物理学基礎 II

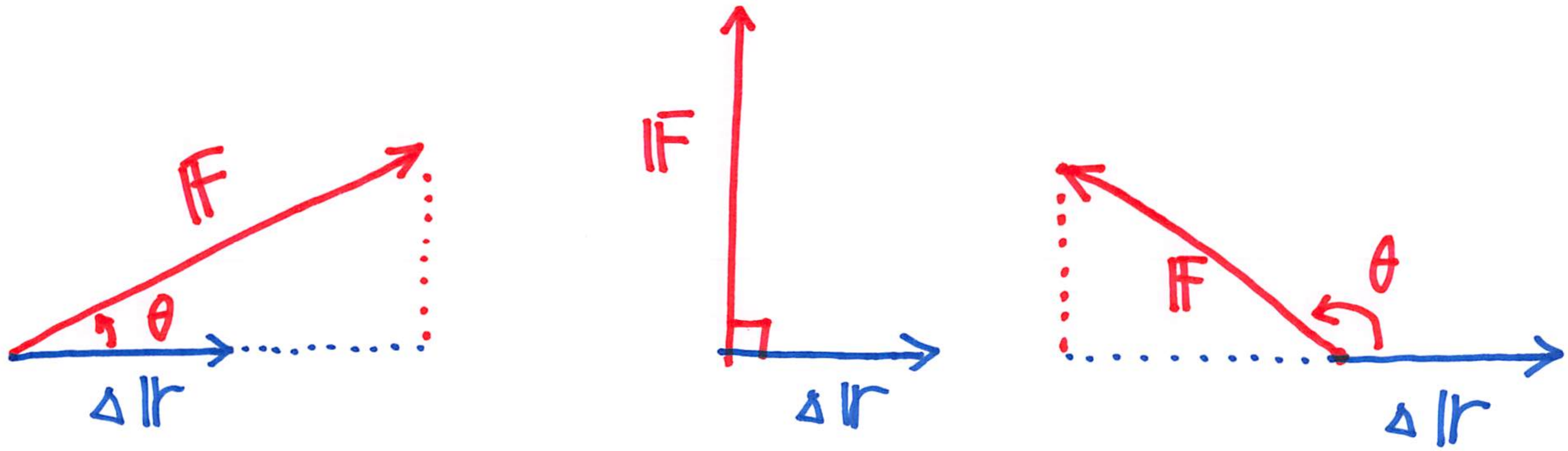
講義 7 の板書ノート

電位

谷村 省吾

ベクトルの内積の符号(正負)についてのコメント

$$\Delta W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = (F_x, F_y, F_z)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$$
$$= \|\boldsymbol{F}\|\,\|\Delta\boldsymbol{r}\|\cos\theta$$



$\theta < 90° = \dfrac{\pi}{2}$ rad の場合、

$\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} > 0$

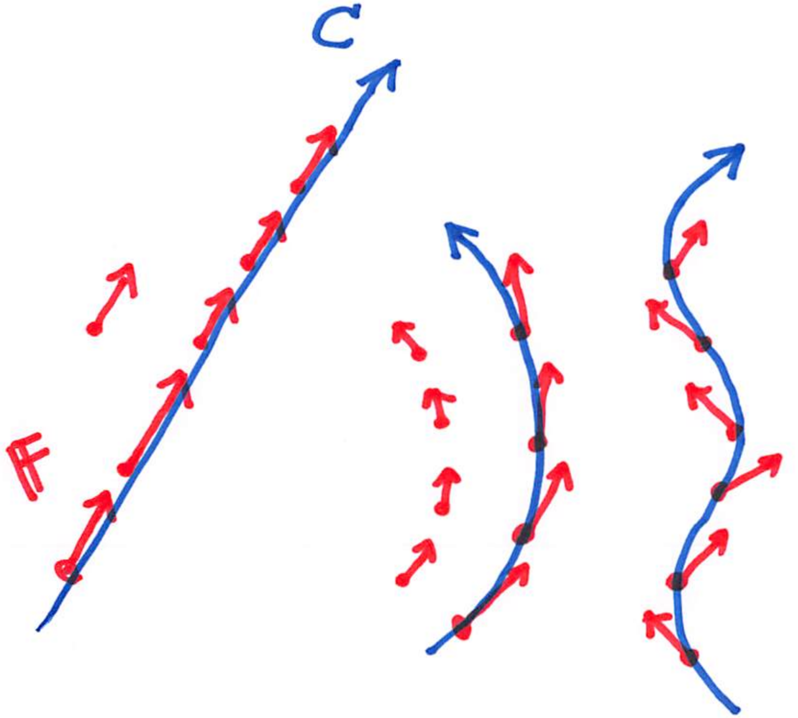
$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ rad の場合、

$\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = 0$

$\theta > \dfrac{\pi}{2}$ rad の場合、

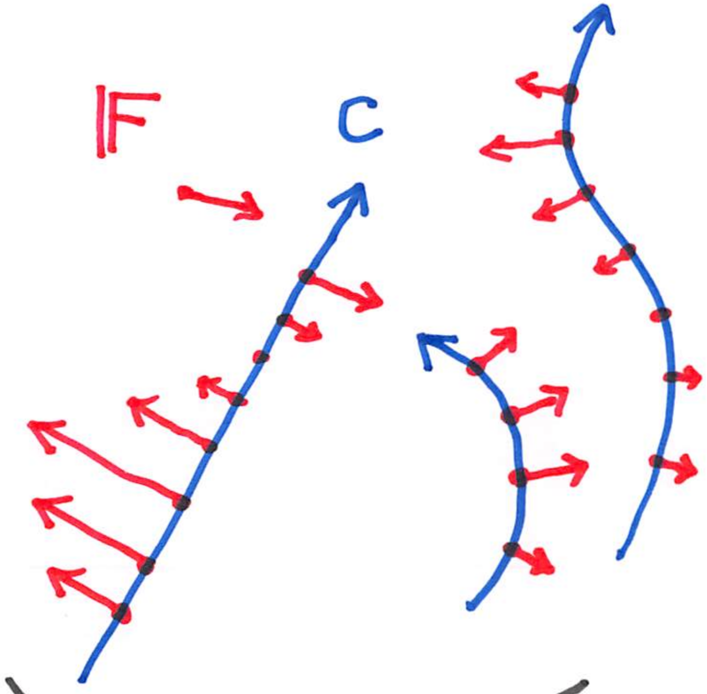
$\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} < 0$

ベクトル場の線積分の符号(正負)



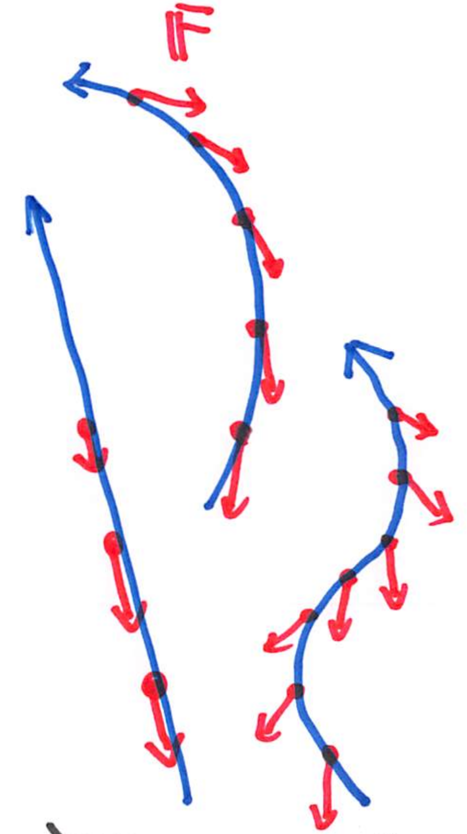
曲線Cの進行方向と
ベクトル場$\mathbf{F}$の方向が
直角よりも小さいなら、

