物理学基礎 II

講義６の板書ノート

中心力場と保存力場

谷村　省吾

注意

等号(イコール)を堂々と書け。

$$A = B$$

最近こういう等号を書く人を見かける↓

$A = B$　　$A \approx B$　　$A : B$

どんどんイコールが不明瞭になっていき、
しまいには マイナスとまぎれたりしていく。
自分でも絶対に見失わないようにくっきりと記号は書け。

今回~~は~~と次回は

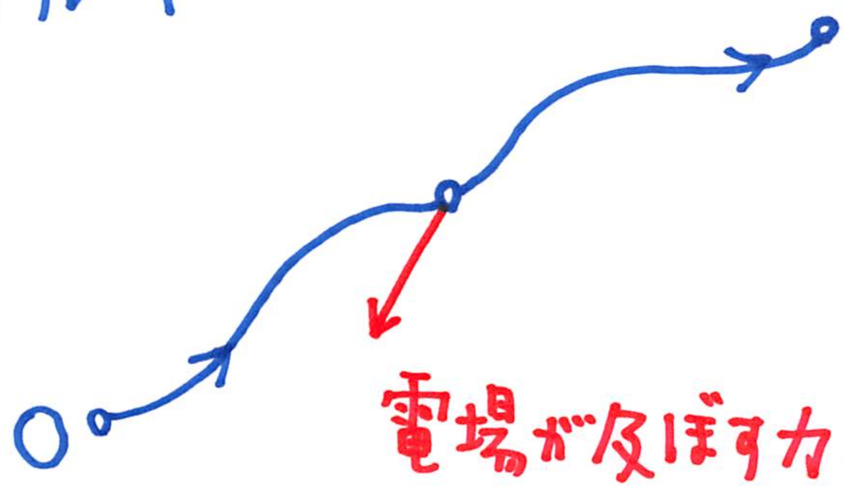
電場に関する位置エネルギー

= ある基準点から現在地まで
電場の力に逆らって点電荷を運ぶのに要する仕事.

= ~~点電~~ その位置にある点電荷にたくわえられている
とみなせるエネルギー

について学ぶ.

それを計算するために
線積分が必要.

