物理学基礎 II

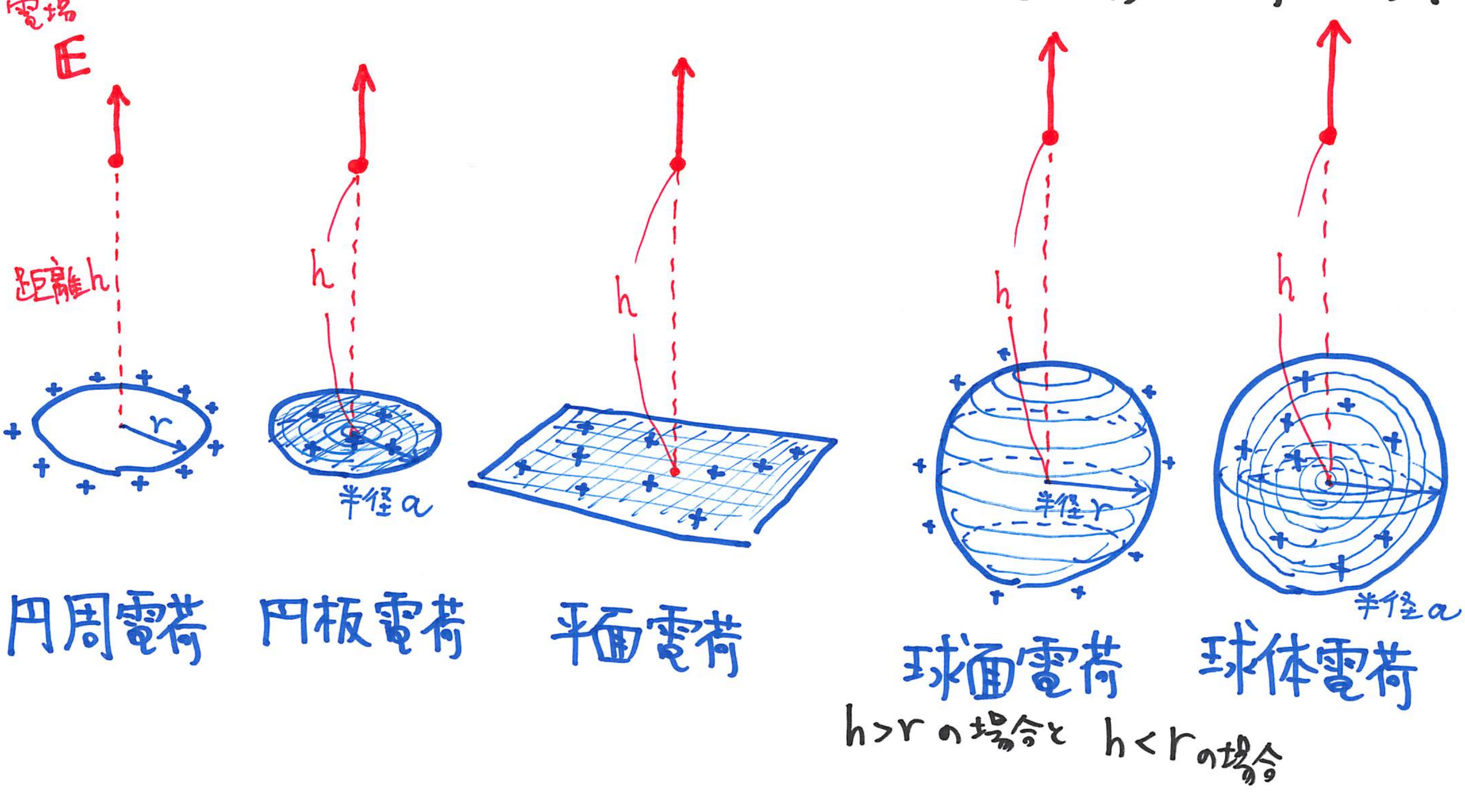
講義５の板書ノート

円周・平面・球殻・球体電荷が作る電場

谷村 省吾

今回の授業の狙い.

・クーロンの法則と電場の重ね合わせの原理を用いて、さまざまな電荷分布によって生じる電場を求める.