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} > 0$$



曲線Cの進行方向と
ベクトル場$\mathbf{F}$が
つねに直交していると

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$$



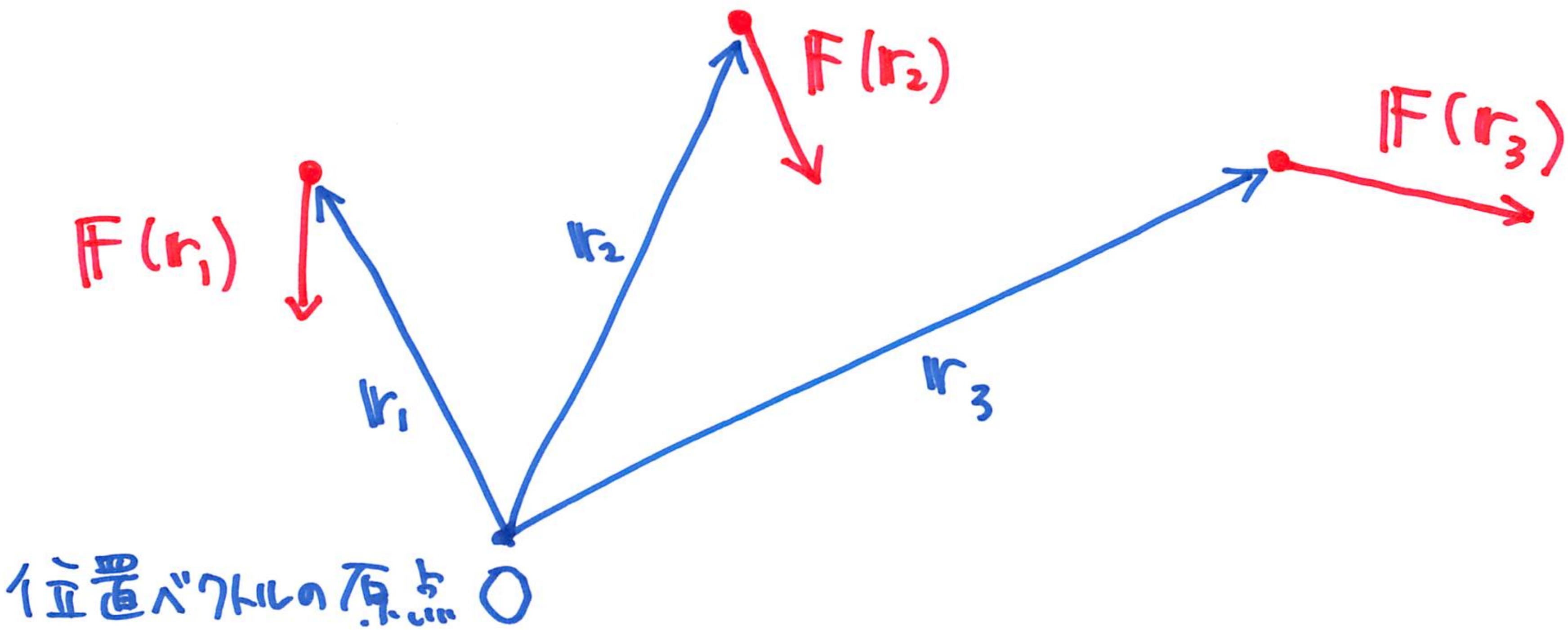
Cの進行方向と
$\mathbf{F}$の向きのなす角
が直角より大きいと

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} < 0$$

力の場 (force field)

質量や電荷など一定の性質を持つ質点を位置 $\mathbb{r}$ に置いたとき、質点が受ける力 $\mathbb{F}$ が位置 $\mathbb{r}$ だけで決まる関数 $\mathbb{F}(\mathbb{r})$ になっているならば、$\mathbb{F}(\mathbb{r})$ を力の場という。

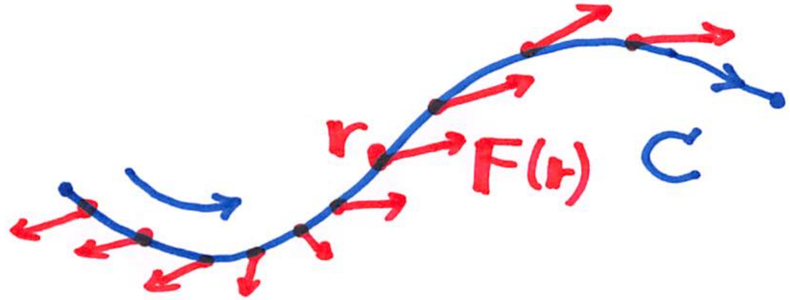
例. 重力場, 電場



力の場にしてもらう仕事

曲線Cに沿って質点が動くとき、力の場$\mathbb{F}(\mathbb{r})$から受ける仕事の総量は
(もらうエネルギー)

$$W = \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

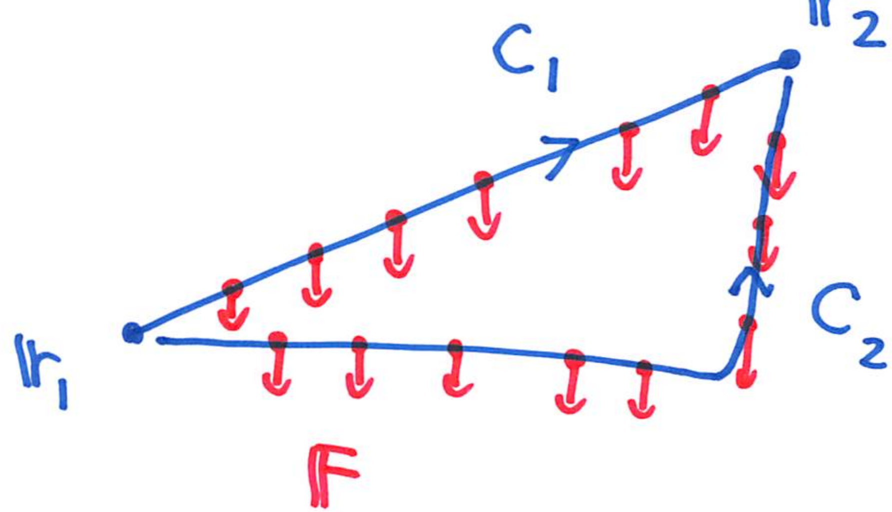


保存力の場 (conservative force field)

任意の2点$\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2$と、
$\mathbb{r}_1$を始点、$\mathbb{r}_2$を終点とする任意の2曲線C_1, C_2について

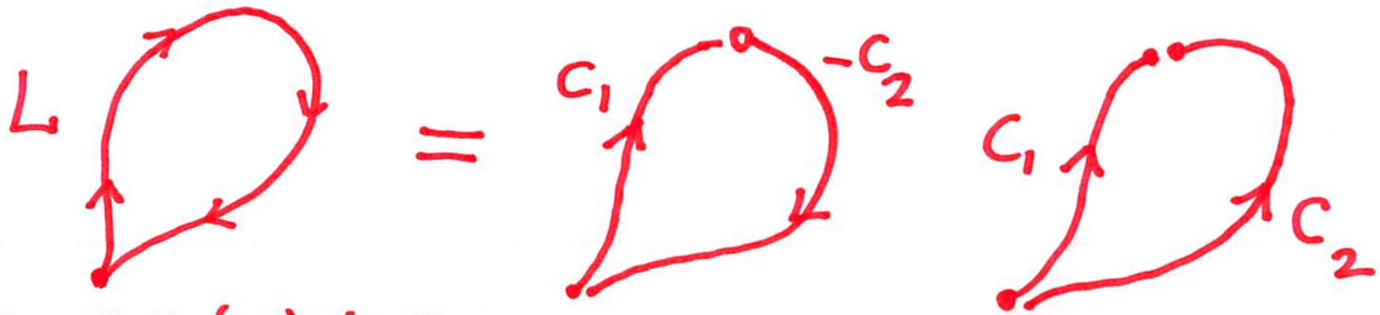
$$\int_{C_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_{C_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

