物理学基礎 II

講義８の板書ノート

電位と等電位面

谷村　省吾

電位の定義

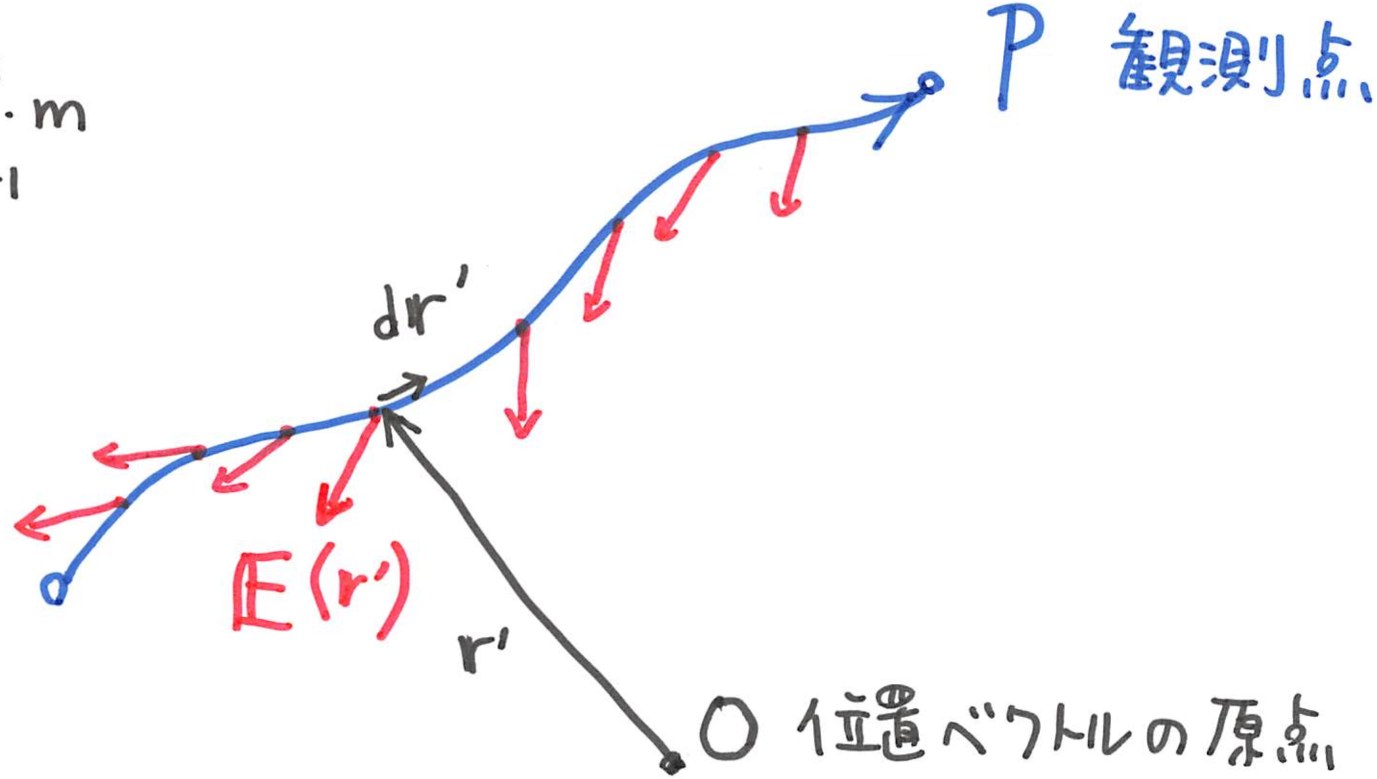
基準点P_0から、電場$\mathbb{E}$に逆らって単位電荷(1クーロン)の点電荷を点Pに運ぶのに要する仕事を点Pの電位$\phi(P)$と定める:

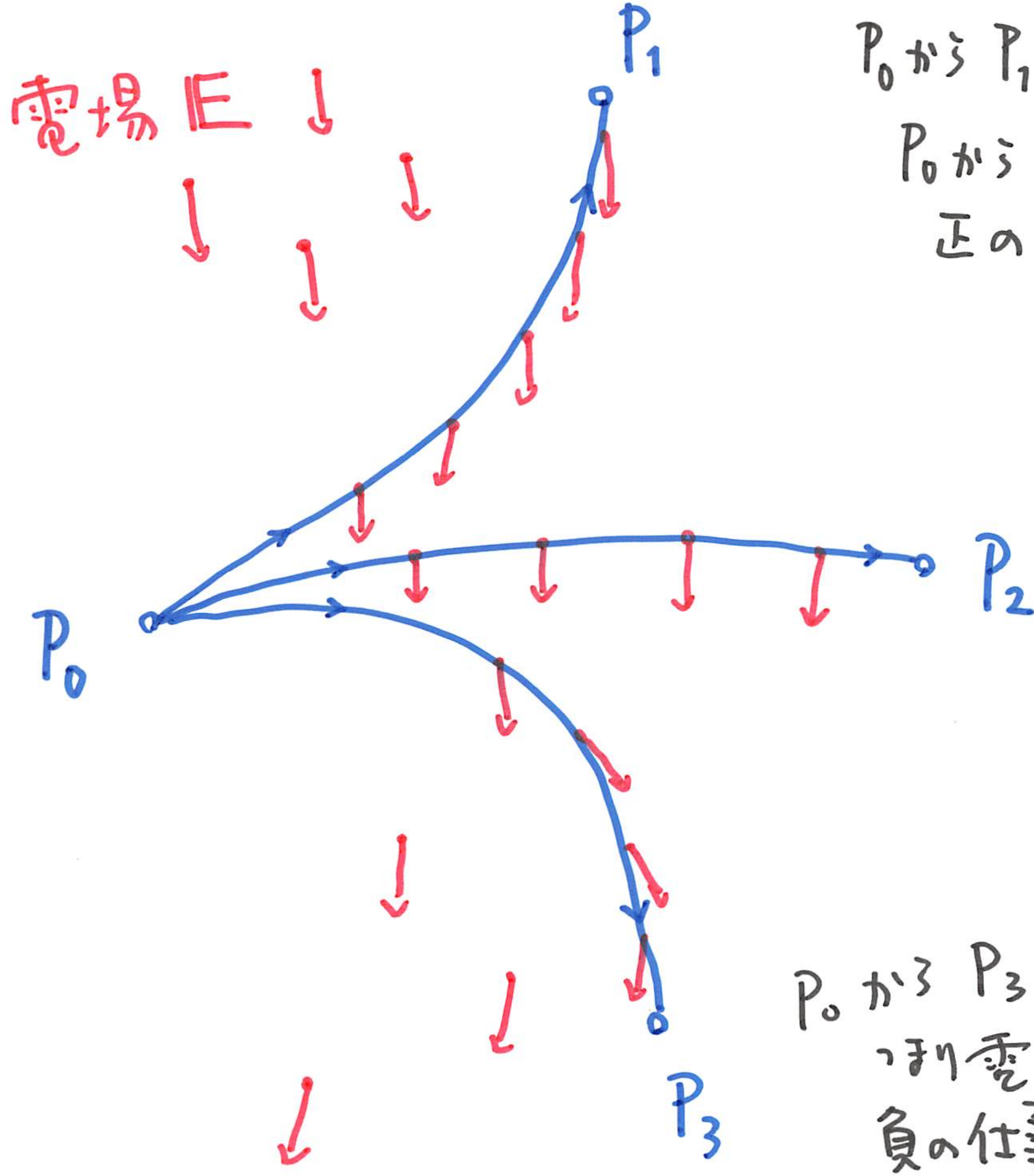
$$\phi(P) := -\int_{P_0}^{P} \mathbb{E}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}'$$