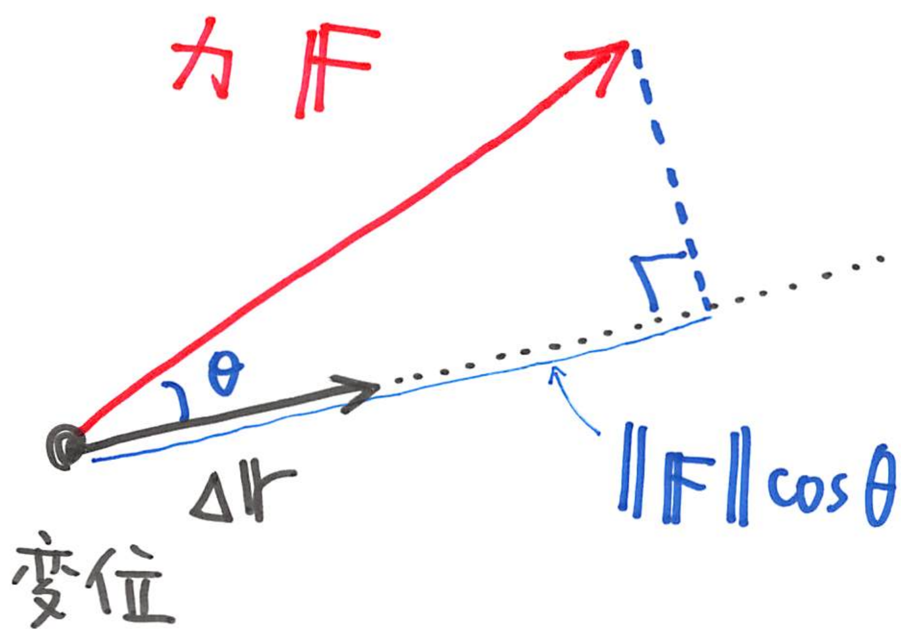


力 $\mathbb{F}$ を受けている質点が微小変位 $\Delta \mathbb{r}$ だけ動くときにされる仕事

$$\Delta W = \mathbb{F} \cdot \Delta \mathbb{r}$$

$$= F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

$$= \|\mathbb{F}\| \cdot \|\Delta \mathbb{r}\| \cdot \cos\theta$$



パラメータ付けられた曲線

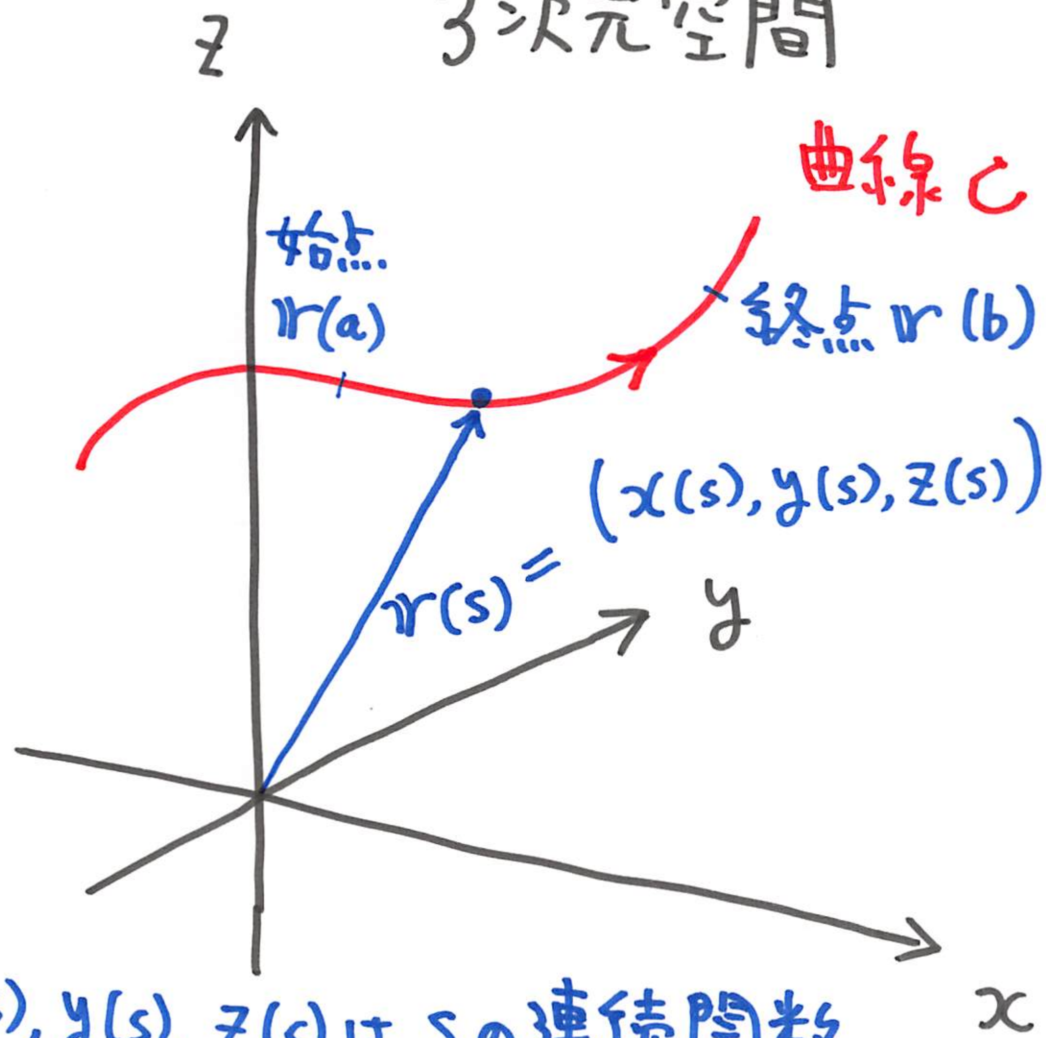
パラメータ空間

変数 s は

$a \leqq s \leqq b$

の範囲で動く.