が成り立つならば、
$\mathbb{F}(\mathbb{r})$を保存力という。



定理 $\mathbb{F}(\mathbf{r})$ が保存力場である $\Longleftrightarrow$ 空間中の任意のループ(閉曲線)L に対して

$$\int_{C_1}\mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{C_2}\mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad\qquad \oint_L \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}=0$$



ループを(適当に)前半と後半の曲線に分ける。　後半の曲線の向きを逆にしたものを C_2 と定める。

$$\underbrace{\oint_L \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}}_{\text{これがゼロ}}=\int_{C_1}\mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{-C_2}\mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}=\underbrace{\int_{C_1}\mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}-\int_{C_2}\mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}}_{\text{これがゼロ}}$$

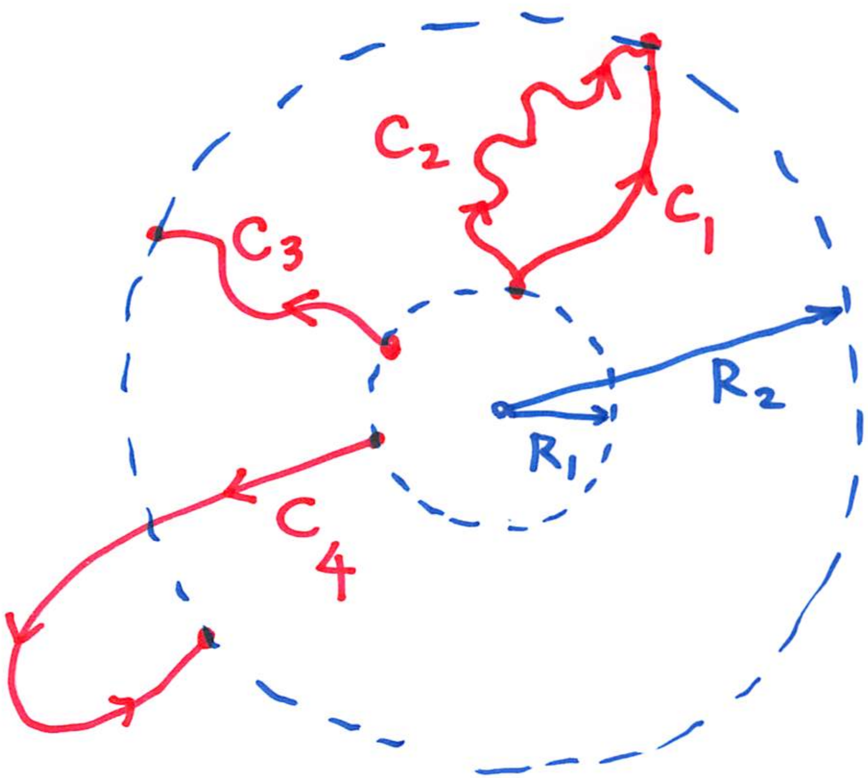
必要十分条件

定理　$\mathbb{F}(\mathbb{r})$が中心力場 $\xRightarrow{\text{ならば}}$ $\mathbb{F}(\mathbb{r})$は保存力場

なぜなら，中心力場は $\boxed{\mathbb{F}(\mathbb{r}) = f(r)\frac{\mathbb{r}}{r}}$ のような関数で表わされるベクトル場であり，

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_C f(r)\frac{1}{r}\mathbb{r}\cdot d\mathbb{r} = \int_{R_1}^{R_2} f(r)\frac{1}{r} r\,dr = \int_{R_1}^{R_2} f(r)\,dr$$

公式 $\mathbb{r}\cdot d\mathbb{r} = r\,dr$



となり，線積分の値は，曲線 C の始点，終点の力の中心からの距離だけに依存して，
曲線 C の選び方に依存しない．
だから

$$\int_{C_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_{C_2} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$$

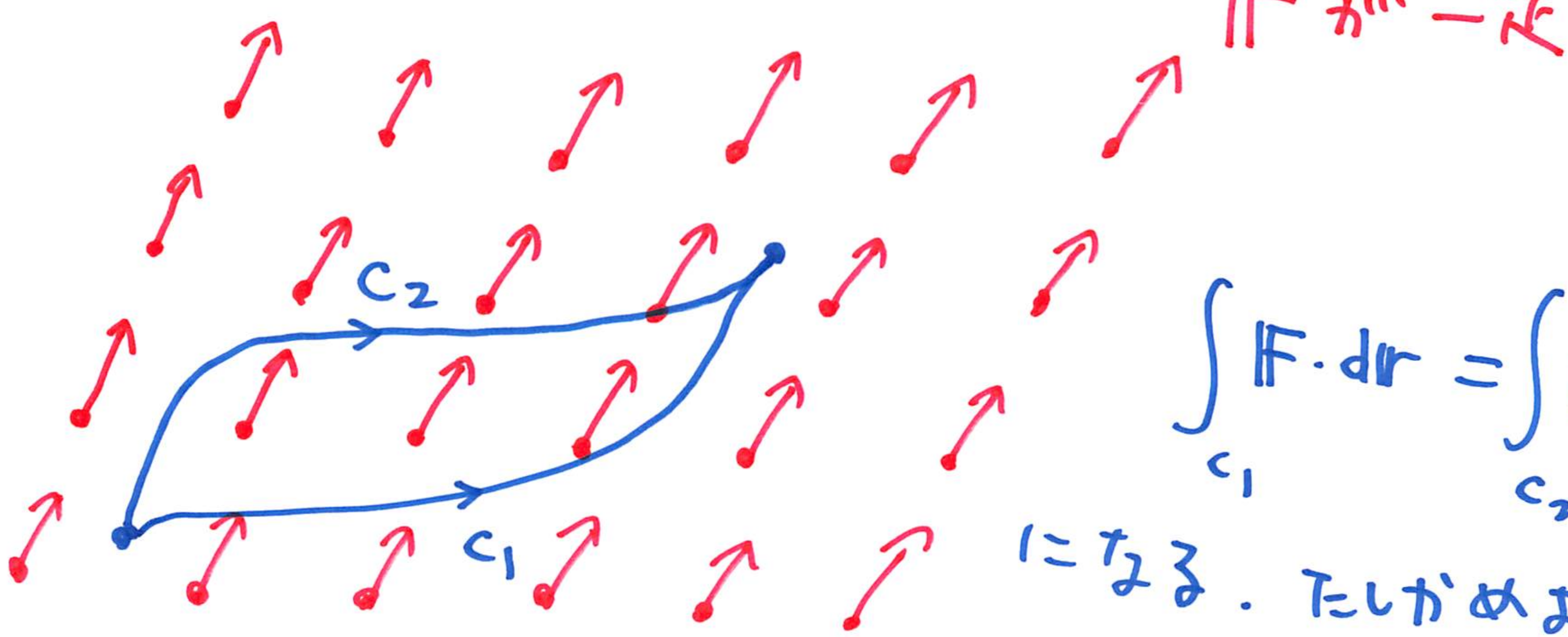
注意

「保存力場ならば中心力場である」

とは言えない！

例えば、一定の力の場 $\mathbb{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ は、中心力場ではないが、

保存力場になっている。



$$\int_{c_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_{c_2} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$$

