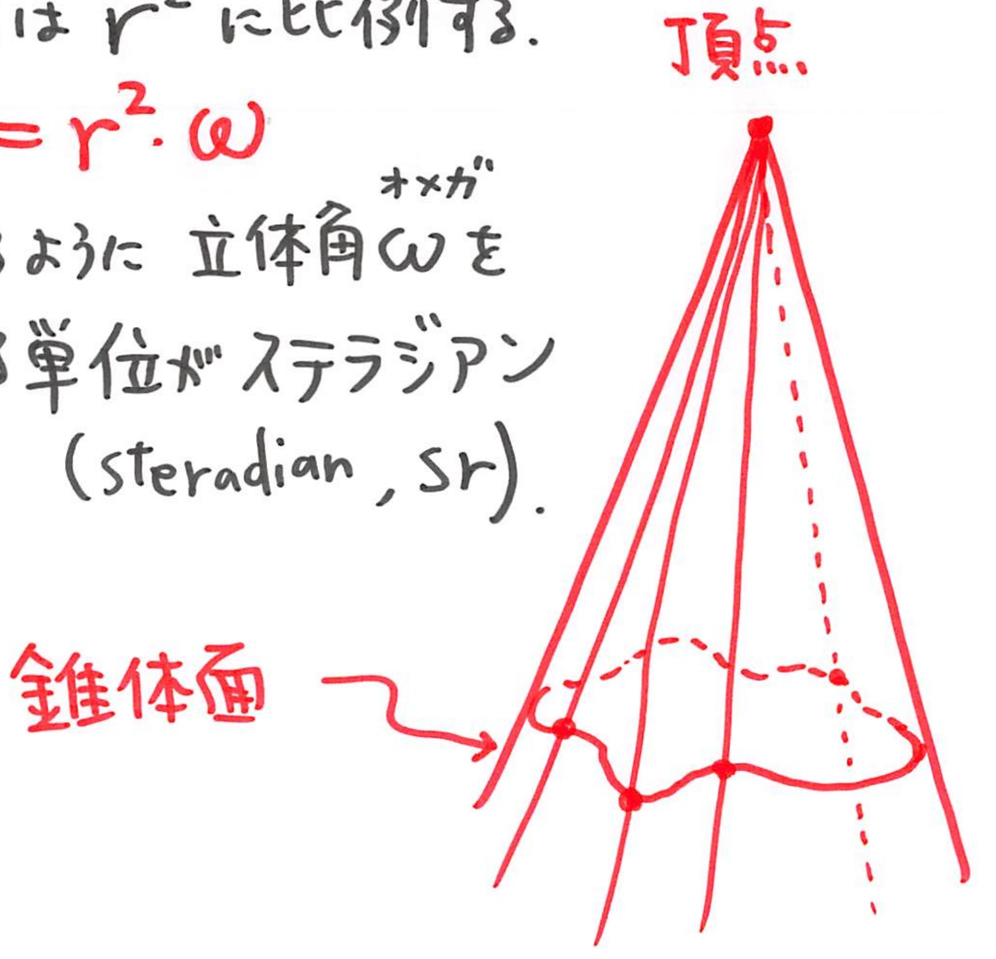
頂点から見た錐体面の開き具合を立体角(solid angle)という.

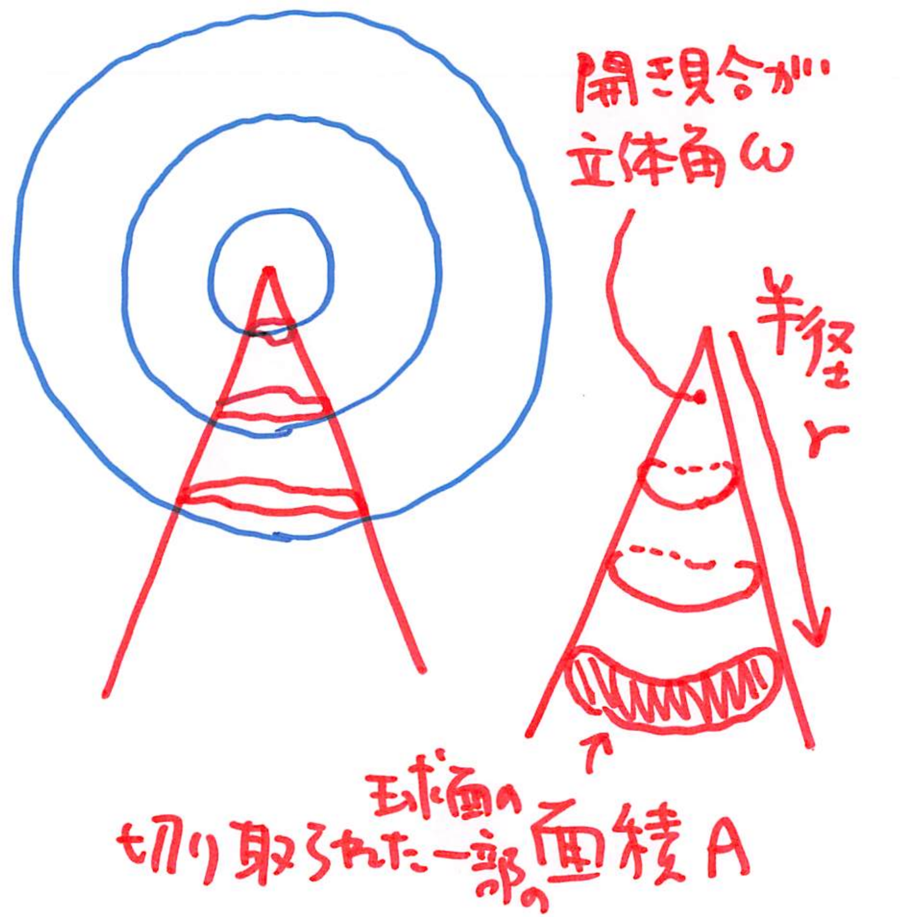
錐体面が、頂点を中心とする半径 r の球面から切り取る面積 A.

A は r^2 に比例する.