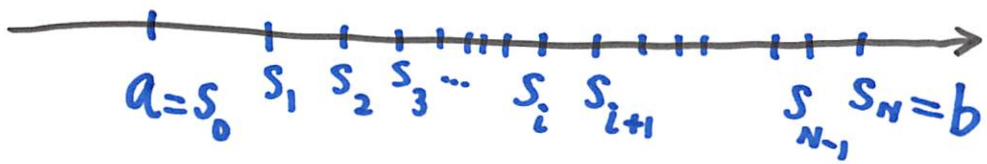
3次元空間



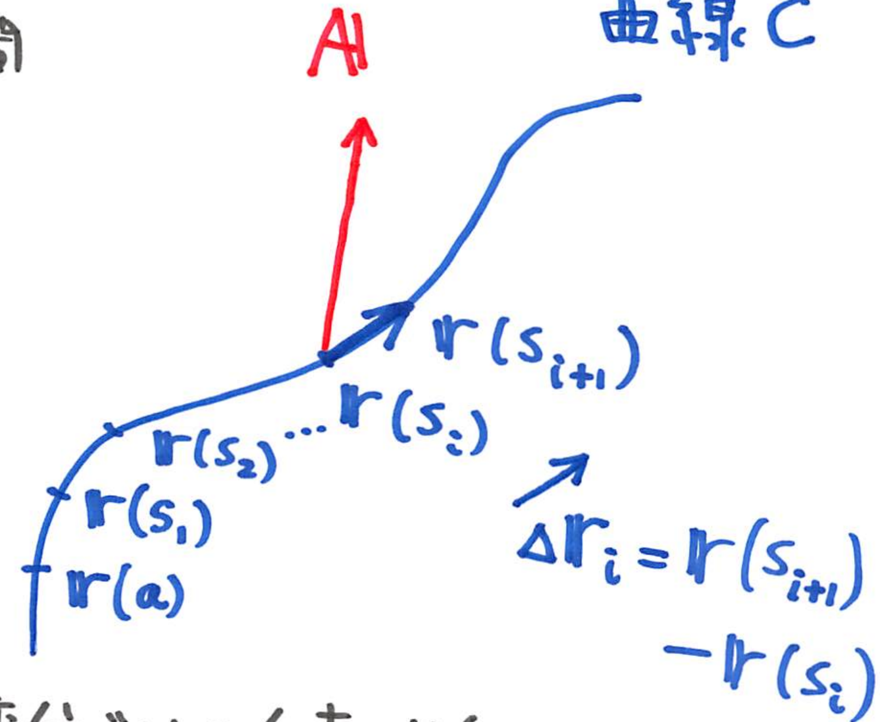
x(s), y(s), z(s) は s の連続関数.
変数 s の値が動くと, ベクトル r(s) が指す点も動いて, 曲線を描く.

力のベクトル場 $\mathbb{A}(\mathbb{r})$ の中で質点が曲線 C に沿って移動するときにされる仕事の総量 W を求める.

パラメータ空間



3次元空間



$a \leq s \leq b$ の刻み幅を無限に小さくしながら $N \to \infty$ にする.