になる。たしかめよ。

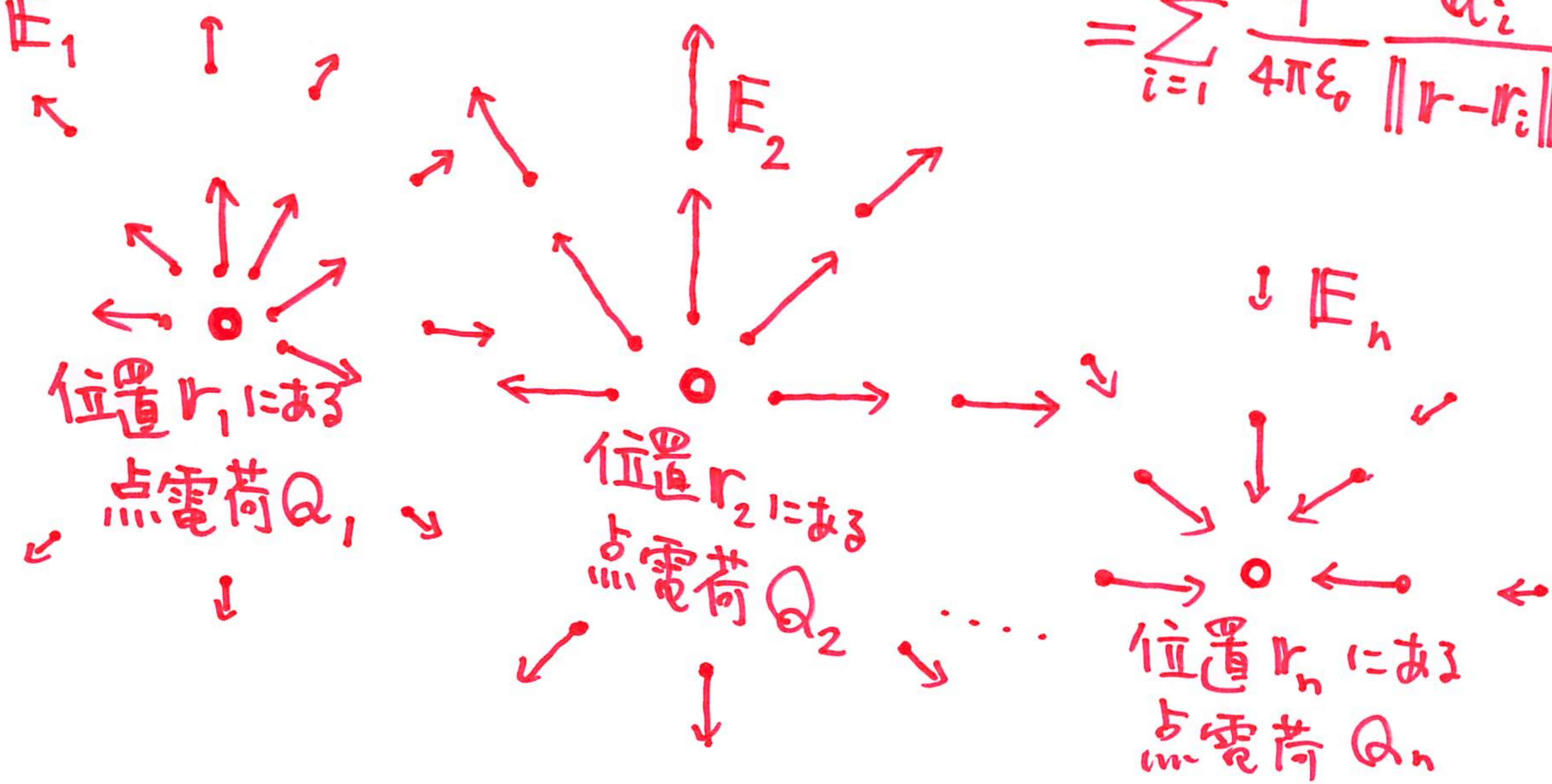
物理的事実

静電場は クーロン電場の重ね合わせである.

↳ 中心力場

合計の電場 $\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_i(\mathbb{r})$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{\|\mathbb{r}-\mathbb{r}_i\|^2} \frac{\mathbb{r}-\mathbb{r}_i}{\|\mathbb{r}-\mathbb{r}_i\|}$$



定理　静電場 $\mathbb{E}(\mathbf{r})$ は保存力場である。

中心力場なので

なぜなら、点電荷 Q_i が作る電場 $\mathbb{E}_i(\mathbf{r})$ は保存力場であり、

任意のループ L に対し、$\oint_L \mathbb{E}_i \cdot d\mathbf{r} = 0$.

重ね合わせの原理により $\mathbb{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_i$ であり、

$$\oint_L \mathbb{E}\cdot d\mathbf{r} = \oint \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_i\right)\cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} \oint \mathbb{E}_i \cdot d\mathbf{r} = 0$$

積分の線形性. $\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

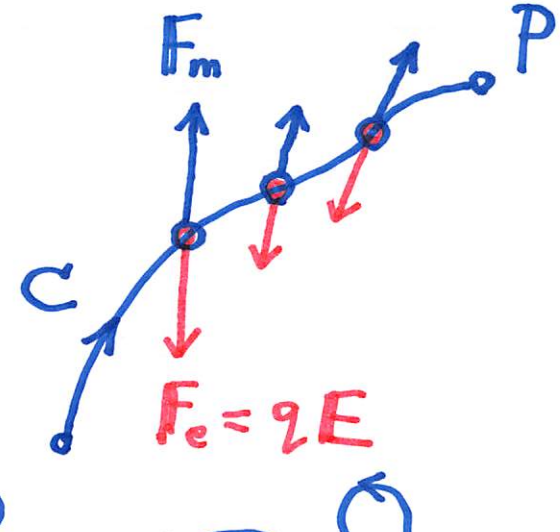
これは $\mathbb{E}(\mathbf{r})$ が保存力の場であることを示している。

静電場の中で電荷qを持つ~~点~~粒子(試験電荷という)を、そろっと運ぶのに要する仕事Wを求める。

「そろっと運ぶ」とは、力のつりあいの状態を保って、粒子が加速運動しないようにするということ：$\mathbb{F}_e + \mathbb{F}_m = 0$　　∴ $\mathbb{F}_m = -\mathbb{F}_e = -q\mathbb{E}$.

電気的な力 $\mathbb{F}_e = q\mathbb{E}$

機械的な力、人が引く・押す力と思ってよい。



粒子を押す人がする仕事 $W(C) = \int_C \mathbb{F}_m \cdot d\mathbf{r}$

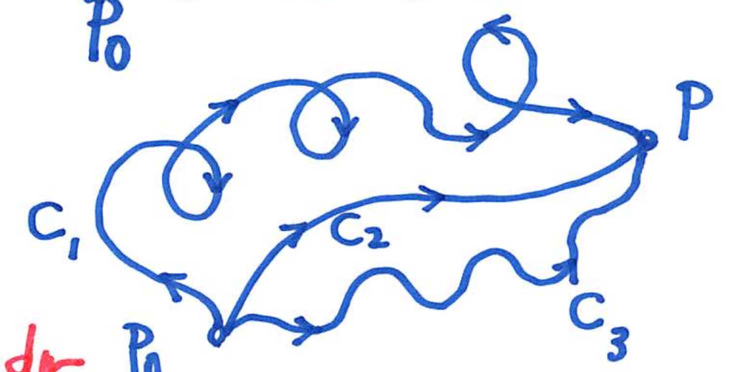
$$= -q\int_C \mathbb{E}\cdot d\mathbf{r}$$

$\mathbb{E}$が保存力の場なので

Wは始点と終点だけの関数 $W(P_0, P)$

$W(P_0 \to P)$とも

始点P_0を固定してしまえば、$W(P)$と書いてもよい。



点Pの電位 electric potential $\phi(P) := -\int_{P_0}^{P} \mathbb{E}\cdot d\mathbf{r}$

$$\boxed{\text{点 P の電位 } \phi(P) = \frac{W(P_0 \to P)}{q} = -\int_{P_0}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}}$$