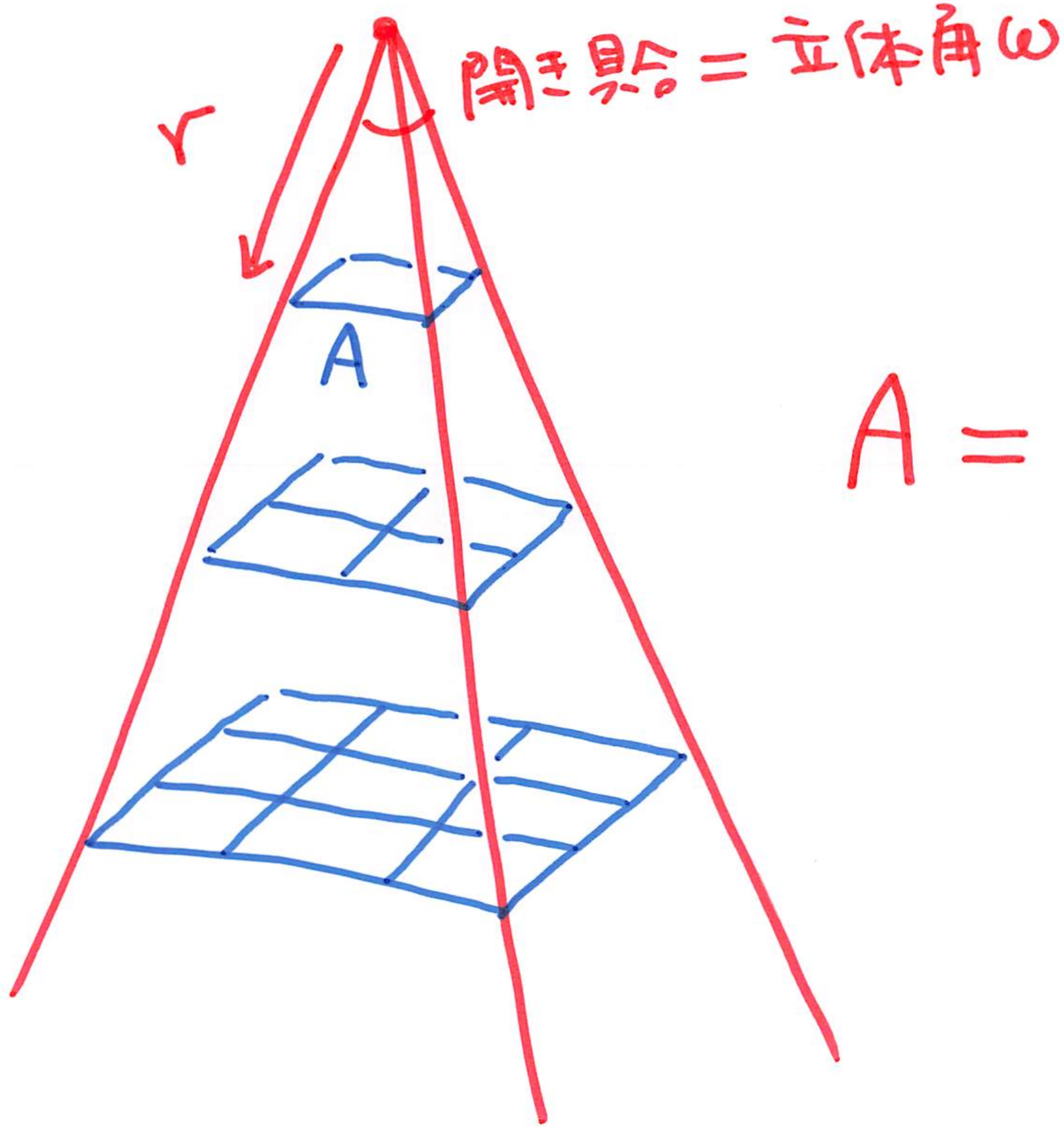
$A = r^2 \cdot \omega$

となるように立体角 ω(オメガ)を測る単位がステラジアン(steradian, sr).



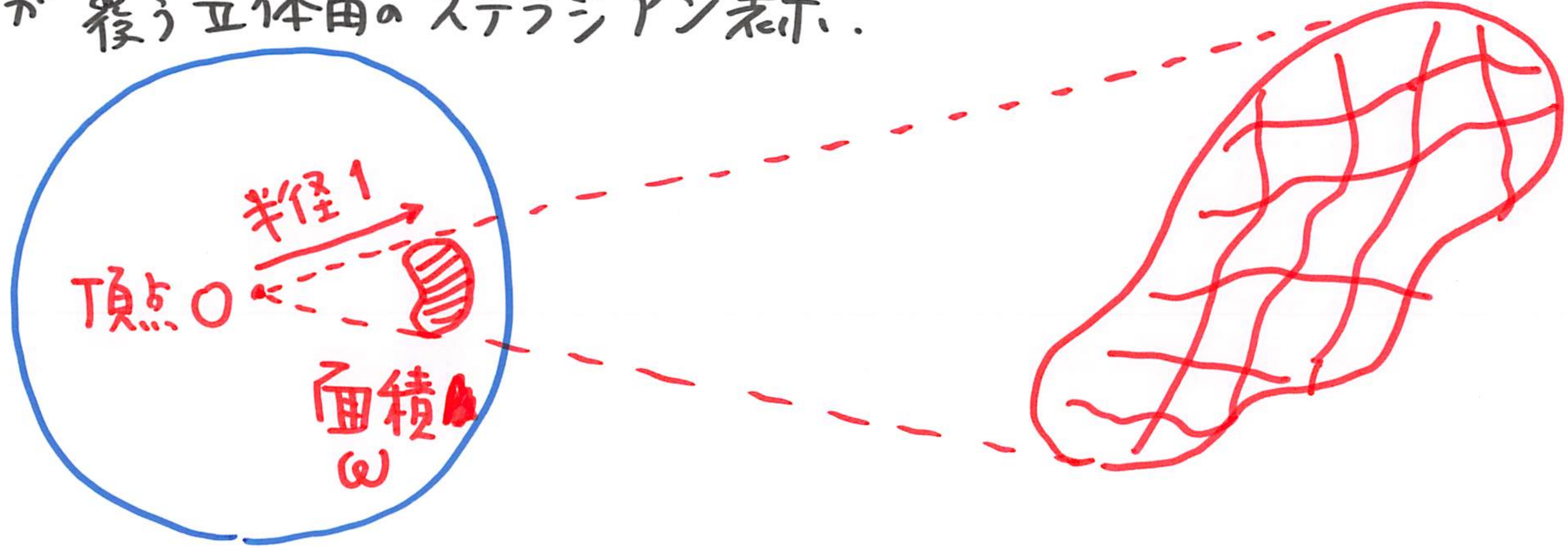


錐体の断面積は距離の2乗に比例する

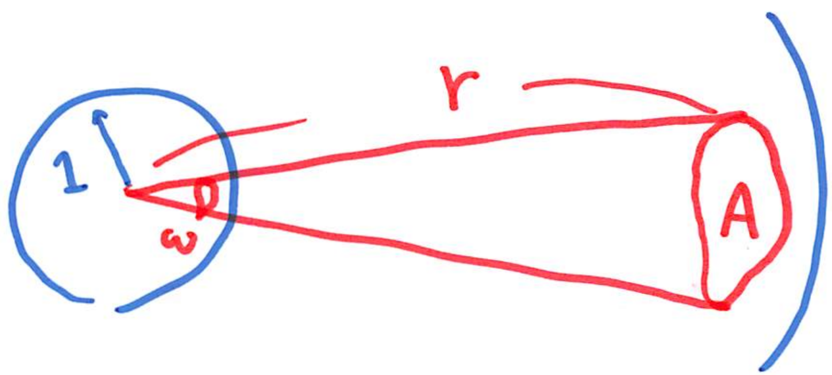


$$A = r^2 \omega$$

曲面Sを O を中心とする半径1の球面に投影したときにできる影の面積 ω が
Sが覆う立体角のステラジアン表示.