電位の単位

ボルト

$$V = N\cdot C^{-1}\cdot m$$
$$= J\cdot C^{-1}$$





P_0からP_1への進行方向は電場に逆行している。
P_0からP_1に正電荷を運ぶためには
正の仕事をしてやらないといけない。

$$\therefore\ \phi(P_0) < \phi(P_1)$$

P_0からP_1への進行方向は
つねに電場と直交している。
運ぶ仕事はゼロで済む。

$$\therefore\ \phi(P_0) = \phi(P_2)$$

P_0からP_3への進行方向は電場に順行している。
つまり電場にプッシュしてもらっている。
負の仕事で運べる。

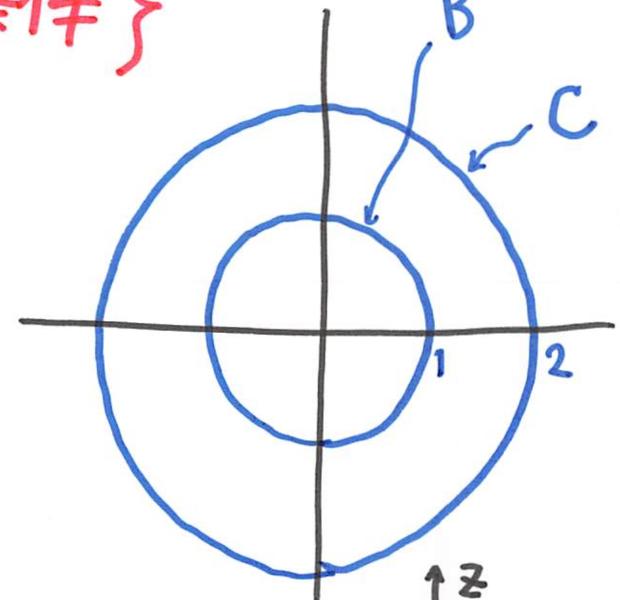
$$\phi(P_0) > \phi(P_3)$$

集合の書き方.

集合 $A = \{ x$ は整数 $\mid 1 \leqq x \leqq 100$ かつ x は 12 で割り切れる$\}$ 内包的記述

$= \{ 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96 \}$ 外延的記述

$= \{$ 元(げん) $\mid$ 集合 A の元が満たすべき条件 $\}$

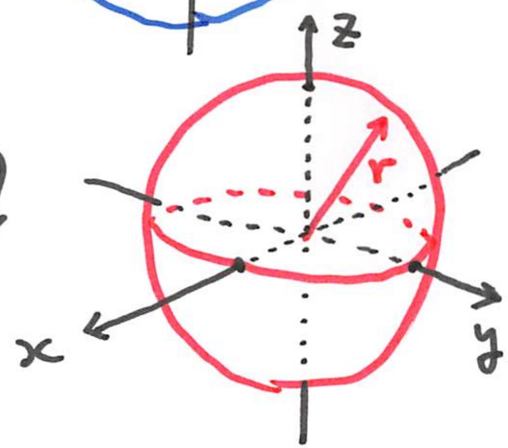


集合 $B = \{ (x, y) \mid x, y$ は実数 かつ $x^2 + y^2 = 1 \}$

$C = \{ (x, y) \mid x, y$ は実数 かつ $x^2 + y^2 = 4 \}$

実数 $r > 0$ を与えて

$D_r = \{ (x, y, z) \mid x, y, z$ は実数 かつ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \}$