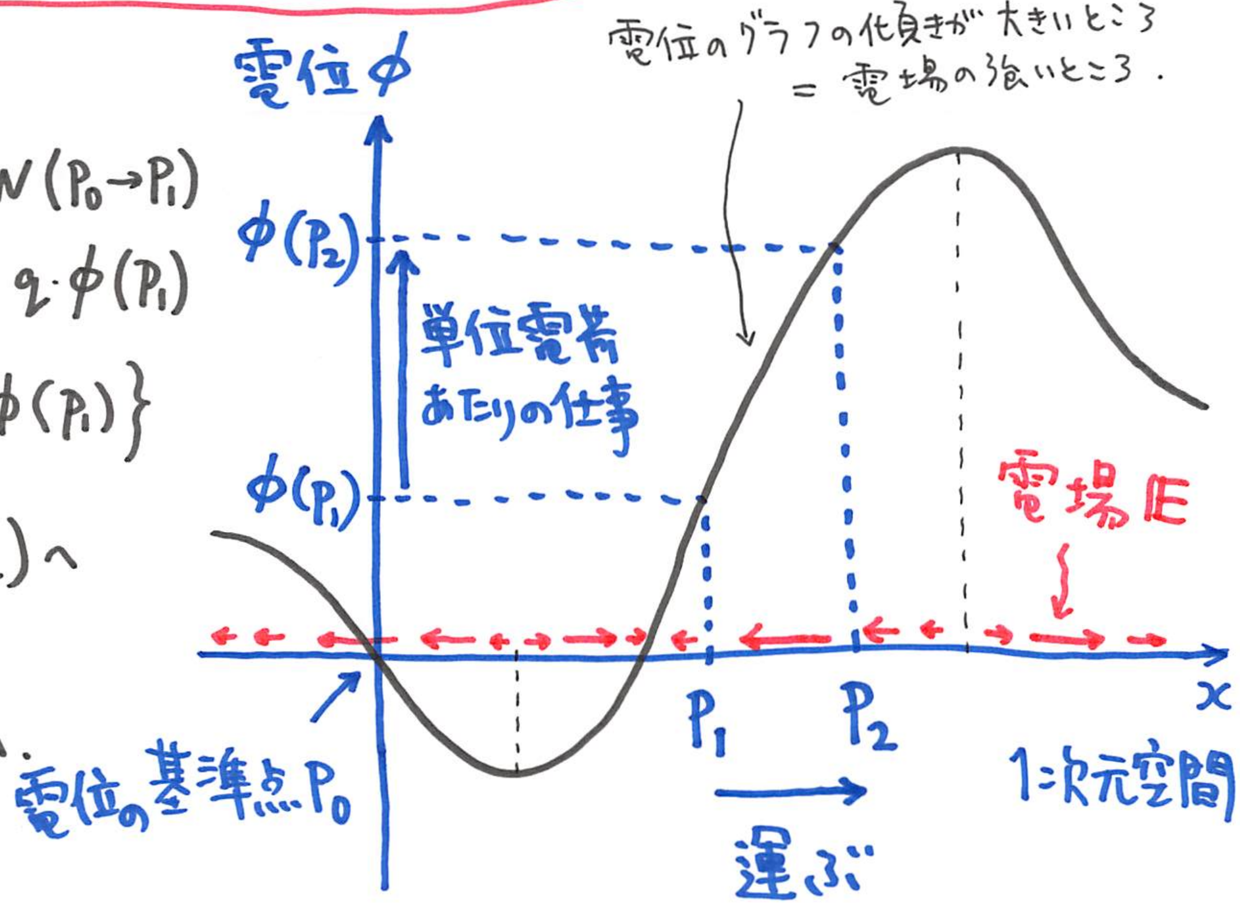
電位の基準点 P_0 から 点 P まで、単位電荷（1クーロン）を、静電場 $\mathbf{E}$ に逆らって運ぶのに要する仕事.

$$\boxed{\text{電位の単位} \quad \mathrm{V}\,(\text{ボルト}) = \frac{\mathrm{J}\,(\text{ジュール})}{\mathrm{C}\,(\text{クーロン})} = \mathrm{J}\cdot\mathrm{C}^{-1}}$$

$$W(P_0 \to P_1) + W(P_1 \to P_2) = W(P_0 \to P_2)$$

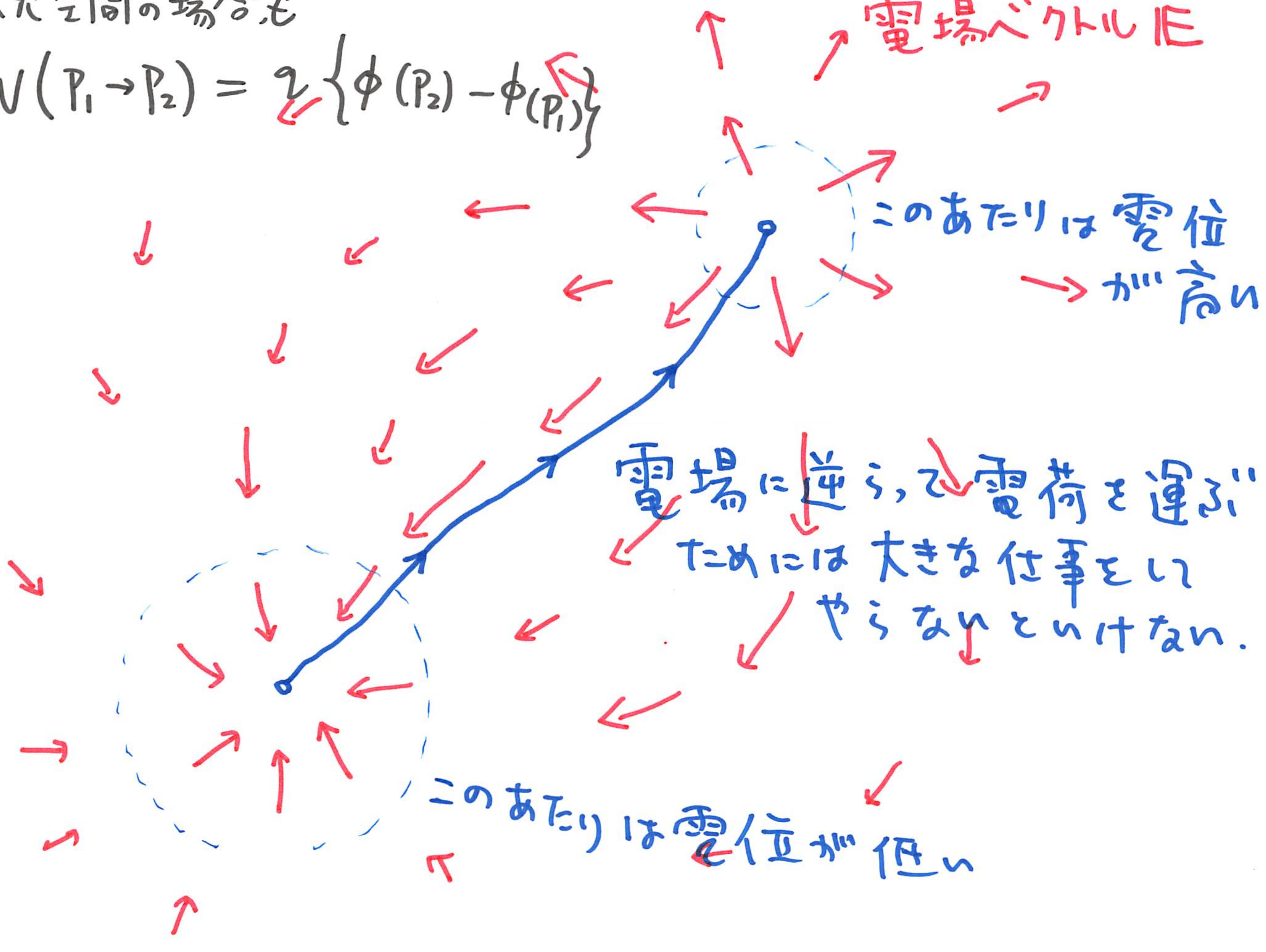
$$\begin{aligned} W(P_1 \to P_2) &= W(P_0 \to P_2) - W(P_0 \to P_1) \\ &= q\cdot\phi(P_2) - q\cdot\phi(P_1) \\ &= q\{\phi(P_2) - \phi(P_1)\} \end{aligned}$$

電位の低いところ(P_1)から 高いところ(P_2)へ
正の電荷 q を 運ぶためには、
正の仕事をしてやらないといけない.