いろいろな密度量

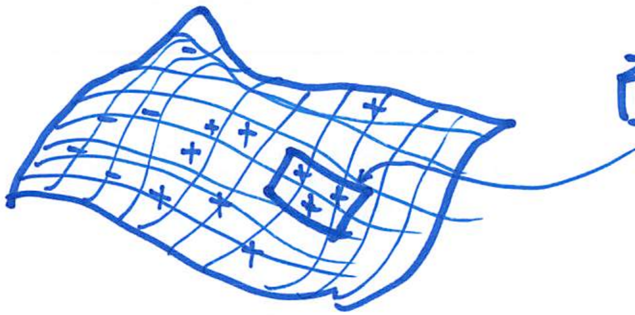
ラムダ　　　　　　　　　　　　　　クーロン毎メートル

- 電荷線密度 λ　単位長さあたりの電荷量，単位は $C \cdot m^{-1}$

長さ dl の線要素にのっかっている電荷量 $dQ = \lambda \cdot dl$

シグマ　　　　　　　　　　　　　　クーロン毎平方メートル

- 電荷面密度 σ　単位面積あたりの電荷量，単位は $C \cdot m^{-2}$

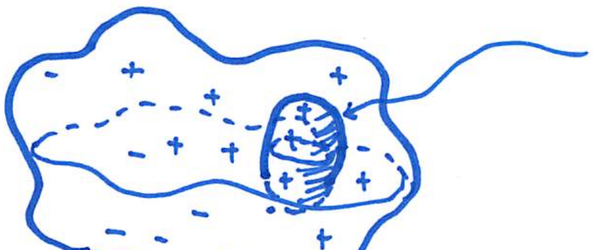


面積 dA の面要素にのっかっている電荷量

$$dQ = \sigma \cdot dA.$$

ロー　　　　　　　　　　　　　　クーロン毎立方メートル

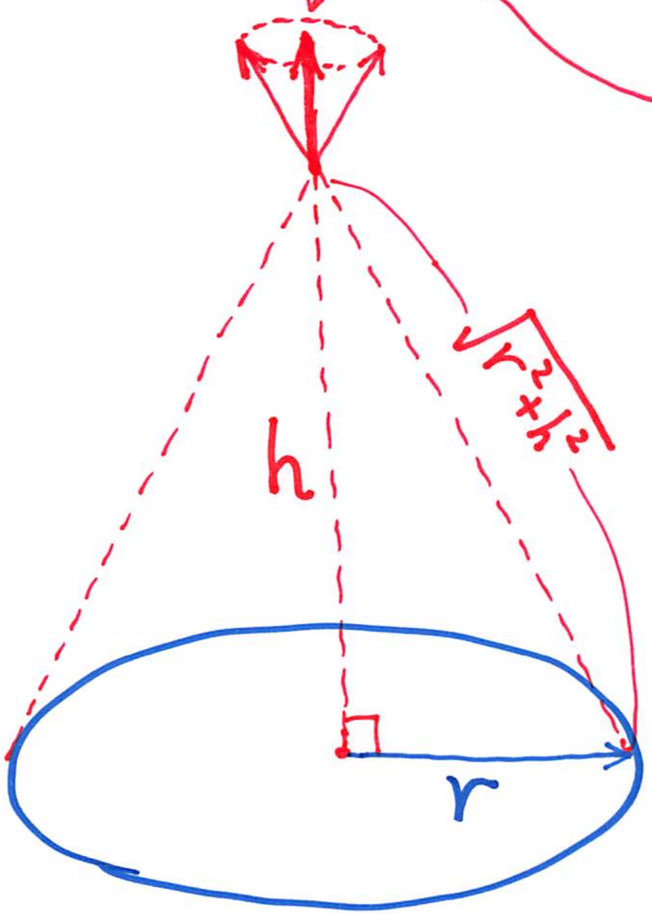
- 電荷密度 ρ　単位体積あたりの電荷量，単位は $C \cdot m^{-3}$



体積 dv の領域に入っている電荷量が

$$dQ = \rho \cdot dv$$

円周電荷が作る電場は前回求めた.