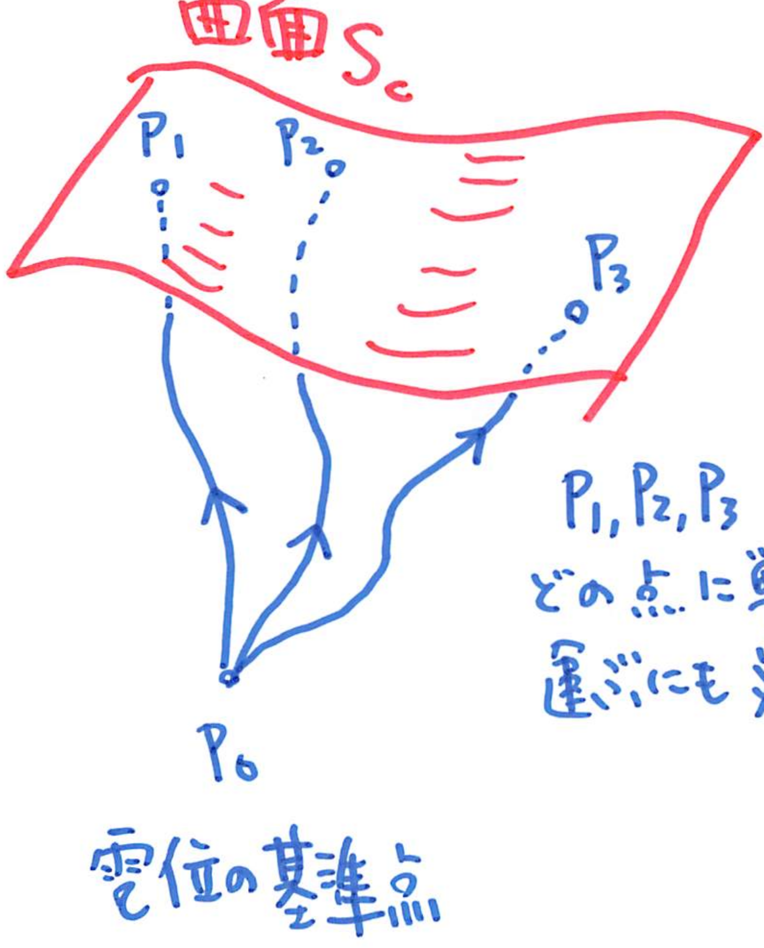


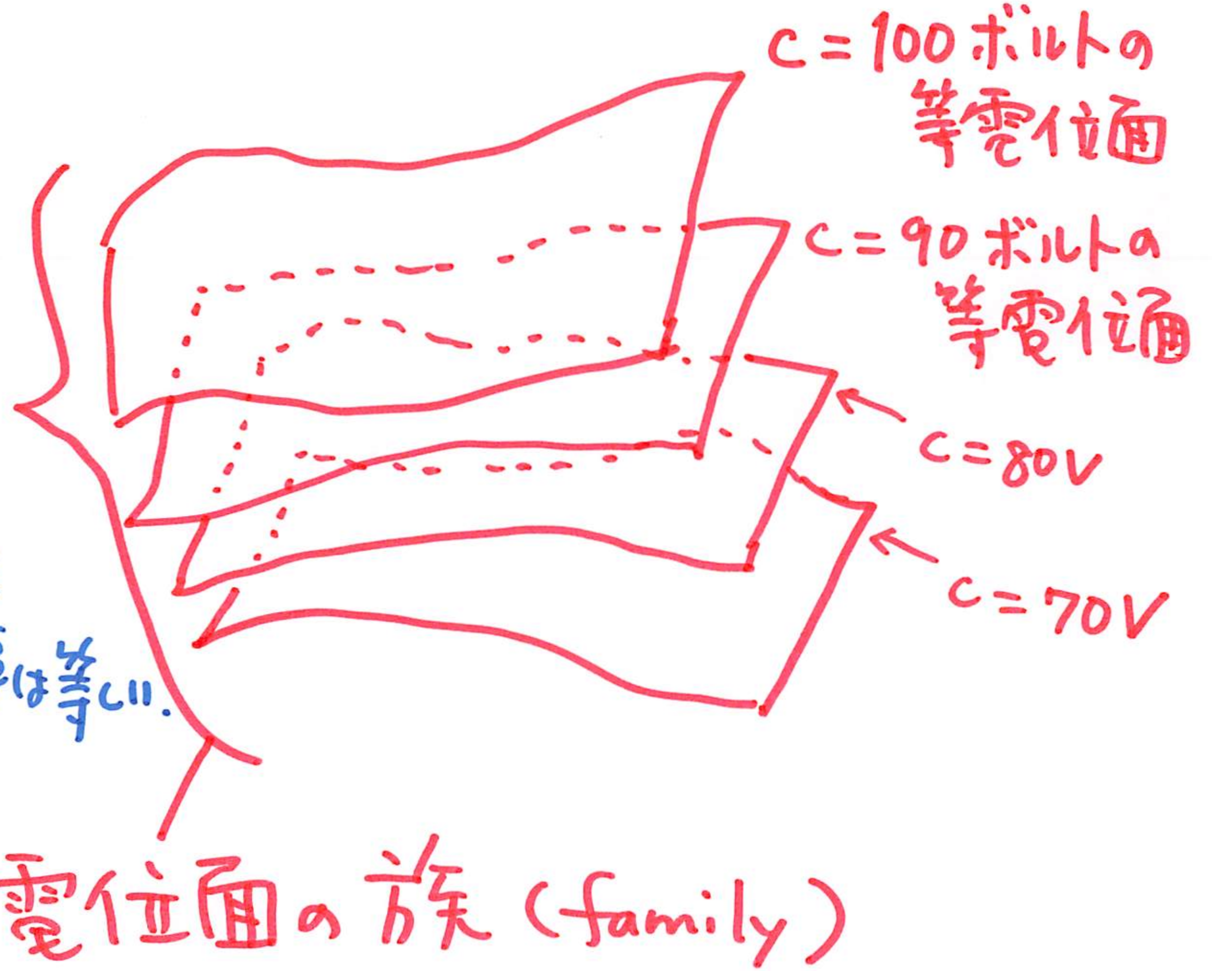
等電位面 (equipotential surface, level set)

電位場 ϕ と定数 c に対して

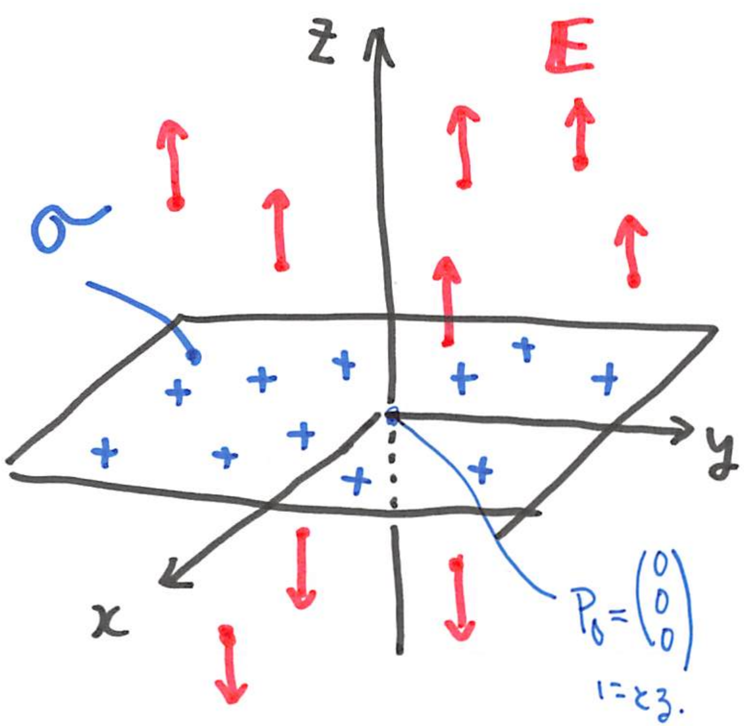
$$S_c = \phi^{-1}(c) := \{\text{点}\,P \mid \phi(P) = c\}$$

= 電位が c であるような点 P 全体の集合.





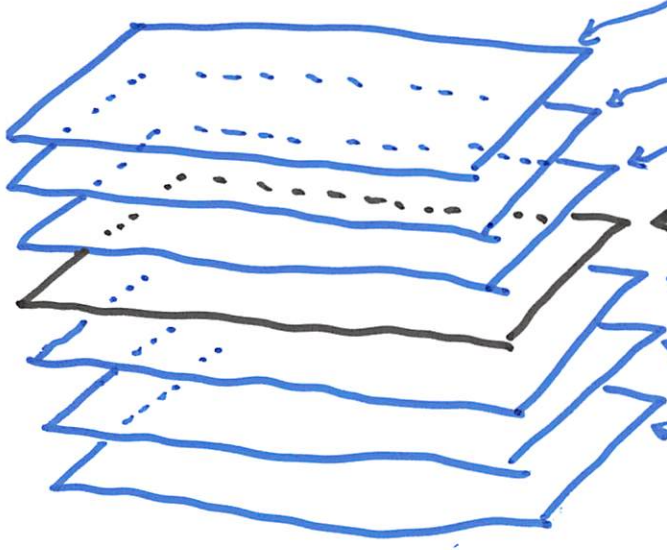
例. 一定の面電荷密度σを持つ平面電荷が作る電場と電位



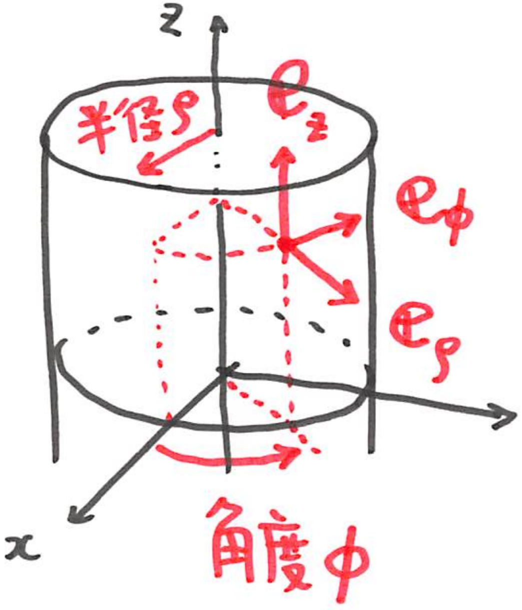
$$\text{電場}\ \mathbf{E}=\begin{pmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{pmatrix} \qquad E_x=0,\ E_y=0$$