3次元空間の場合も

$$W(P_1 \to P_2) = q\{\phi(P_2) - \phi(P_1)\}$$



注意

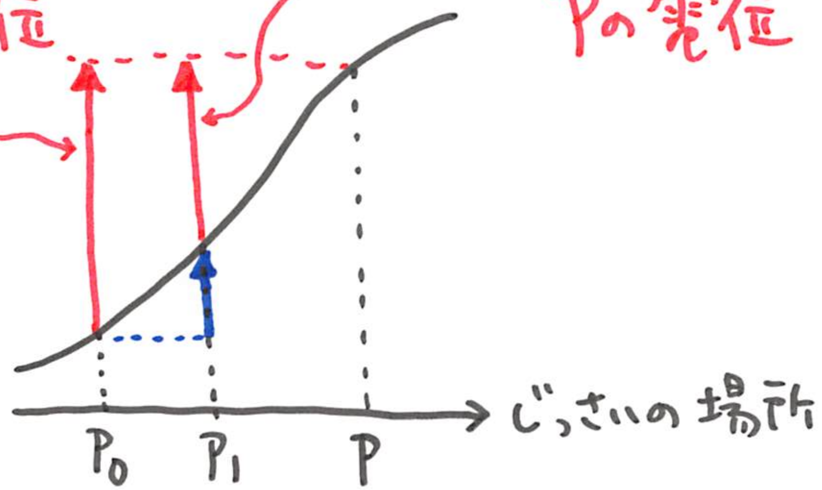
電位の基準点P_0は恣意的・便宜的に選ばれるものであり、取り換え可能である。

基準点をP_0とした場合の点Pの電位を$\phi_0(P)$

〃　P_1　〃　　P　〃　$\phi_1(P)$　とすると、

$$W(P_0 \to P) = W(P_0 \to P_1) + W(P_1 \to P) \quad \text{より}$$

$$\underbrace{\phi_0(P)}_{\text{P_0基準で見たPの電位}} = \underbrace{\phi_0(P_1)}_{\text{P_0とP_1の電位差}} + \underbrace{\phi_1(P)}_{\text{P_1基準で見たPの電位}}$$



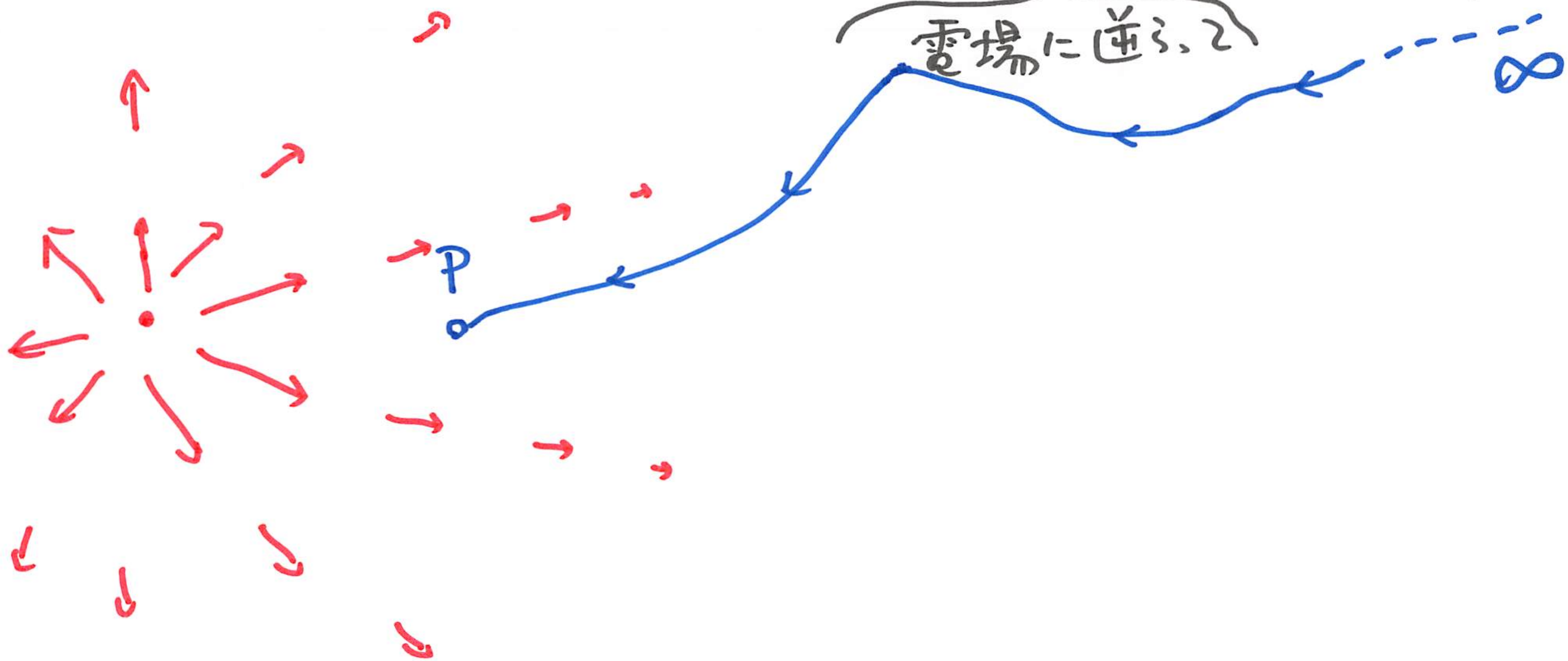
無限遠方（誤解を招きやすい言い方だが、無限遠点ともいう）∞

電位の基準点を"無限遠方"に選ぶ。

$\phi(P) = -\int_{P_0}^{P} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{r}$ と書いていたものを

$$\phi(P) = -\int_{\boxed{\infty}}^{P} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{r} = +\int_{P}^{\boxed{\infty}} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{r}$$

無限のかなたから、点Pのところまで単位電荷（1クーロン）を$\underbrace{\text{運ぶ}}_{\text{電場に逆らって}}$のに要する仕事



点電荷Qに向かって、無限遠方から距離rまで単位電荷を運ぶのに要する仕事

$$\phi(P) = \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}'$$

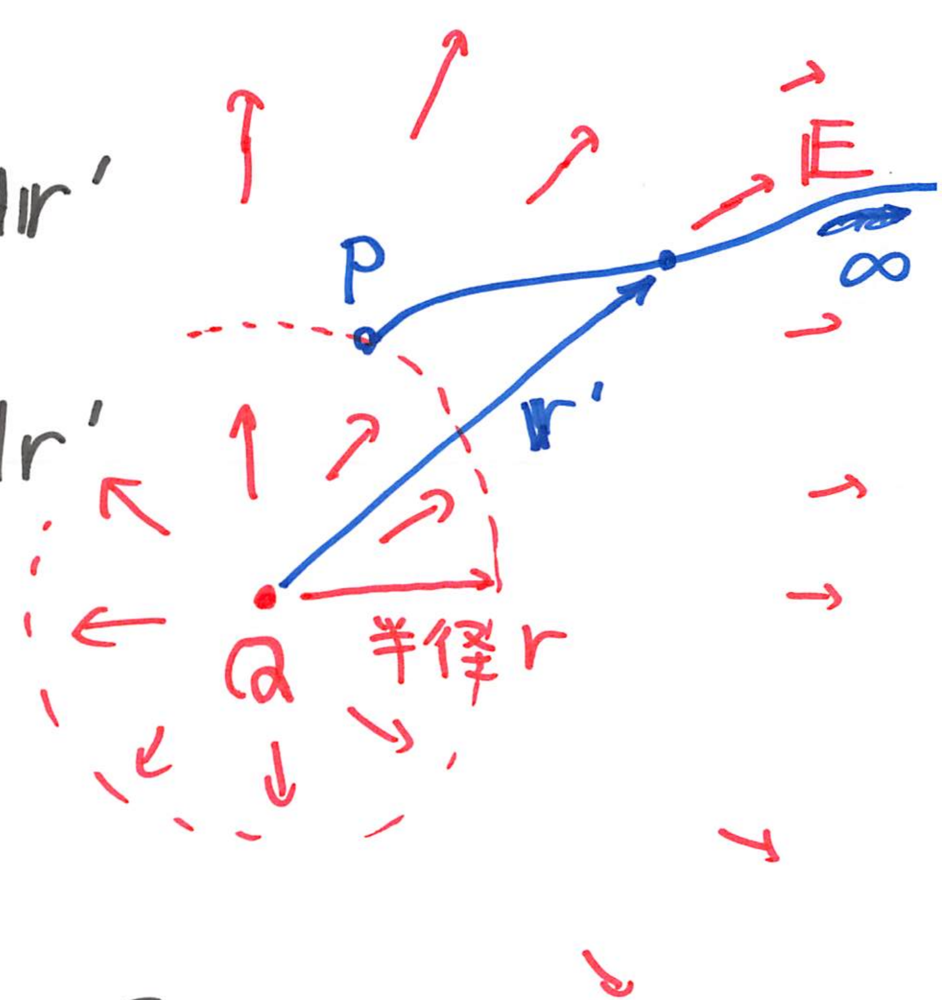
$$= \int_P^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (r')^2} \frac{\mathbf{r}'}{r'} \cdot d\mathbf{r}'$$