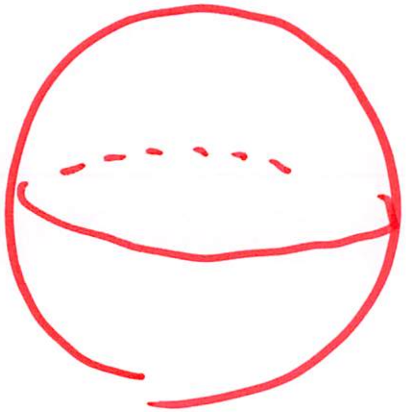


とくにSが半径 r の球面上にあれば $r^2 \cdot \omega = A$

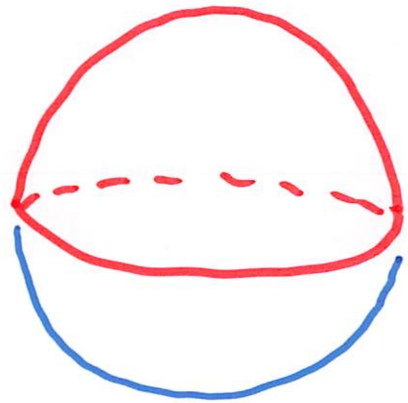


球面を完全に覆っているとき $A = 4\pi r^2 = r^2 \cdot 4\pi$

なので $\omega = 4\pi$. sr

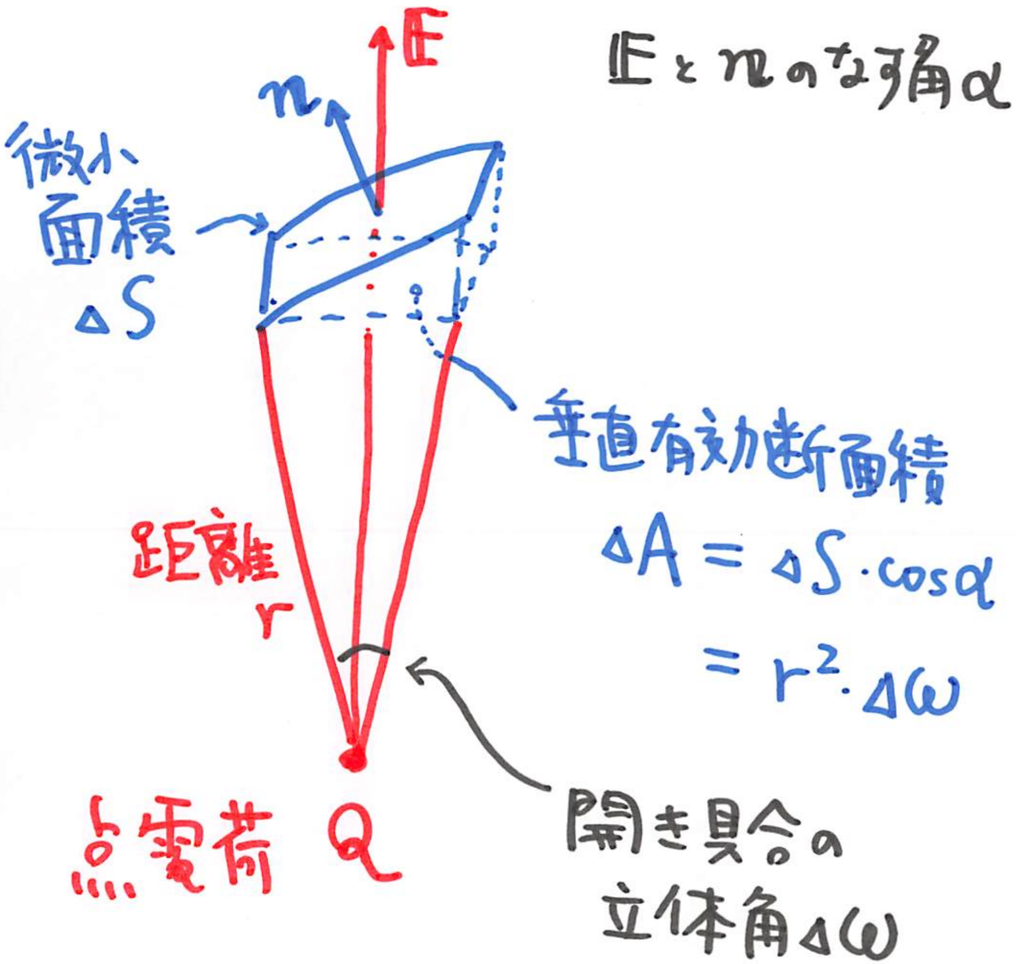


全球の立体角＝4π ステラジアン



北半球の立体角＝2π ステラジアン

点電荷の電束



面要素ΔSを貫く電束

$$\Delta\Phi_e = \varepsilon_0 E \cdot \Delta A$$

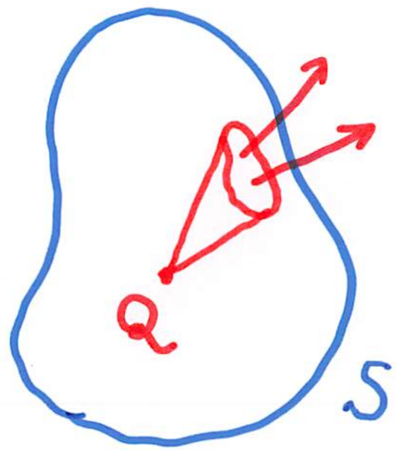
$$= \varepsilon_0 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot r^2 \Delta\omega$$

$$= \frac{\Delta\omega}{4\pi} \cdot Q$$

閉曲面 S と 点電荷 Q

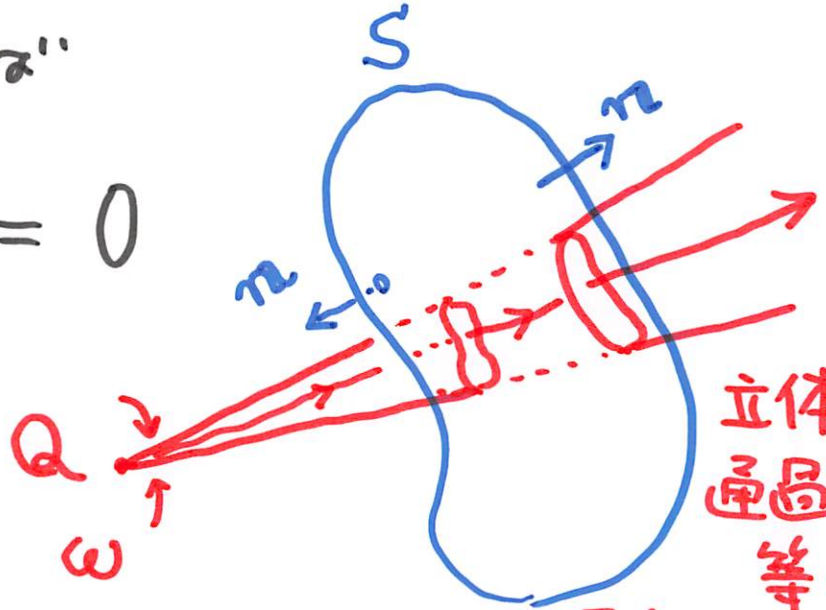
・S が Q を 1回包んでいる(囲んでいる、覆っている、Q が S の内側にある)ならば

$$\Phi_e(S) = \varepsilon_0 \int_S \mathbb{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \frac{4\pi}{4\pi} Q = Q$$



・S の外側に Q があるならば

$$\Phi_e(S) = \varepsilon_0 \int_S \mathbb{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0$$



立体角が等しいので
通過する電束の量も
等しい。

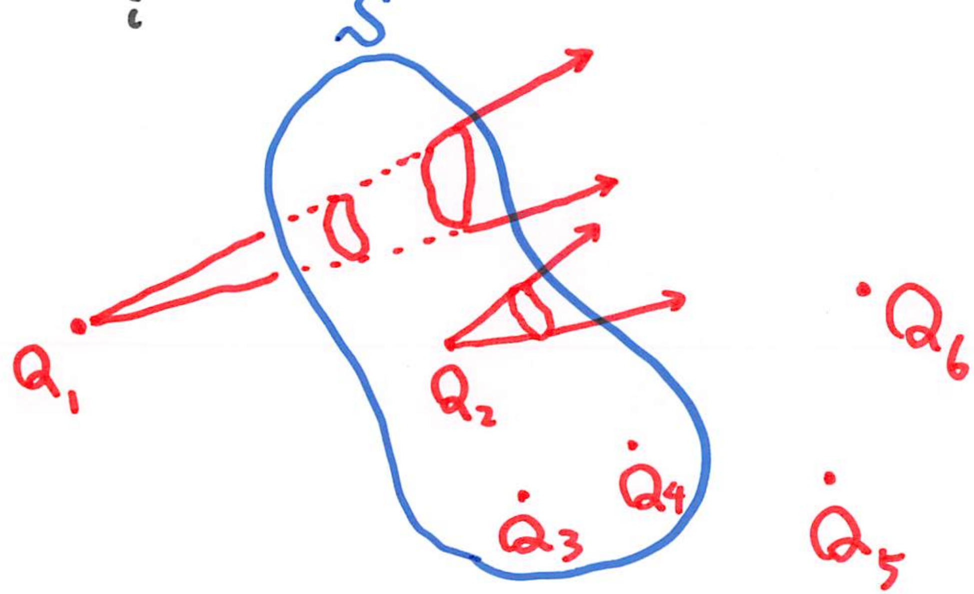
片方は入って来る電束なのでマイナス
出て行く電束なのでプラスで打ち消す。

点電荷がたくさんある場合.