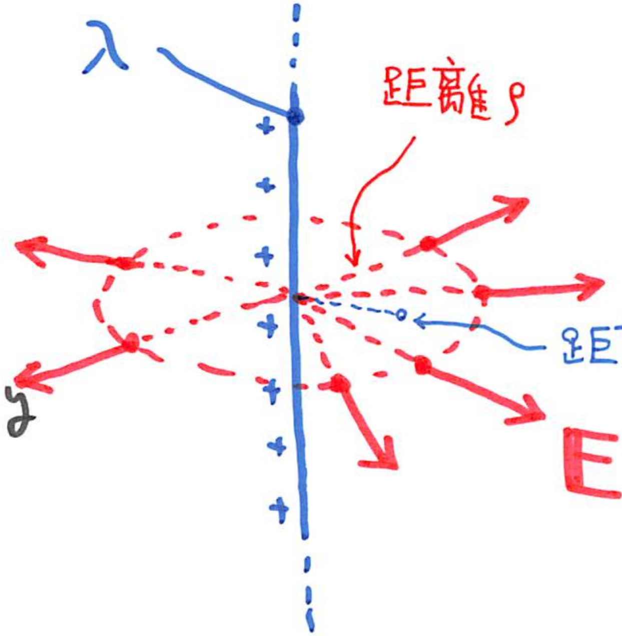
$$E_z=\begin{cases}+\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & (z>0)\\[2ex] -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & (z<0)\end{cases}$$

$$\text{電位}\ \phi=-\int_{P_0}^{P}E_z\,dz=\begin{cases}-\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}z & (z>0)\\[2ex] +\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}z & (z<0)\end{cases}$$



例. 一定の線電荷密度λを持つ直線電荷が作る電場と電位



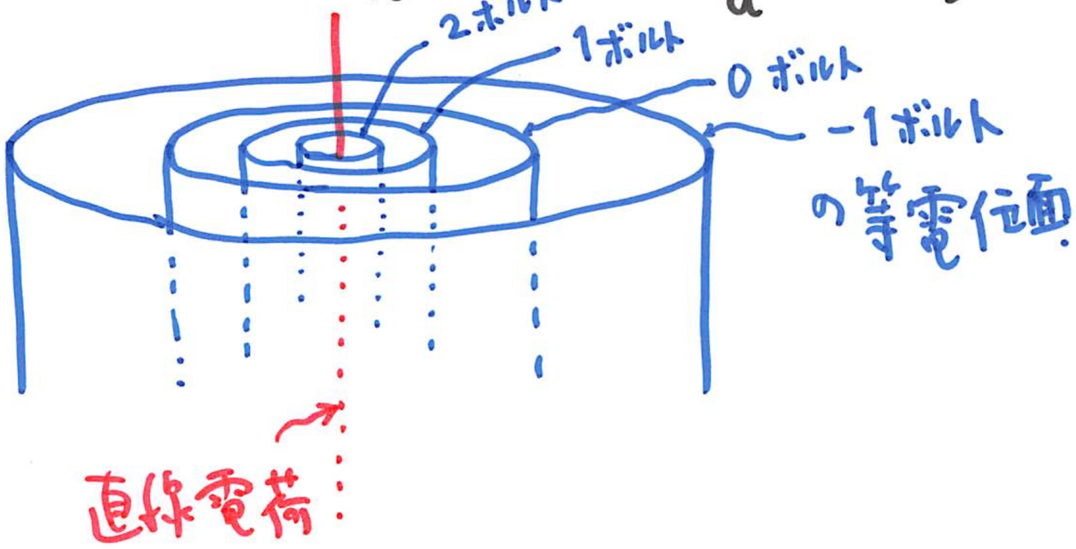


電場 $\mathbf{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\,\mathbf{e}_\rho$

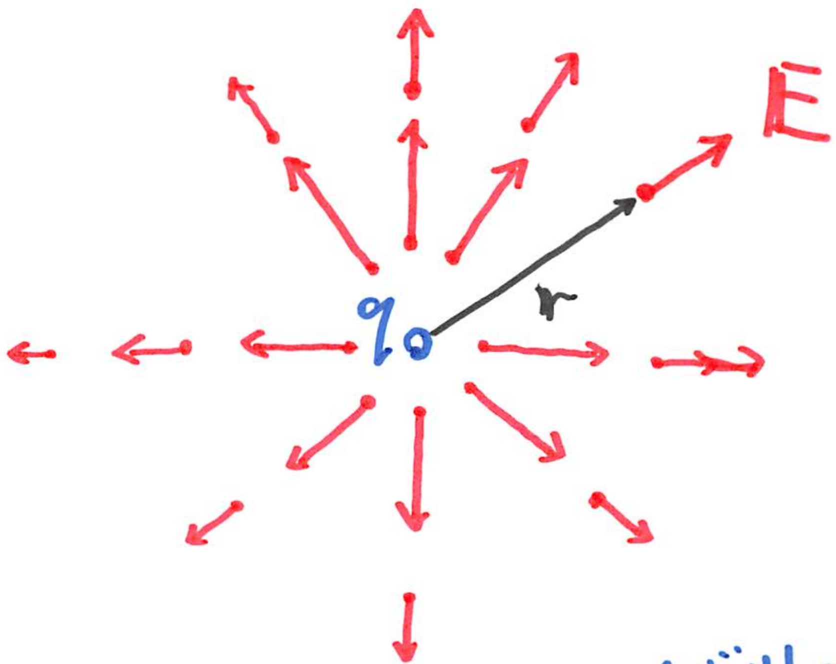
電位 $\phi = -\displaystyle\int_{P_0}^{P} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\int_a^\rho \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\,d\rho = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\log\rho\Big]_a^\rho$

$= -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\log\rho - \log a\right)$

$= -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\left(\dfrac{\rho}{a}\right).$



例. 点電荷 q が作る電場と電位



$\|\mathbf{r}\| = r$ とおいて

電場 $\mathbf{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \dfrac{\mathbf{r}}{r}$