$$= \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (r')^2} \frac{r'}{r'} dr'$$

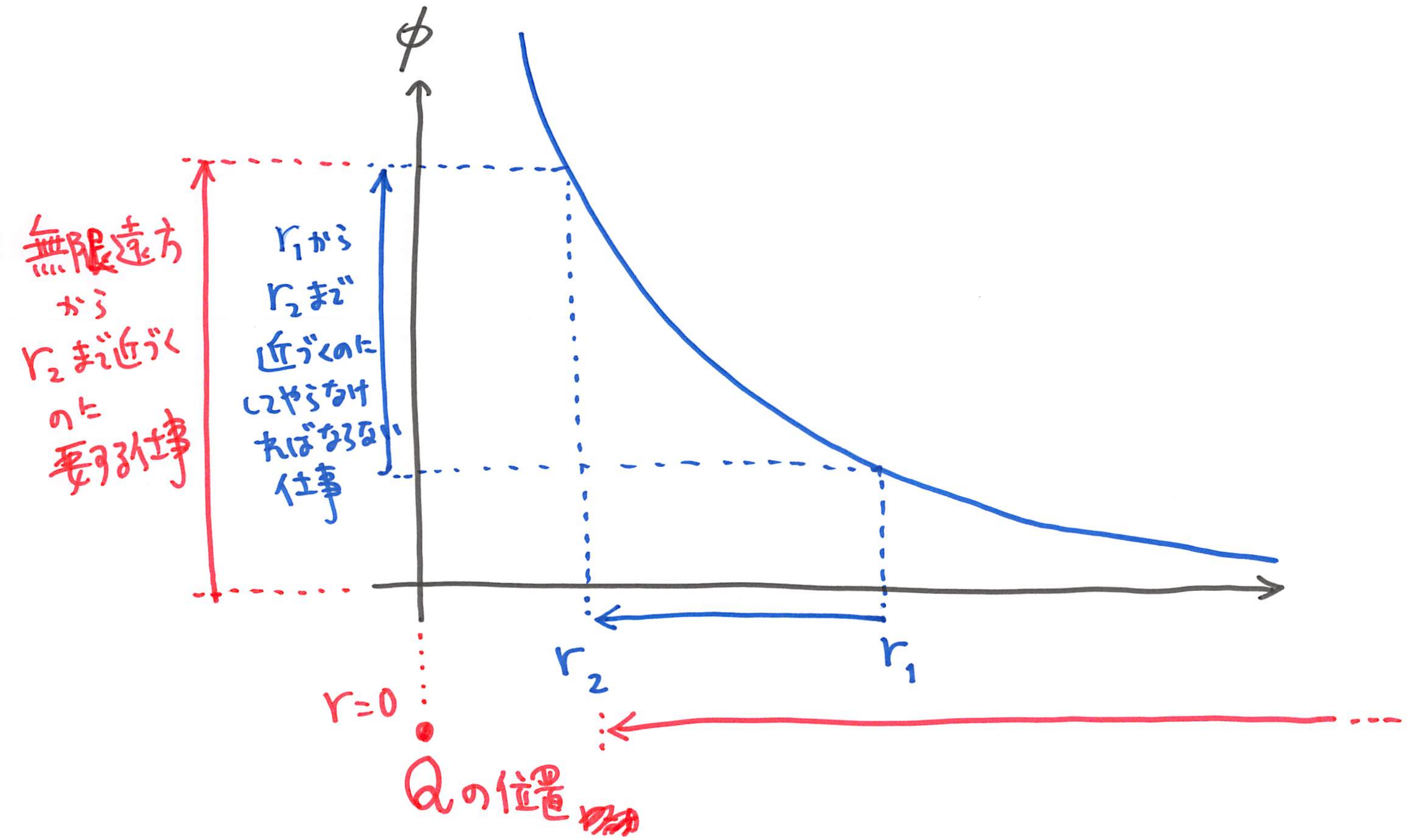
$$= \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (r')^2} dr'$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r'} \right]_{r'=r}^{r'=\infty}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

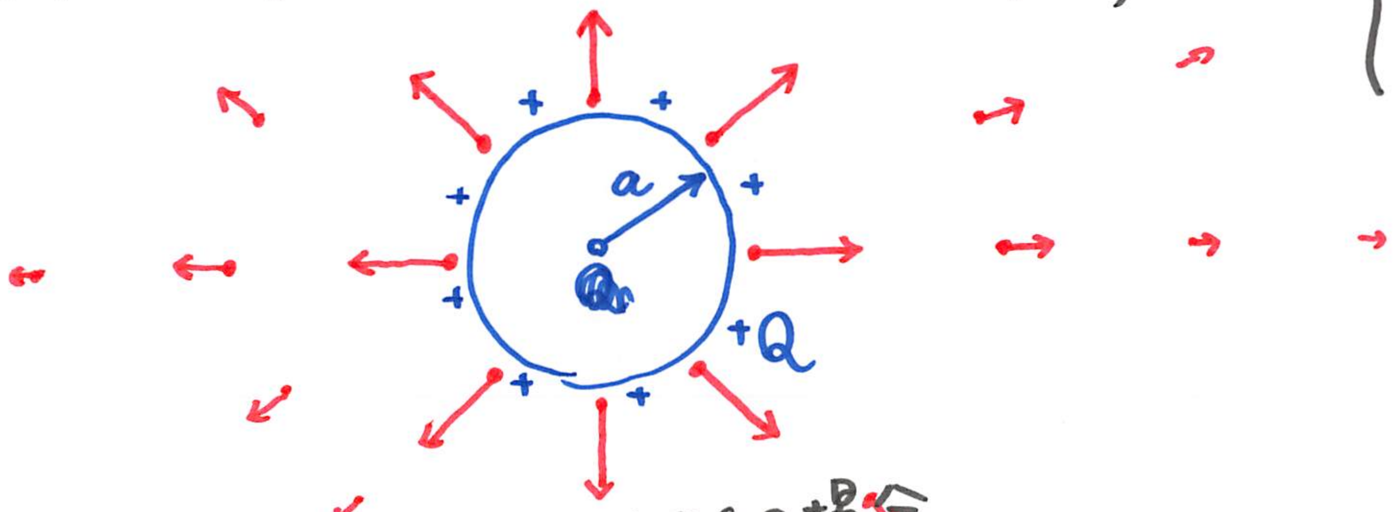


電位 $\phi(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ の意味



半径aの球殻の表面に電荷Qが一様に分布しているときの電位を求めよ。

電場は中心力場になる：$\mathbb{E}(r) = E(r)\dfrac{\mathbb{r}}{r}$，$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>a) \\ 0 & (r<a) \end{cases}$