微小変位でされる仕事 $\Delta W = \mathbb{A}\cdot\Delta\mathbb{r}_i$

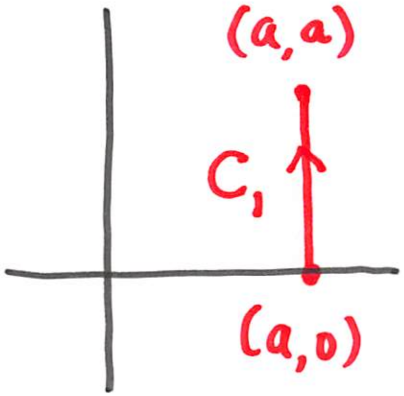
仕事の総量

$$W = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\mathbb{A}(\mathbb{r}_i)\cdot\Delta\mathbb{r}_i$$

C に沿っての $\mathbb{A}$ の線積分(line integral)

$$=: \int_C \mathbb{A}(\mathbb{r})\cdot d\mathbb{r} = \int_a^b \left\{A_x(\mathbb{r}(s))\frac{dx}{ds} + A_y(\mathbb{r}(s))\frac{dy}{ds} + A_z(\mathbb{r}(s))\frac{dz}{ds}\right\} ds$$

例題　平面上のベクトル場 $\mathbb{A}=(A_x, A_y)=\left(-(x^2+y^2)y,\ (x^2+y^2)x\right)$



$\int_{C_1}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}$ を求めよう.

C_1上の動点は $\mathbb{r}(s)=(a,s)$ ただし $s=0$からaまで動く.

($\mathbb{r}(s)=(a,as)$ として $s=0$ から $s=1$ まででもよい)

$x(s)=a$ 　なので $\dfrac{dx}{ds}=0,\ \dfrac{dy}{ds}=1$

$y(s)=s$

$$A_x=-(x^2+y^2)y=-(a^2+s^2)s$$

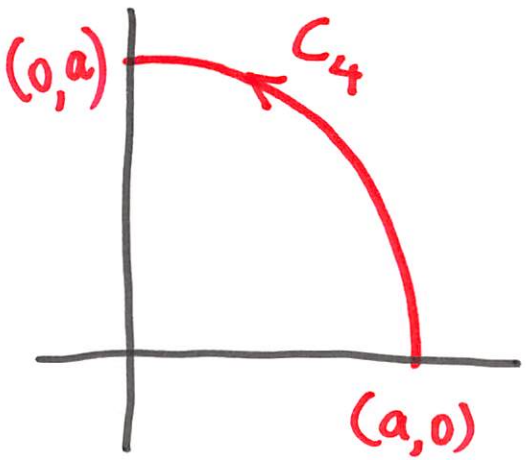
$$A_y=+(x^2+y^2)x=(a^2+s^2)a$$

$$\therefore \int_{C_1}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}=\int_0^a\left\{A_x\frac{dx}{ds}+A_y\frac{dy}{ds}\right\}ds=\int_0^a\left\{-(a^2+s^2)s\cdot 0+(a^2+s^2)a\cdot 1\right\}ds$$

$$=\int_0^a\left\{a^3+as^2\right\}ds$$

$$=\left[a^3s+\frac{1}{3}as^3\right]_{s=0}^{s=a}=a^4+\frac{1}{3}a^4-0=\frac{4}{3}a^4$$ ■

同じく $\mathbb{A}=(A_x, A_y)=\left(-(x^2+y^2)y,\ (x^2+y^2)x\right)$ について



$\displaystyle\int_{C_4} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}$ を求めよう.

C_4上の動点は $\mathbb{r}(s)=\left(a\cos s,\ a\sin s\right)$ として $s=0$ から $s=\frac{\pi}{2}$ まで動く.