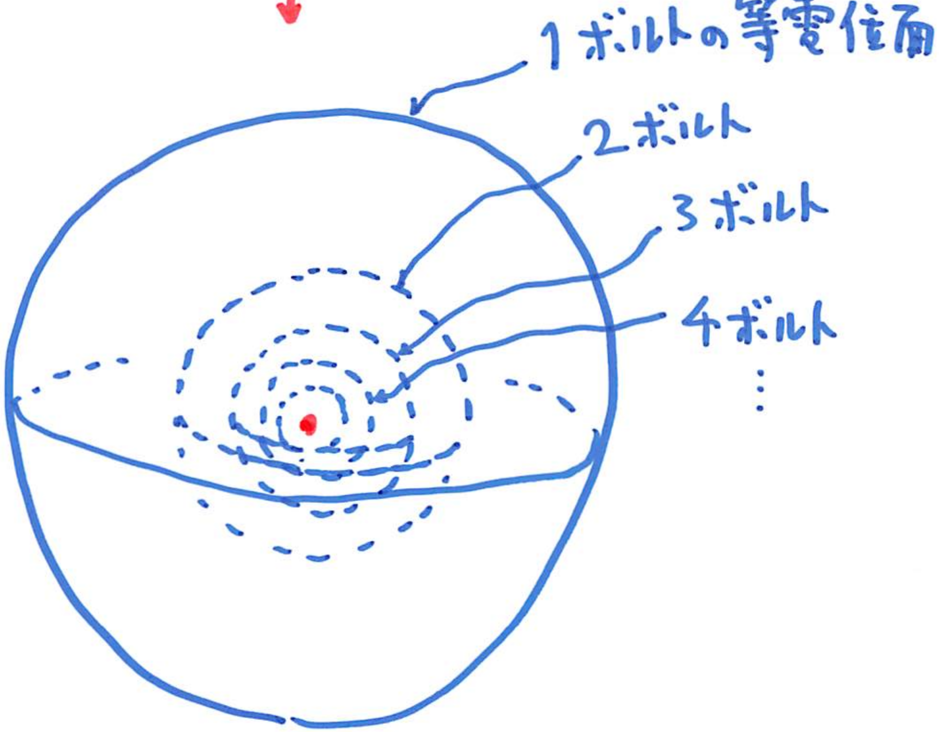
電位 $\phi = -\displaystyle\int_{P_0}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$

$P_0 = \infty$ 無限遠方

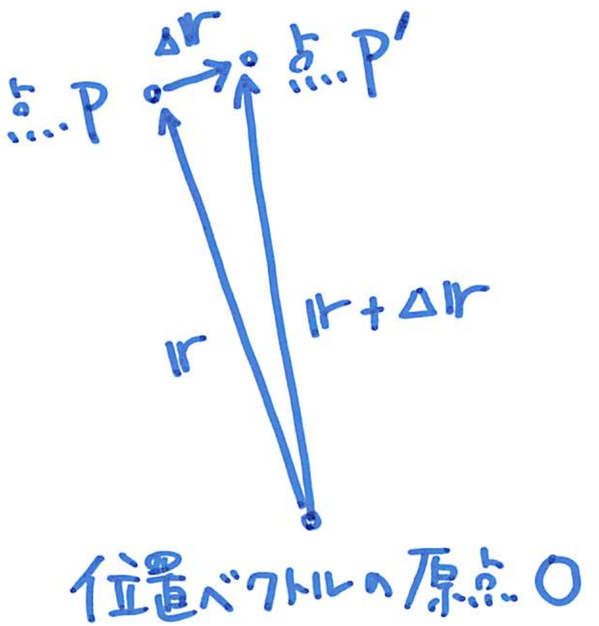
$$= -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



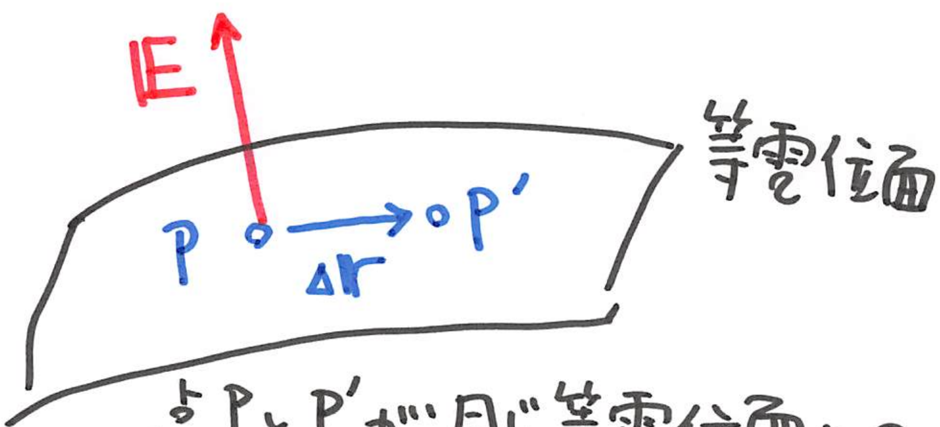
電位の幾何学的性質



点PとP'の電位差

$$\phi(P')-\phi(P) = -\int_{P_0}^{P'}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} + \int_{P_0}^{P}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= -\int_{P_0}^{P}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} - \int_{P}^{P'}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} + \int_{P_0}^{P}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$



$$\left\{\begin{aligned} &= -\int_{P}^{P'}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \\ &= -\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot\Delta\mathbf{r} \end{aligned}\right.$$

点PとP'が同じ等電位面にのっかっている。

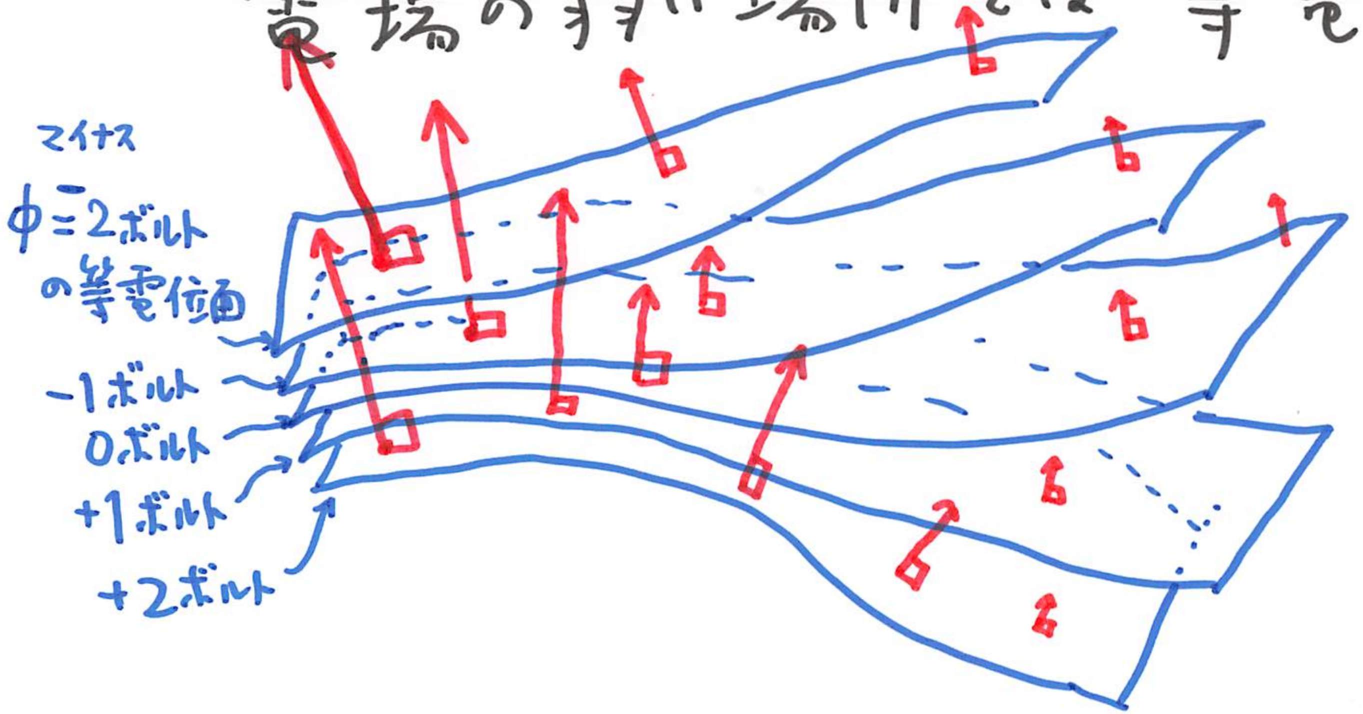
$\Longleftrightarrow \phi(P)=\phi(P') \Longleftrightarrow \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{r}=0 \Longleftrightarrow$ $\mathbf{E}$と$\Delta\mathbf{r}$は直交(垂直)