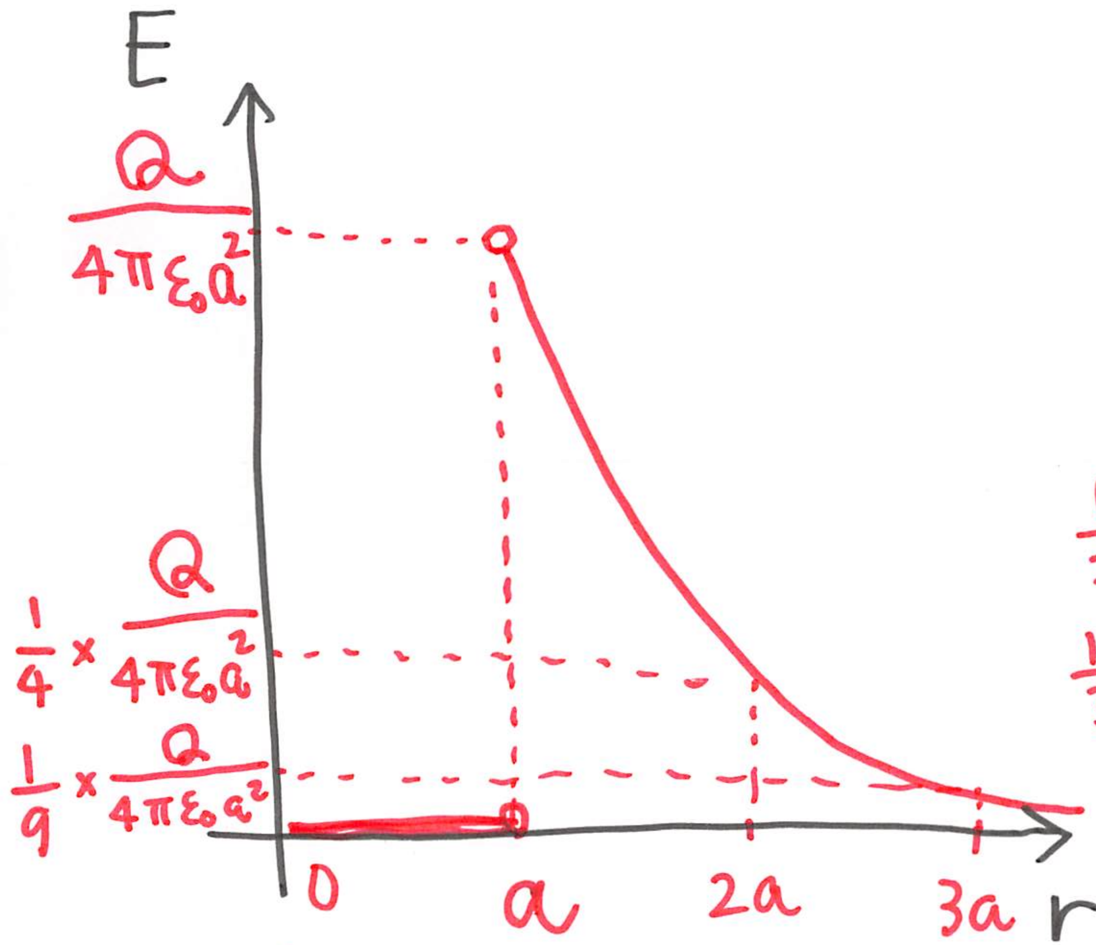


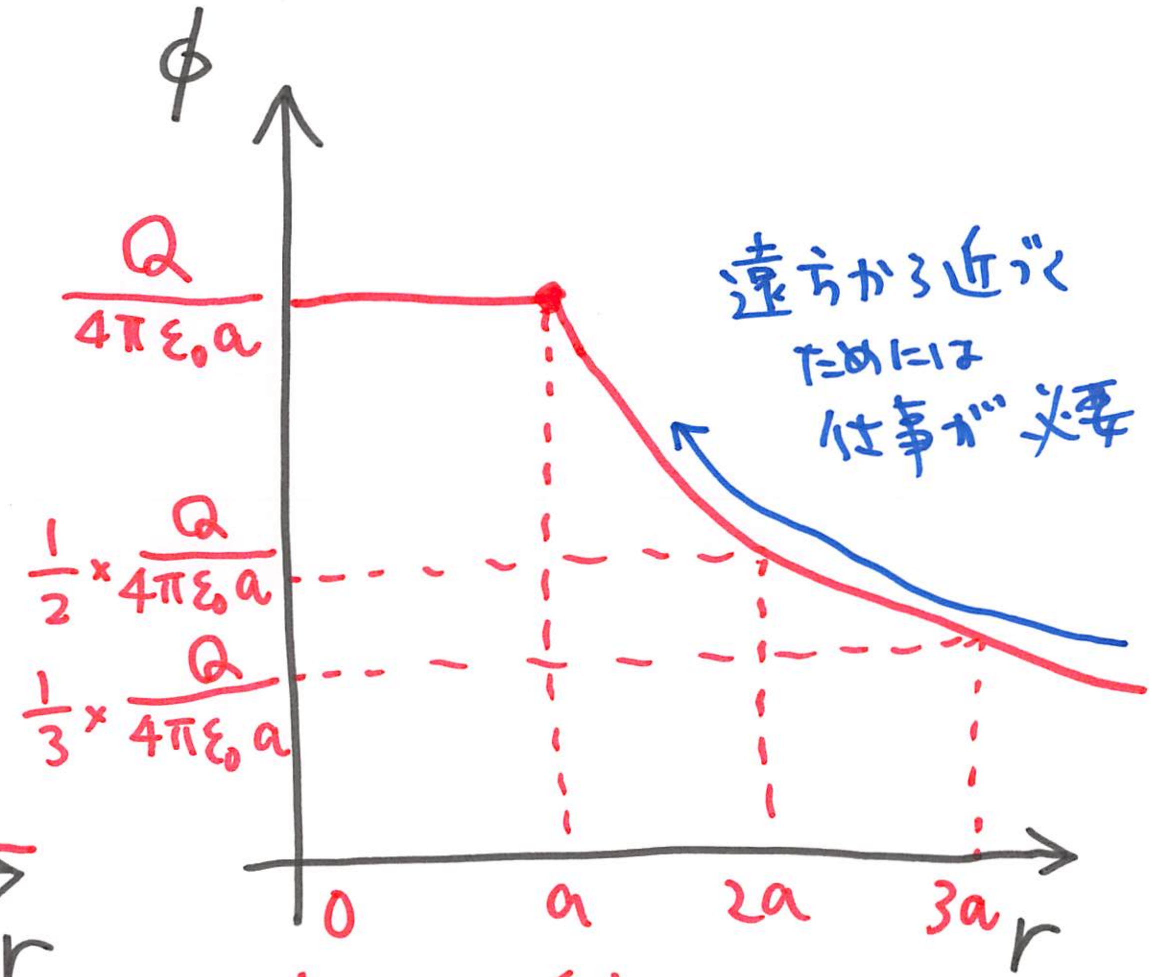
$r>a$の場合，

電位は $\phi(r) = \displaystyle\int_r^\infty E(r')\,dr' = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (r')^2}\,dr' = \left[-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'}\right]_{r'=r}^{r'=\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$0<r<a$の場合，$\phi(r) = \displaystyle\int_r^a E(r')\,dr' + \int_a^\infty E(r')\,dr' = 0 + \int_a^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (r')^2}\,dr' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

半径 a, 全電荷 Q の球殻電荷が作る電場 $E(r)$ と電位 $\phi(r)$





$0 \leqq r < a$ の範囲では $E = 0$

$r > a$ では r^2 に反比例.

$0 \leqq r \leqq a$ の範囲では $\phi =$ 一定

$r > a$ では r に反比例