$x(s)=a\cos s$
$y(s)=a\sin s$ なので $\dfrac{dx}{ds}=-a\sin s$, $\dfrac{dy}{ds}=a\cos s$

$A_x=-(x^2+y^2)y=-a^2\cdot a\sin s$
$A_y=(x^2+y^2)x=a^2\cdot a\cos s$

$$\therefore \int_{C_4}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{A_x\frac{dx}{ds}+A_y\frac{dy}{ds}\right\}ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{-a^3\sin s\cdot(-a\sin s)+a^3\cos s\cdot a\cos s\right\}ds$$

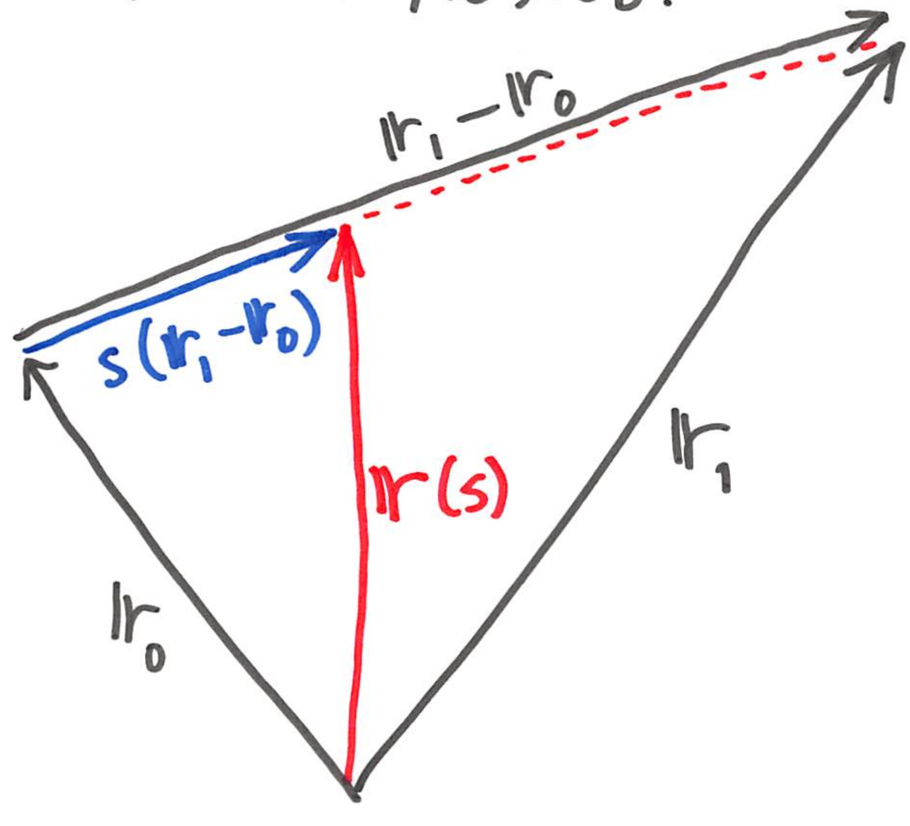
$$=\int_0^{\pi/2} a^4\left(\sin^2 s+\cos^2 s\right)ds=a^4\int_0^{\pi/2}1\,ds=a^4\times\frac{\pi}{2}\ \blacksquare$$

ヒント

$\mathbb{r}_0$を始点，$\mathbb{r}_1$を終点とする線分上の動点は

$$\begin{aligned}\mathbb{r}(s) &= \mathbb{r}_0 + s(\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_0)\\ &= (1-s)\mathbb{r}_0 + s\,\mathbb{r}_1\end{aligned}$$

として $s=0$ から $s=1$ までで与えられる.



ベクトル $\mathbf{r}=(x,y,z)$ の長さを $r=\|\mathbf{r}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする.

$$\boxed{\text{便利な公式}\quad \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = r\,dr}$$

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = x^2+y^2+z^2 = r^2$$

関数 $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ によって x, y, z の値が変わるとすると,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = 2x\frac{dx}{ds}+2y\frac{dy}{ds}+2z\frac{dz}{ds}$$

$$= 2(x,y,z)\cdot\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)$$

$$= 2\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

$$\frac{d}{ds}(r^2) = 2r\frac{dr}{ds}$$

したがって $\mathbf{r}\cdot\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = r\dfrac{dr}{ds}$