電荷 Q_i $(i=1,2,\cdots,N)$ が作る電場を $\mathbb{E}_i$ とすると、

重ね合わせの原理により $\mathbb{E}=\sum_i \mathbb{E}_i$

閉曲面 S を貫く電束は



$$\Phi_e(S)=\varepsilon_0\int_S \mathbb{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

$$=\sum_i \varepsilon_0\int_S \mathbb{E}_i\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

$$=\sum_i \left(\begin{array}{l} i\text{番目の電荷が}S\text{で包まれていれば } Q_i \\ \text{そうでなければ } 0 \end{array} \right)$$

$=$ S の内側にある電荷の総和

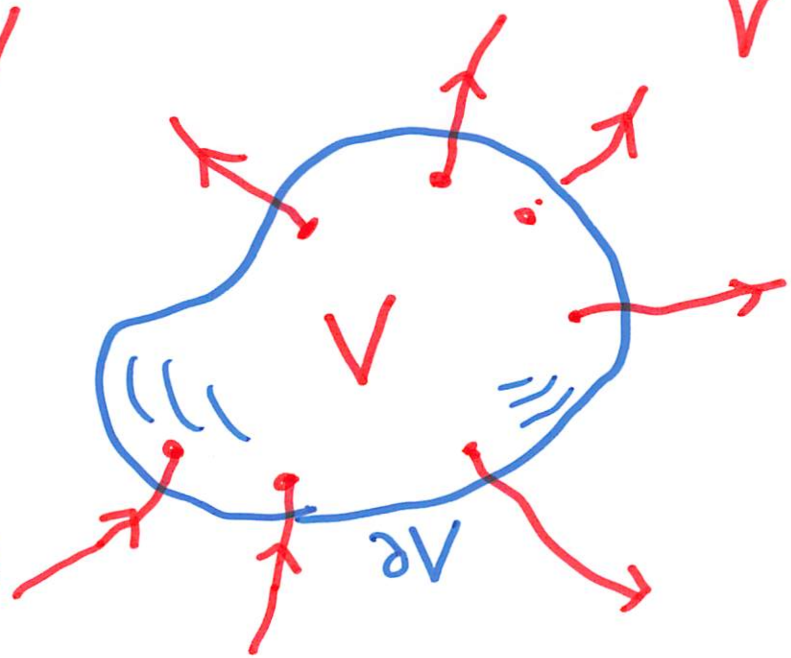
電場のガウスの法則 (Gauss' law of electric field)

任意の立体領域 V に対して、
その表面 ∂V を貫く電束は、V の内側にある電荷の総量に等しい。

$$\varepsilon_0 \int_{\partial V} \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_{V} \rho\, dv$$

ρ は電荷密度

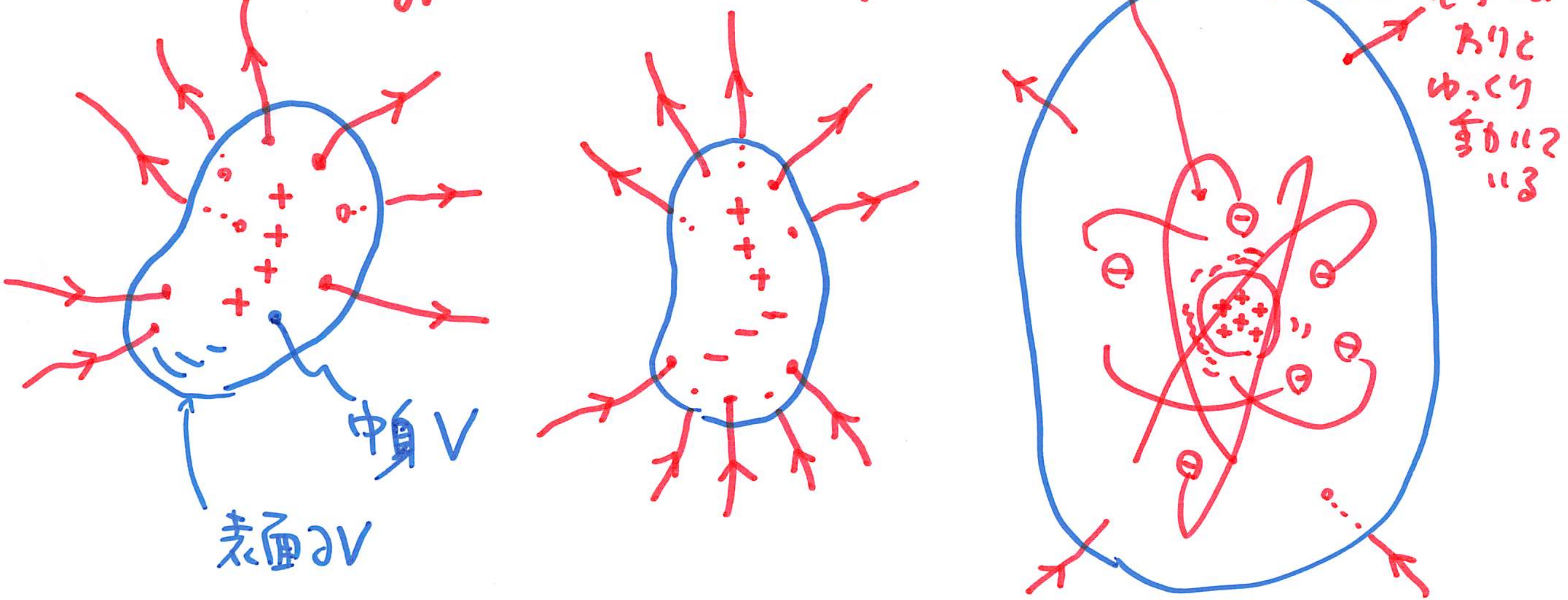
電束の和
$(+5) + (-2)$
$= +3$ クーロン
の電荷が V の中に入っている。



電場のガウスの法則

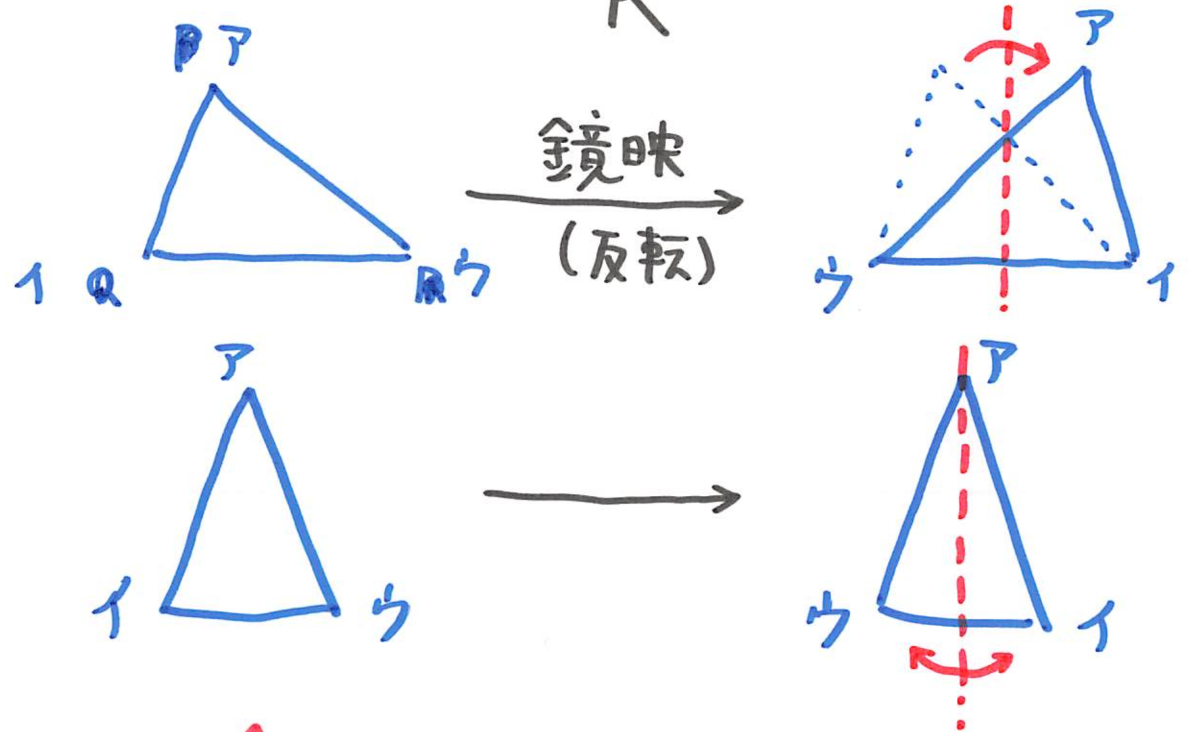
任意の立体領域 V について、
その表面 ∂V を貫く電束は、Vの内側にある電荷の総量に等しい。
じつは電荷が動いているときも この法則は成り立つ。

$$\varepsilon_0 \int_{\partial V} \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_V \rho\, dV$$



対称性(symmetry)という考え方.