電位差 $\Delta\phi = -\mathbb{E}\cdot\Delta\mathbb{r}$

∴ 電場の強い場所ほど、電位の変化が激しい.

まとめると

- 等電位面と電場ベクトルは直交する.
- 電場の強い場所ほど等電位面の族は密集し、
  電場の弱い場所では等電位面の族はまばらになる.

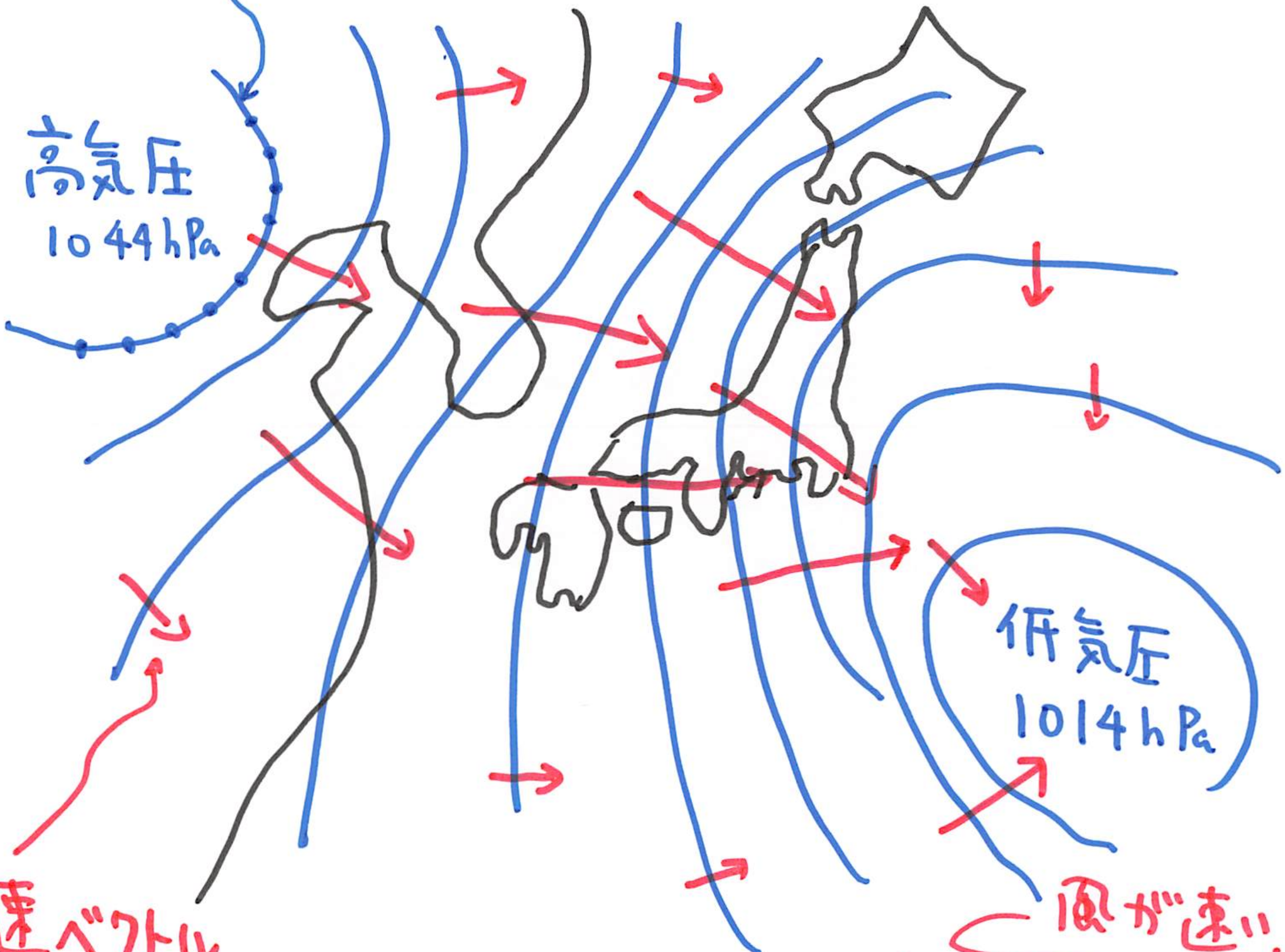


- 電位の高いところから電位の低いところに ~~向かう~~ 電場ベクトル ~~がある~~. は向いてる

アナロジー　$\phi(p)$ 地表面上の点pにおける気圧。

だいたい 1000〜1050 hPa
ヘクトパスカル

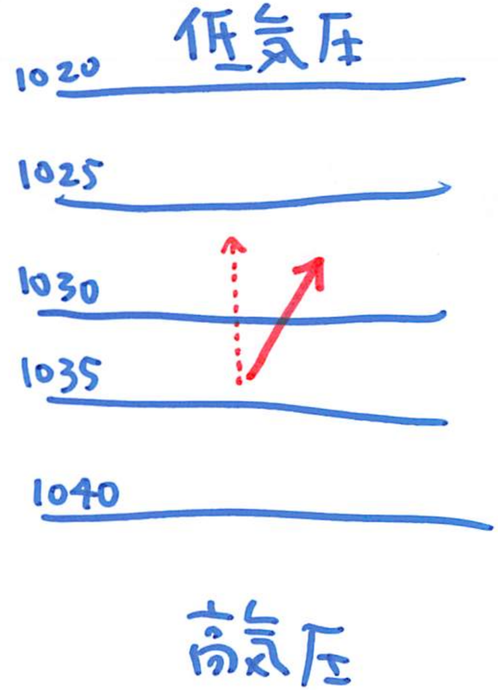
等圧線：気圧が等しい点がつらなった曲線



風速ベクトル

等圧線がこみいっている場所ほど気圧の変化が激しく風が速い。

実際の風はコリオリカの影響で北半球では、風向は等圧線に対して右寄りに傾く。



電位差の式　$\Delta\phi = -\mathbb{E}\cdot\Delta\mathbb{r}$ を座標を使って書くと、

$$\phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \phi(x,y,z) = -\left\{E_x\Delta x + E_y\Delta y + E_z\Delta z\right\}$$

$\Delta y = 0$, $\Delta z = 0$ とおいて $\Delta x \to 0$ の極限をとると、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x,y,z)}{\Delta x} = -E_x$$

となるので、 $E_x = -\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$.