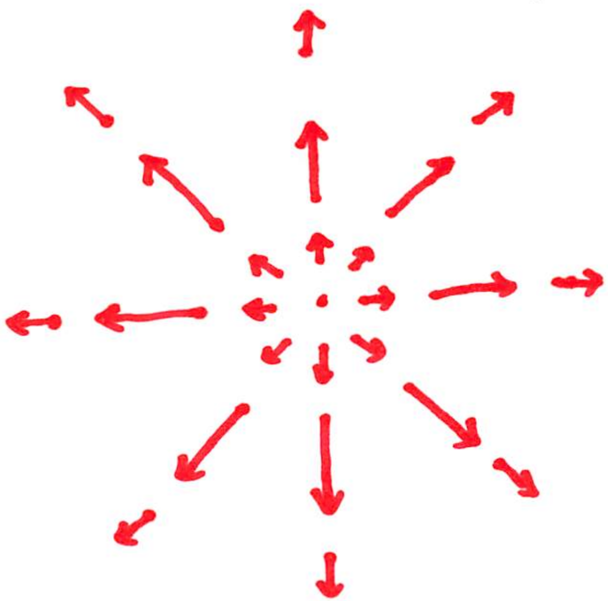
$$x\,dx+y\,dy+z\,dz = \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = r\,dr.$$

定義 中心力場 central force field

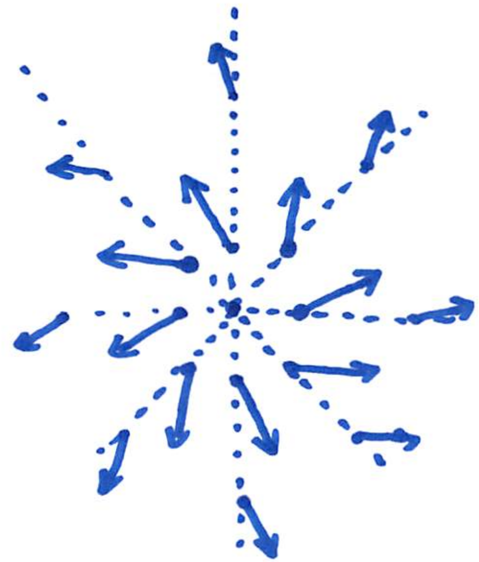
$$\mathbb{F}(\mathbb{r}) = f(r)\frac{\mathbb{r}}{r}$$

という関数形のベクトル場$\mathbb{F}(\mathbb{r})$を中心力場という.

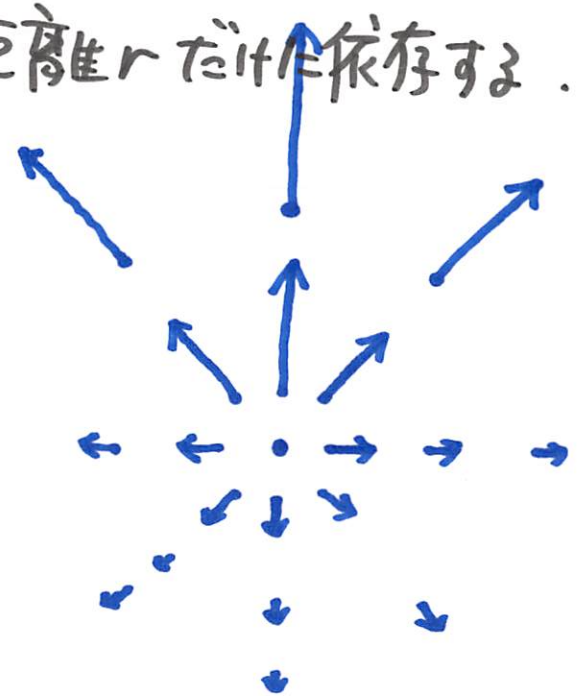
向きは動径方向$\frac{\mathbb{r}}{r}$であり，大きさは原点からの距離rだけに依存する.