ある対象(の状態)A $\xrightarrow[R]{\text{変換・操作}}$ R(A) = A'



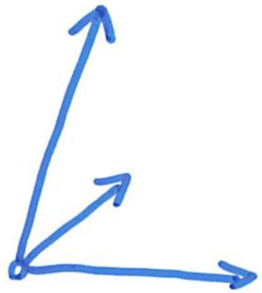
もしも、 A ⟶ R(A) = A のまま.

だったら、対象Aは操作Rに関して対称性を持つという.

あるいは、 AはRの下で不変(invariant)であるという.

幾何学的変換

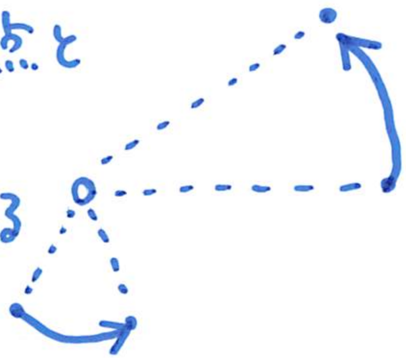
・平行移動



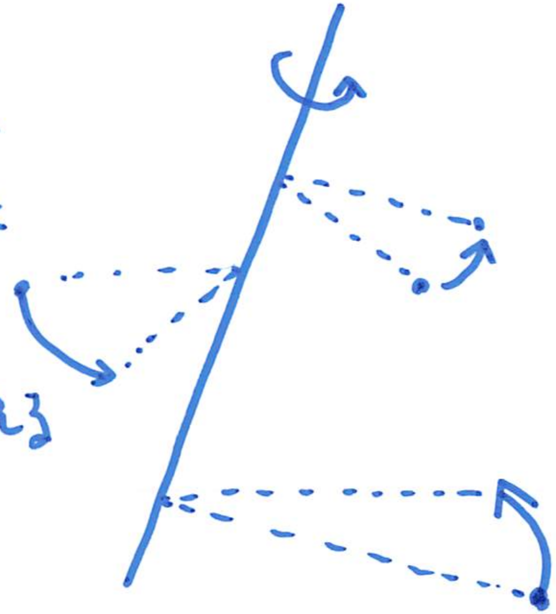
向きと移動距離で指定される.

・回転

平面上では
{回転の中心点と
回転角
で指定される

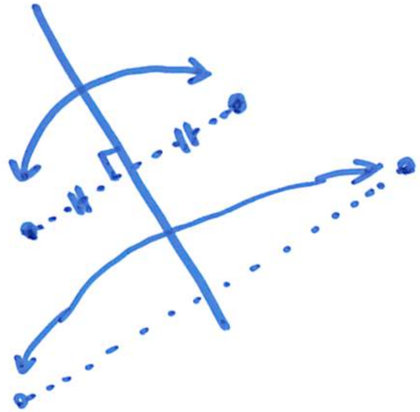


空間中では
{回転軸と
回転角
で指定される

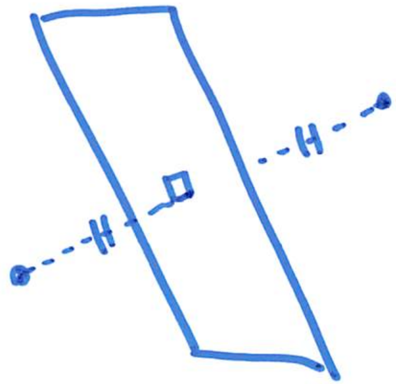


・鏡映

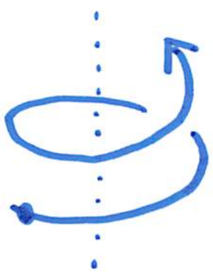
平面上では
鏡は直線



空間中では
鏡は平面



・これらの合成変換

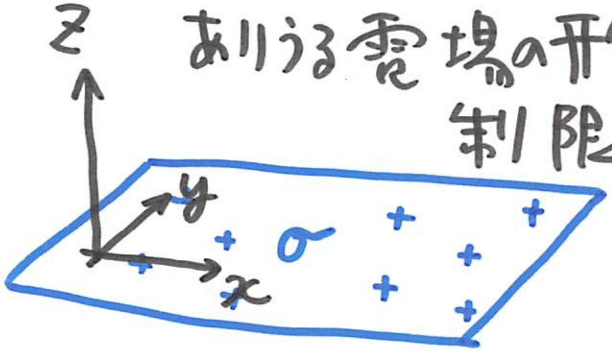


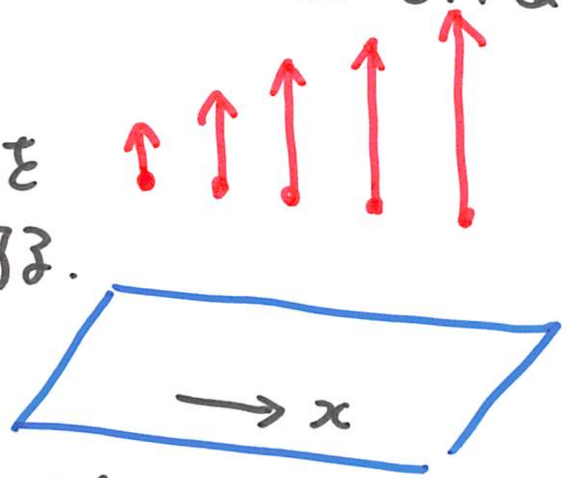
平行移動と回転の合成でらせん運動ができる. など.

ガウスの法則を用いて電場を求めてみよう.

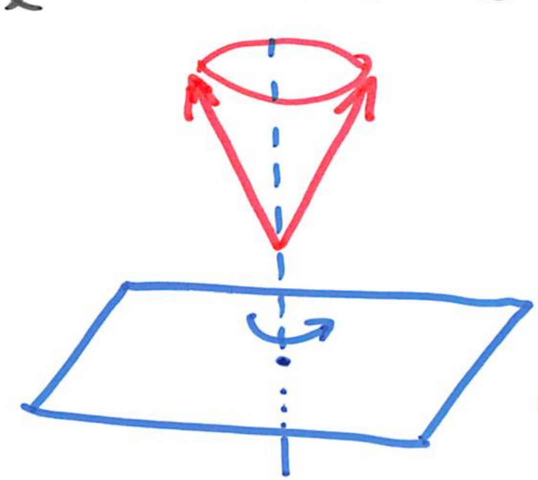
無限に広い平面に一定の面電荷密度 σ がある場合の電場.

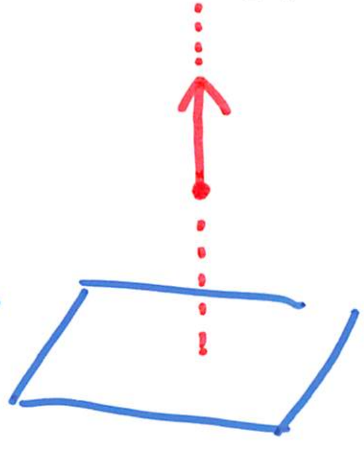
まず対称性を考えてありうる電場の形を制限する.