$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2+h^2}\cdot\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

$$= \frac{hQ}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+h^2\right)^{3/2}}$$

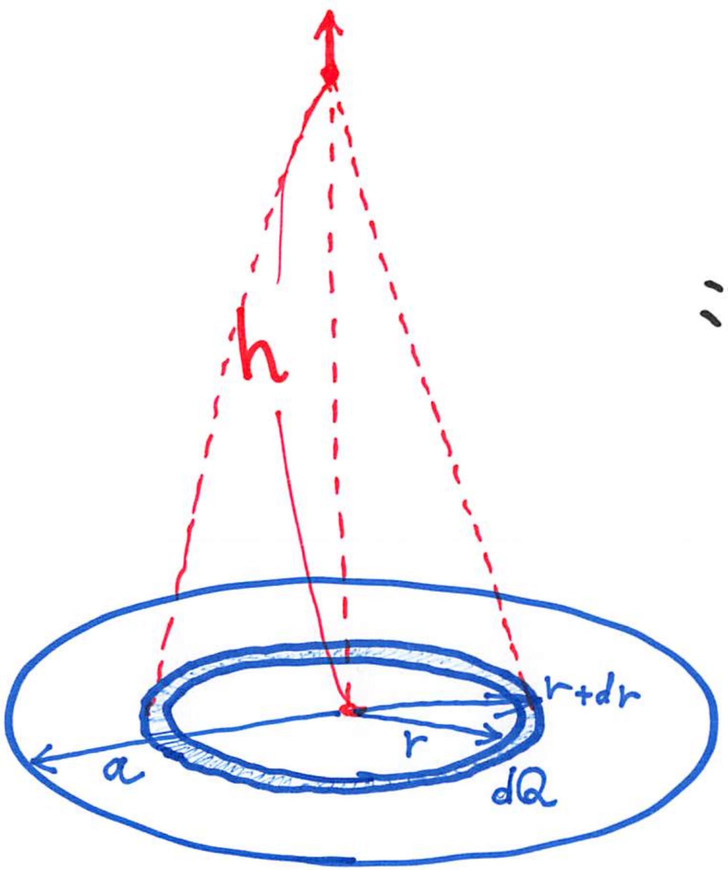
単位長さあたりの電荷 $=\lambda$

全電荷 $Q=\lambda\cdot 2\pi r$

円板電荷が作る電場を求めよう.

$dQ = \sigma \cdot 2\pi r dr$ が作る電場は

$$dE_z = \frac{h \cdot dQ}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+h^2)^{3/2}} = \frac{h \cdot \sigma 2\pi r}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+h^2)^{3/2}} dr$$



これを $r=0$ から $r=a$ まで積分して

$$E_z = \frac{h\sigma 2\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^a \frac{r}{(r^2+h^2)^{3/2}} dr$$

$$= \frac{h\sigma}{2\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{(r^2+h^2)^{1/2}} \right]_{r=0}^{r=a}$$

$$= \frac{h\sigma}{2\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} + \frac{1}{h} \right).$$