これは中心力場



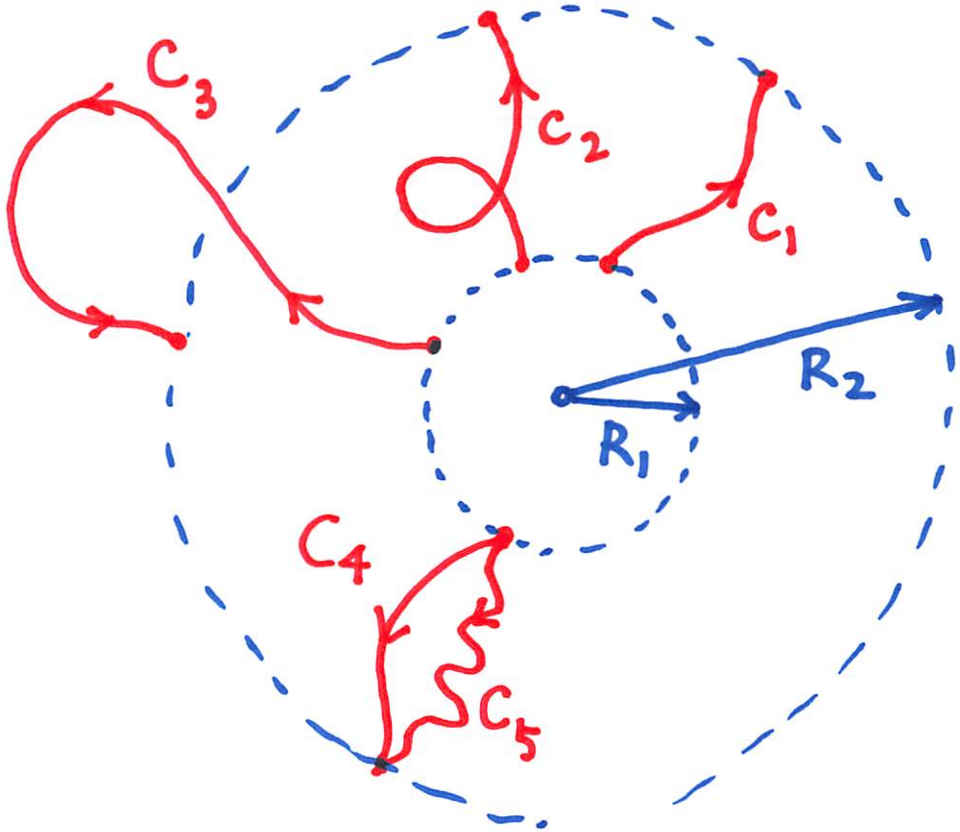
これは中心力場でない.
向きが$\mathbb{r}$方向からずれている.



これも中心力場ではない.
原点からの距離が等しい場所でベクトル場の大きさが異なっている.

定理　中心力場$\mathbb{F}(\mathbb{r})$の線積分の値は、曲線Cの始点と終点の原点からの距離だけで決まる.

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_C f(r)\frac{1}{r}\mathbb{r}\cdot d\mathbb{r} = \int_{R_1}^{R_2} f(r)\frac{1}{r}\,r\,dr = \int_{R_1}^{R_2} f(r)\,dr$$