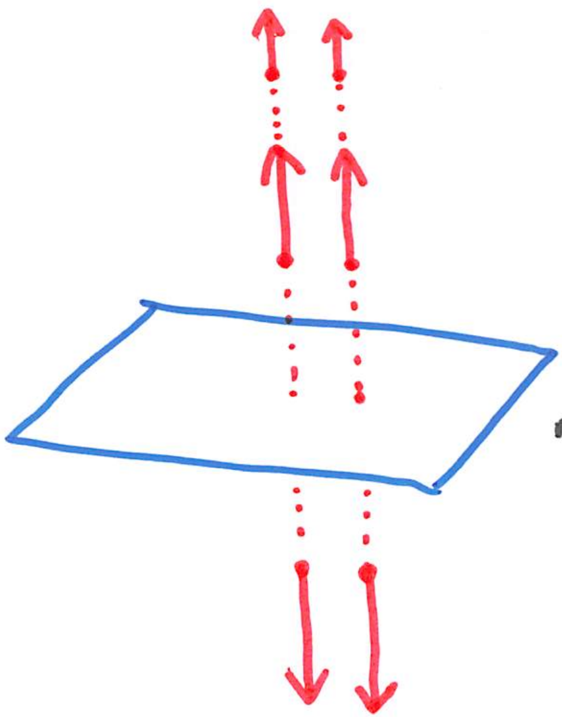


x方向に平行移動しても電荷分布は変わらないので電場がxに依存することはありえない.





平面に垂直な任意の直線周りで回転しても電荷分布は変わらない. 電場も回転の下で不変でなくてはならない.



電場の大きさは平面からの距離に依存しているかもしれないが, 平面についての鏡映対称性は持っているはず.