同様に　$E_y = -\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$, $E_z = -\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$

まとめて、

マイナス

$$\mathbb{E} = (E_x, E_y, E_z) = -\nabla\phi = -\mathrm{grad}\,\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

と書く。

ナブラと読む

nabla

∇ と書く。

グラディエントと読む

gradient 勾配・傾きのこと。

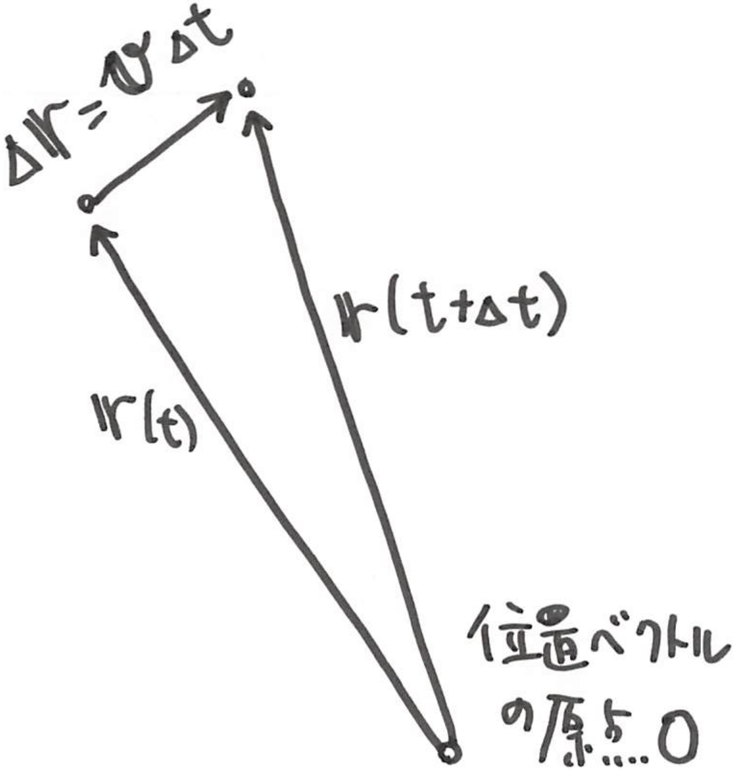
質点の運動と運動方程式

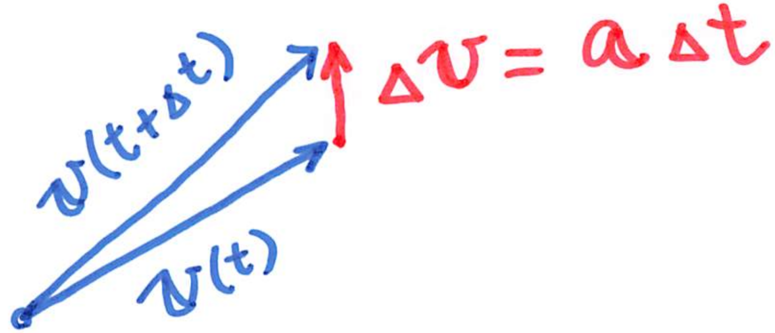
時刻 t における質点の位置 $\mathbb{r}(t)$

速度ベクトル $\mathbb{v}(t) = \dfrac{d\mathbb{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathbb{r}(t+\Delta t) - \mathbb{r}(t)}{\Delta t}$

加速度ベクトル $\mathbb{a}(t) = \dfrac{d\mathbb{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbb{r}}{dt^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathbb{v}(t+\Delta t) - \mathbb{v}(t)}{\Delta t}$

質量 m の質点が力 $\mathbb{F}$ を受けているときの運動方程式 $m\dfrac{d\mathbb{v}}{dt} = \mathbb{F}$





質量 m, 電荷 e の質点が静電場 $\mathbb{E}$ だけから力を受けていたら,

$$m\frac{d\mathbb{v}}{dt} = \mathbb{F} = e\mathbb{E} = -e\nabla\phi$$: 運動方程式

両辺にベクトル $\mathbb{v}$ を内積すると、

$$\boxed{m\mathbb{v}\cdot\frac{d\mathbb{v}}{dt} = -e\mathbb{v}\cdot\nabla\phi} \quad \cdots\cdots (*)$$

(左辺) の $\mathbb{v}\cdot\frac{d\mathbb{v}}{dt}$

$$= v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt} + v_z\frac{dv_z}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}v_y^2 + \frac{1}{2}v_z^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathbb{v}\cdot\mathbb{v}\right)$$

(右辺) の $\mathbb{v}\cdot\nabla\phi$

$$= v_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + v_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + v_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= \frac{dx}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{d}{dt}\phi(x(t), y(t), z(t))$$

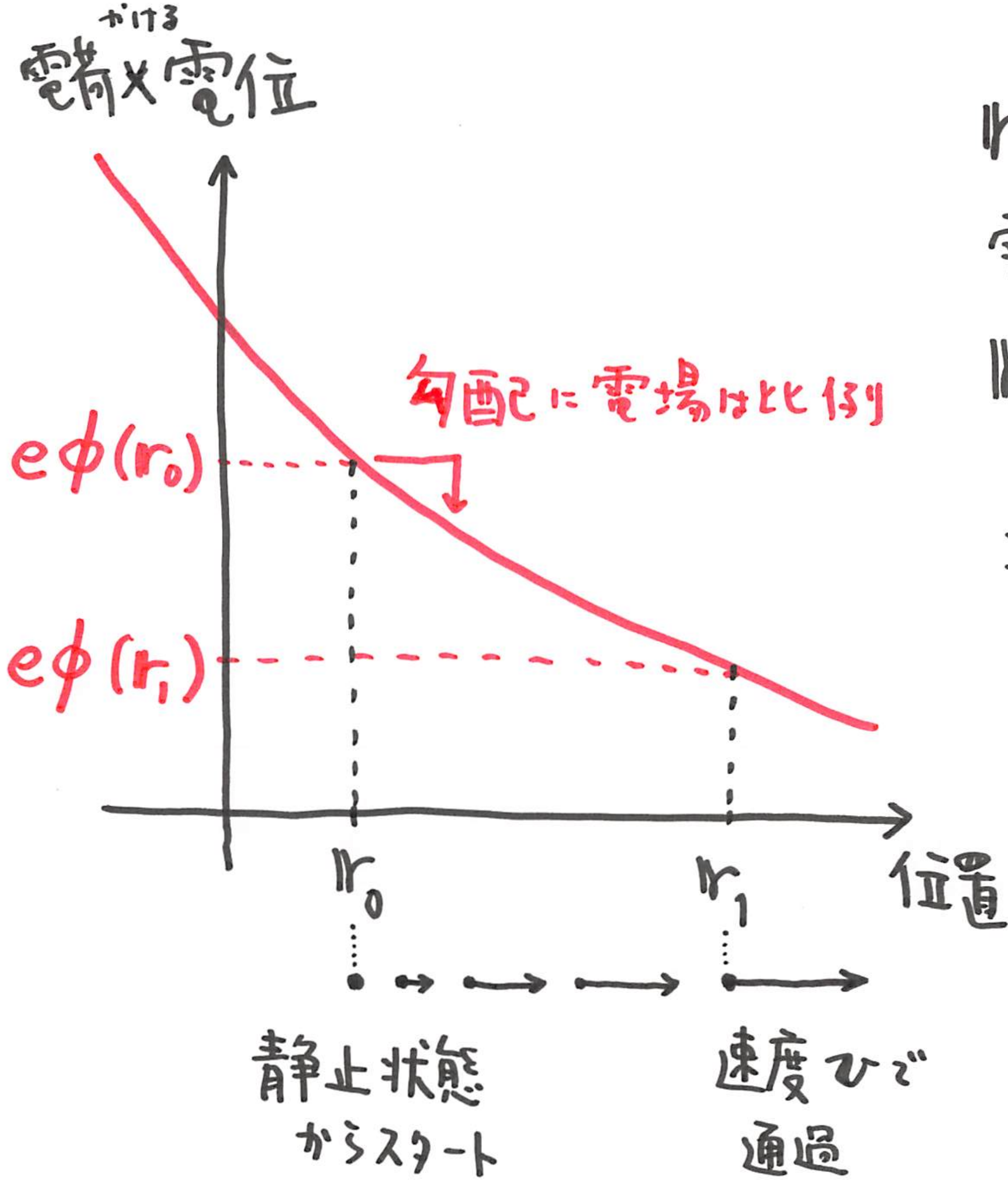
そうすると(*)は $m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right) = -e\frac{d}{dt}\phi(\boldsymbol{r}(t))$ となり、