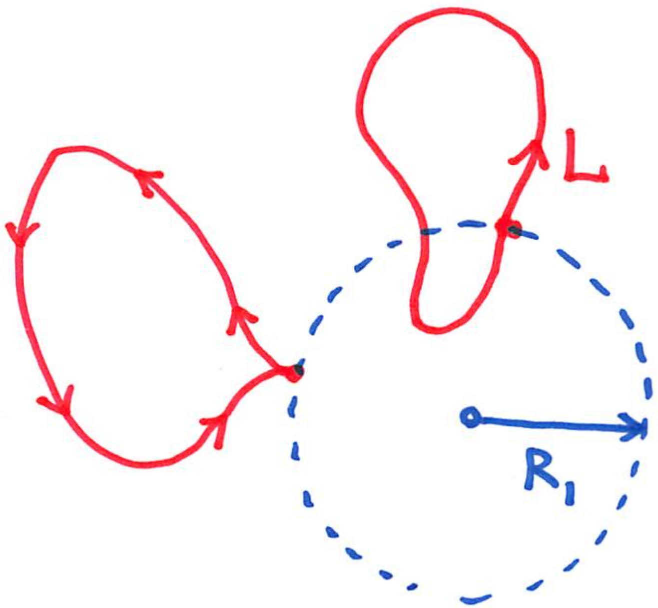
曲線C_1, C_2, C_3, C_4, C_5
どの道筋に沿って線積分しても、

$$\int_{C_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_{C_2} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \cdots = \int_{C_5} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$$

定義 始点と終点が一致する曲線をループ(loop)または閉曲線(closed ~~loop~~ curve)という. また、ループLに沿っての線積分を $\oint_L \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$ とも書く.

定理 中心力場 $\mathbb{F}(\mathbb{r})$ をループに沿って線積分した値はゼロになる.

$$\oint_L \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = 0$$



なぜならループの始点と終点は一致しているので $R_1=R_2$

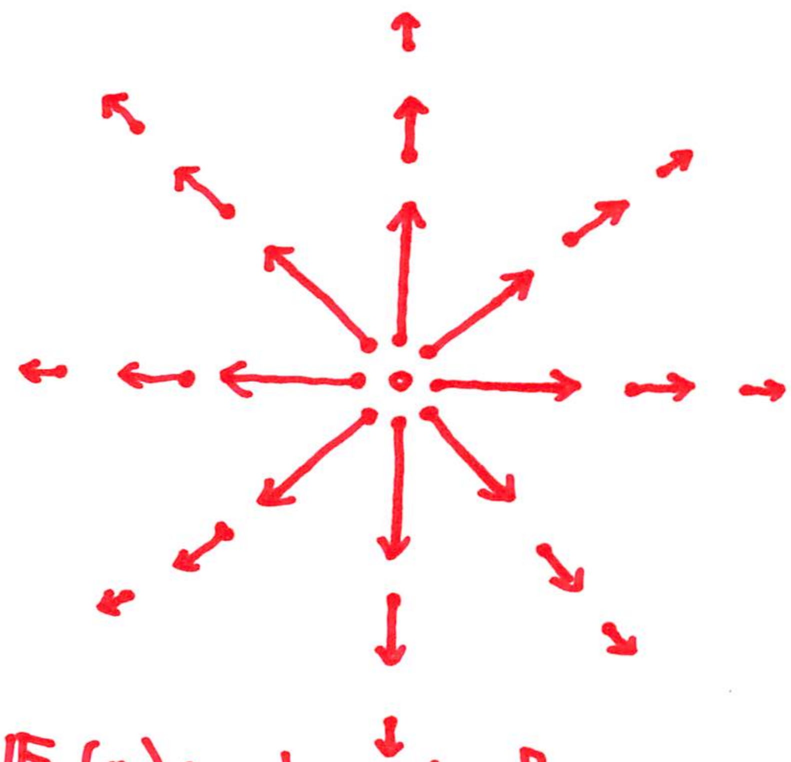
$$\int_L \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_{R_1}^{R_2} f(r)\,dr = \int_{R_1}^{R_1} f(r)\,dr = 0$$

事実　点電荷Qが作る電場 $\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\mathbb{r}}{r}$ は中心力場である.

その線積分は

$$\int_C \mathbb{E}\cdot d\mathbb{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \left[-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_{r=R_1}^{r=R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

となり, 始点と終点を結ぶ曲線Cの選び方に依存しない.



$\mathbb{E}(\mathbb{r})$は中心力場