対称性の考察だけで、

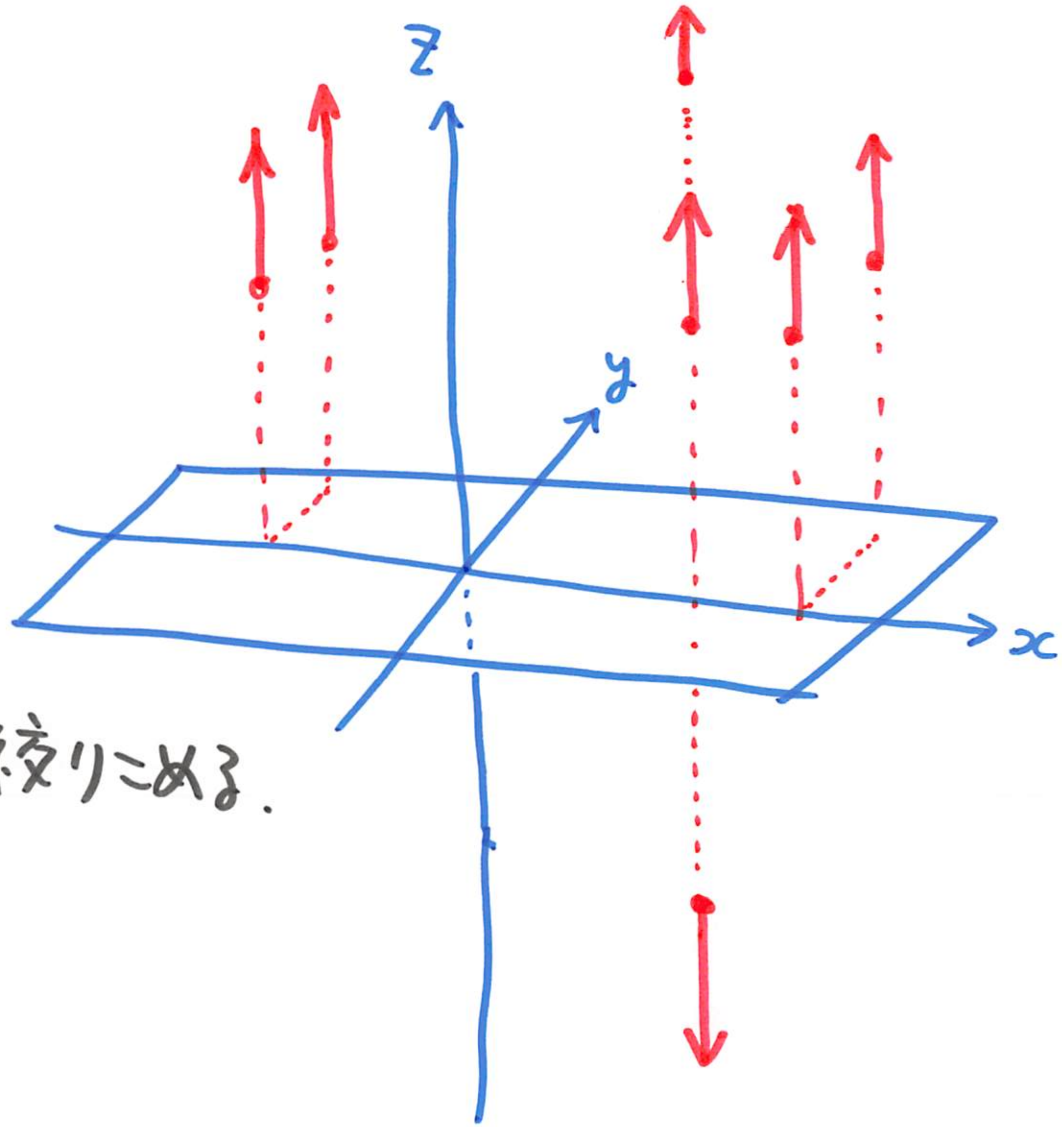
$$E_x = 0$$

$$E_y = 0$$

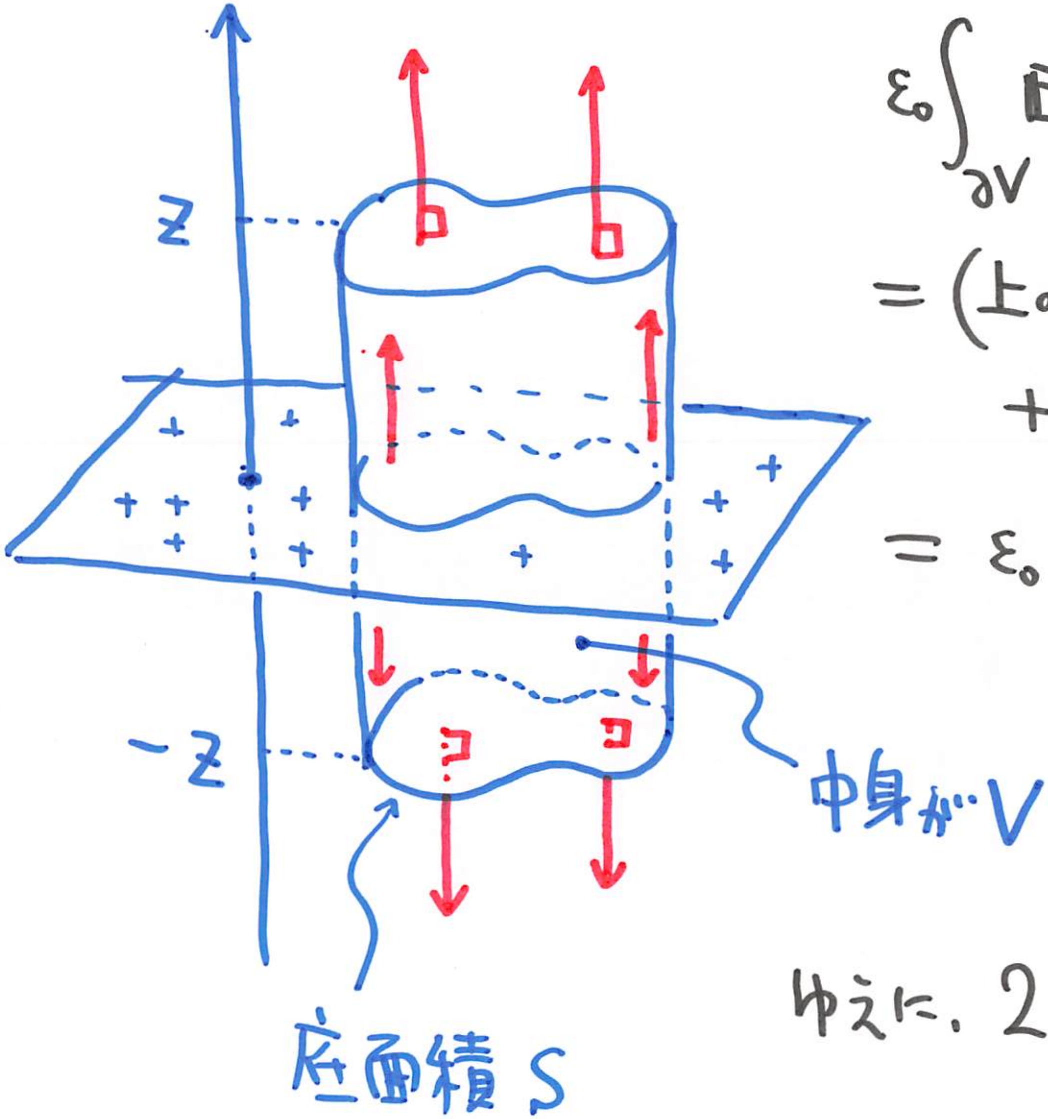
$$E_z = f(z)$$

$$f(-z) = -f(z)$$

という形しかありえないところまで絞りこめる。



領域Vとして、z軸に垂直な底面を持ち、z軸に平行な高さ方向を持つ、底面積S，上の底面が座標zのところ，下の底面が座標−zの平面上にあるような柱形をえらぶ。これにガウスの法則を適用。



$$\varepsilon_0 \int_{\partial V} E \cdot n \, dS$$

$=$ (上の底面を貫く電束) $+$ (下の底面を貫く電束) $+$ (側面を貫く電束)

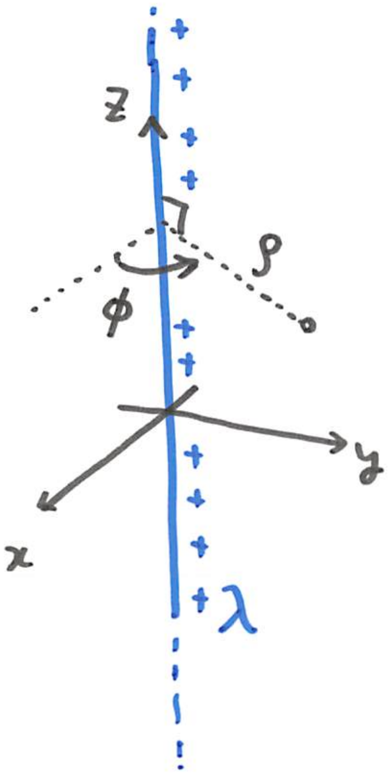
$$= \varepsilon_0 E_z \cdot S + \varepsilon_0 E_z \cdot S + 0$$

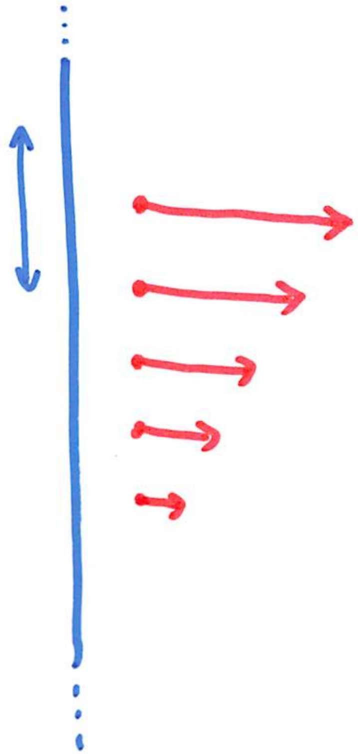
また、$\int_V \rho \, dV =$ (柱形の中にある電荷) $= \sigma \cdot S$

ゆえに、$2\varepsilon_0 E_z \cdot S = \sigma \cdot S$　$\therefore \boxed{E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