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + e\phi(\boldsymbol{r}(t))\right\} = 0$$ となる.

質点の力学的エネルギー $\mathcal{E} := \underbrace{\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}_{\text{運動エネルギー}} + \underbrace{e\phi(\boldsymbol{r}(t))}_{\text{位置エネルギー}}$

エネルギー保存則 $\frac{d}{dt}\mathcal{E} = 0.$

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0).$$



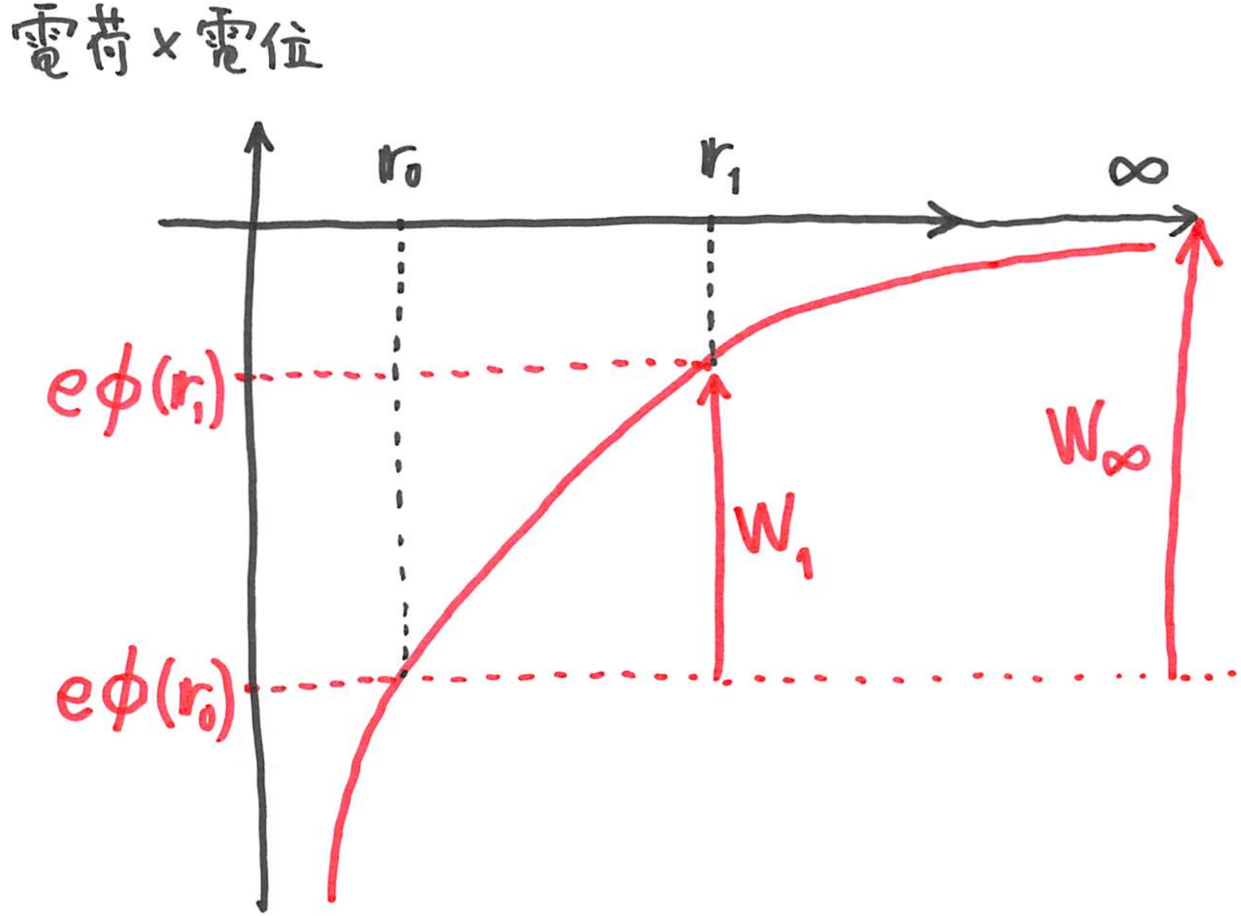
$\mathbf{r}_0$の位置に静止していた荷電粒子が、電場から力を受けて動き出し、$\mathbf{r}_1$に到達（通過）するときの速さを$\|v\|$とすると、

エネルギー保存則より

$$\mathcal{E} = e\phi(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2}m\|v\|^2 + e\phi(\mathbf{r}_1)$$

$$\therefore \frac{1}{2}m\|v\|^2 = e\phi(\mathbf{r}_0) - e\phi(\mathbf{r}_1)$$

$$\|v\| = \sqrt{\frac{2e\{\phi(\mathbf{r}_0) - \phi(\mathbf{r}_1)\}}{m}}$$



r_0の位置に静止していた荷電粒子をr_1の位置まで引っぱり出すには

仕事 $W_1 = e\phi(r_1) - e\phi(r_0)$

をしてやらないといけない.

r_0の位置から無限遠方まで荷電粒子を運び出すには

仕事 $W_\infty = e\phi(\infty) - e\phi(r_0)$

$= 0 - e\phi(r_0)$

をしてやらないといけない.