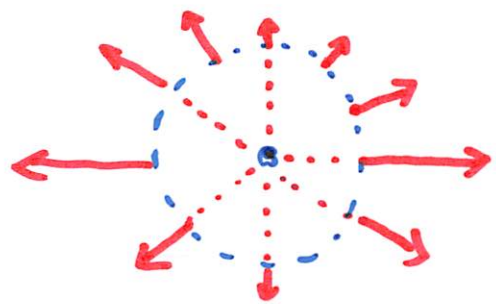
無限に長い直線に一定の線電荷密度λがある場合の電場を求める。

まず対称性を考えて、電場のありようを絞りこむ。

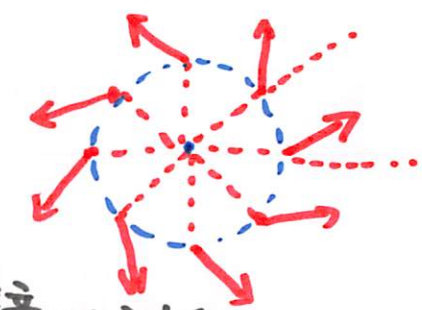




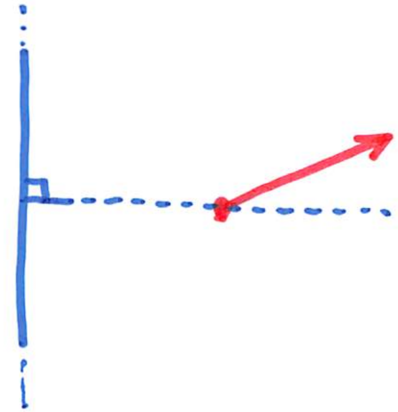
z軸まわりの回転対称性からこういう電場はありえない。



z軸~~に平行~~を含む平面に関する鏡映対称性により、こういう電場はありえない。



z軸に垂直な平面に関する鏡映対称性により、こういう電場はありえない。

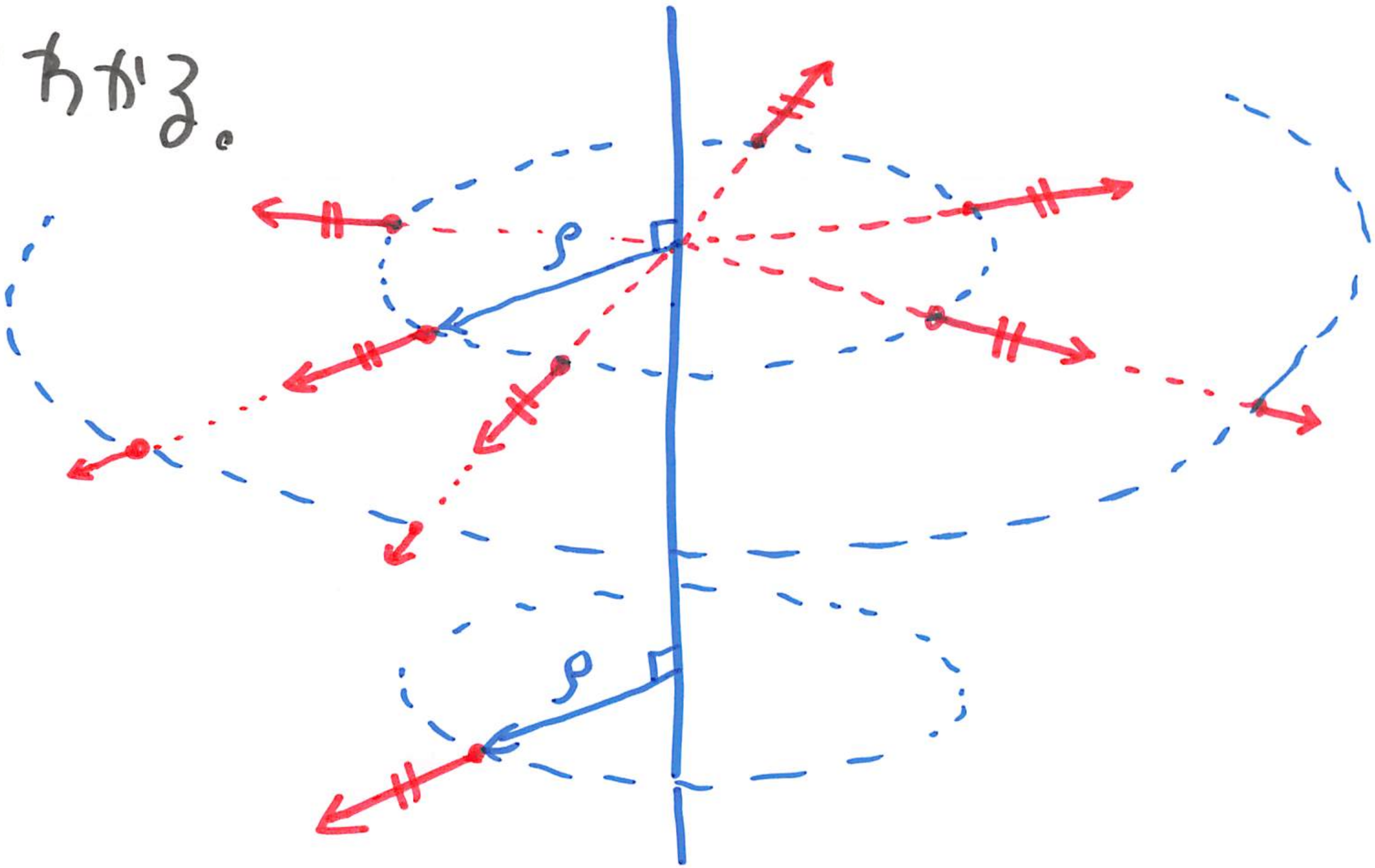


z軸方向の平行移動で電荷分布は不変なので、電場もz方向の平行移動で不変なはず。z座標に依存して電場が変化することはありえない。

対称性の考察だけで、

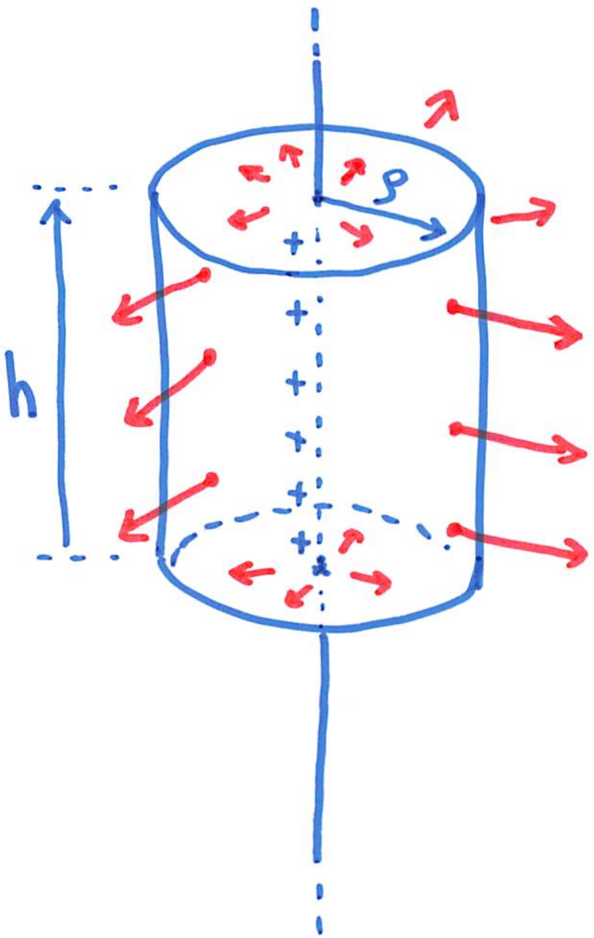
電場$\mathbb{E}$は $\mathbb{e}_\rho$ の方向（座標値ρが増大する方向）を向いており、
ρ = z軸からの距離

電場の大きさはρだけの関数であることがわかる。



領域Vとして、z軸を中心軸とし、半径ρの円柱を選ぶ。
，高さh

~~ガウスの法則を適用~~



$$\varepsilon_0 \int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

＝（上の面を貫く電束）＋（下の面の電束）＋（側面を貫く電束）

$$= 0 + 0 + \varepsilon_0 E \cdot 2\pi\rho \cdot h$$

一方で、$\int_V \rho \, dV$ ＝（円柱内部にある電荷の総量）

$$= \lambda \cdot h$$

ガウスの法則より $\varepsilon_0 E \cdot 2\pi\rho h = \lambda h$

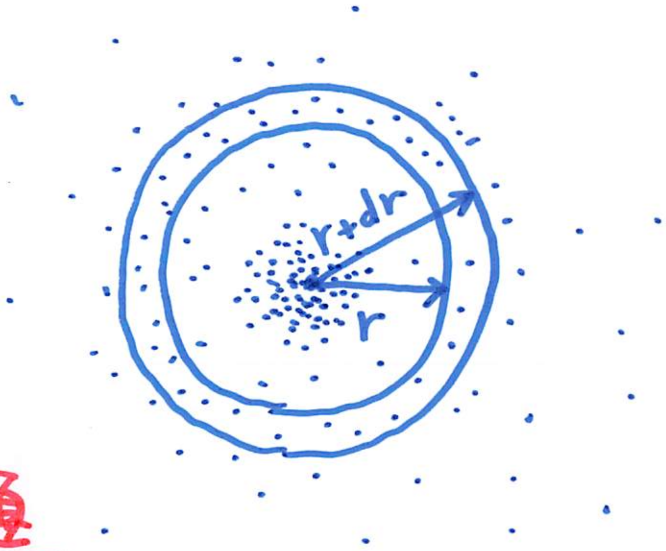
$$\therefore \boxed{E = \frac{\lambda h}{2\pi\varepsilon_0 \rho h} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho}}$$

球対称な電荷分布の場合,

電荷密度 $\rho(x,y,z)$ が 原点からの距離 $\overset{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\overset{\shortparallel}{r}}$ だけの関数 $\rho(r)$ になっている場合,

半径 r と $r+dr$ の間の球殻にある電荷 $dQ = 4\pi r^2 dr \cdot \rho(r)$

$$= 4\pi \rho(r) r^2 dr$$

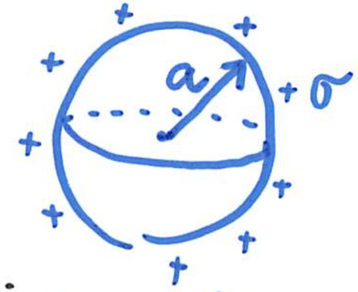


半径 r の球体内にある電荷

$$Q(r) = \int_0^r 4\pi \rho(r) r^2 dr$$

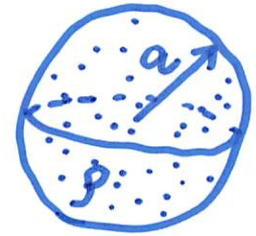
課題

問8-12 (iii) 球殻の表面だけに電荷がある.



$q = 4\pi a^2 \cdot \sigma$

(iv) 球体の内部に一様な密度で電荷がある.



$Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \rho$

電荷分布の対称性を言え.
電場のありよう, 関数形を言え(対称性から絞りこめ)
電場の大きさを表す式を求めよ.