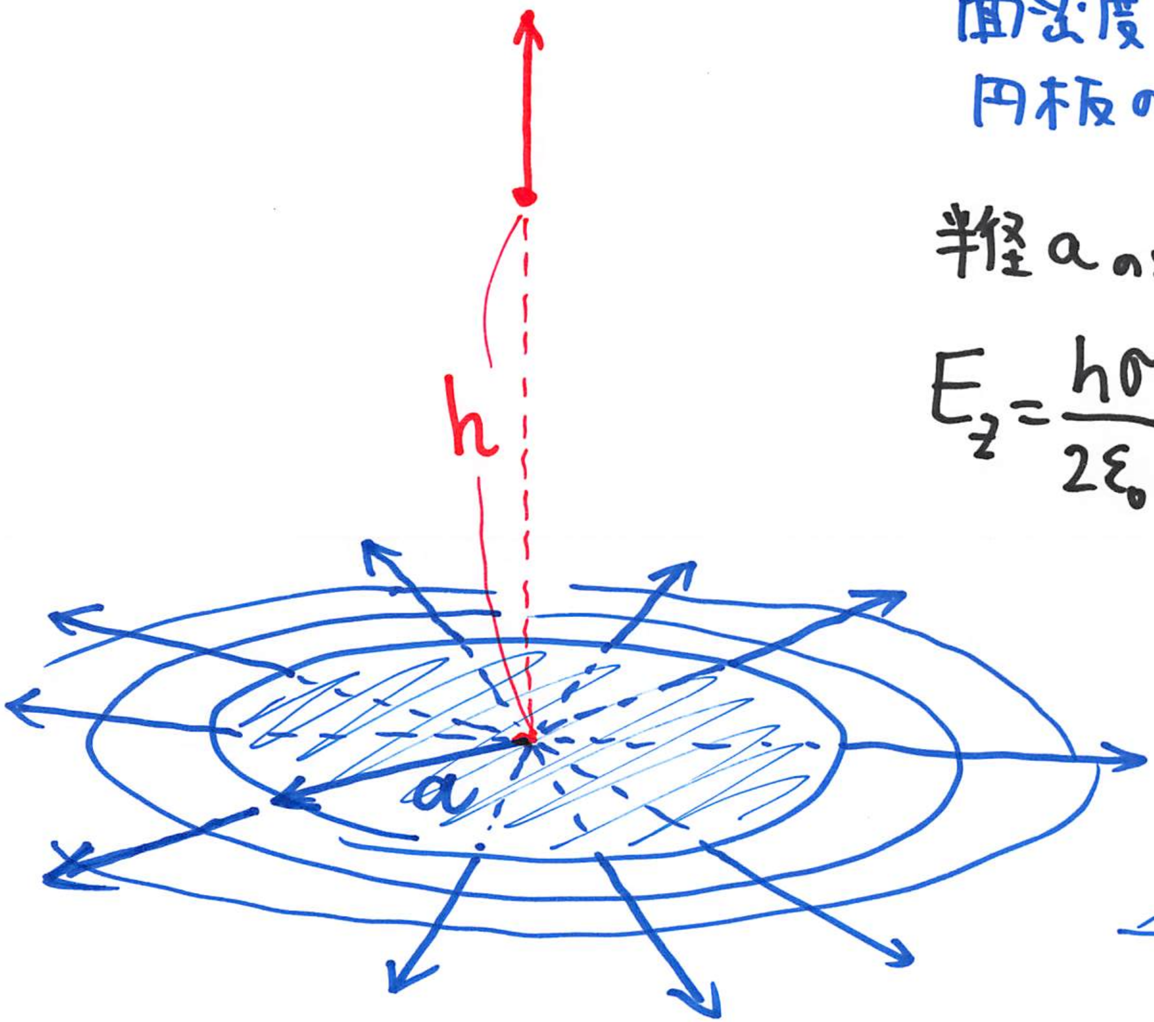
単位面積あたりの電荷 $= \sigma$

半径 r と $r+dr$ にはさまれた細い環にのっかっている電荷 $dQ = \sigma \cdot 2\pi r dr$

半径 a の円板にのっかっている全電荷 $Q = \int_0^a \sigma 2\pi r dr = \sigma \cdot \pi a^2$

無限に広がった平面上に一定の面密度σで電荷が分布している場合の電場。

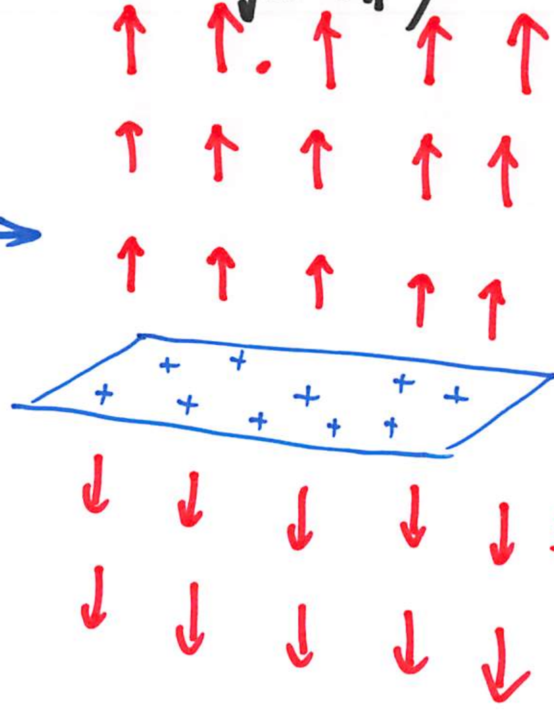
面密度σを一定に保ったまま
円板の半径aを無限大にする極限をとればよい。



半径aのとき　　　　$a \to \infty$

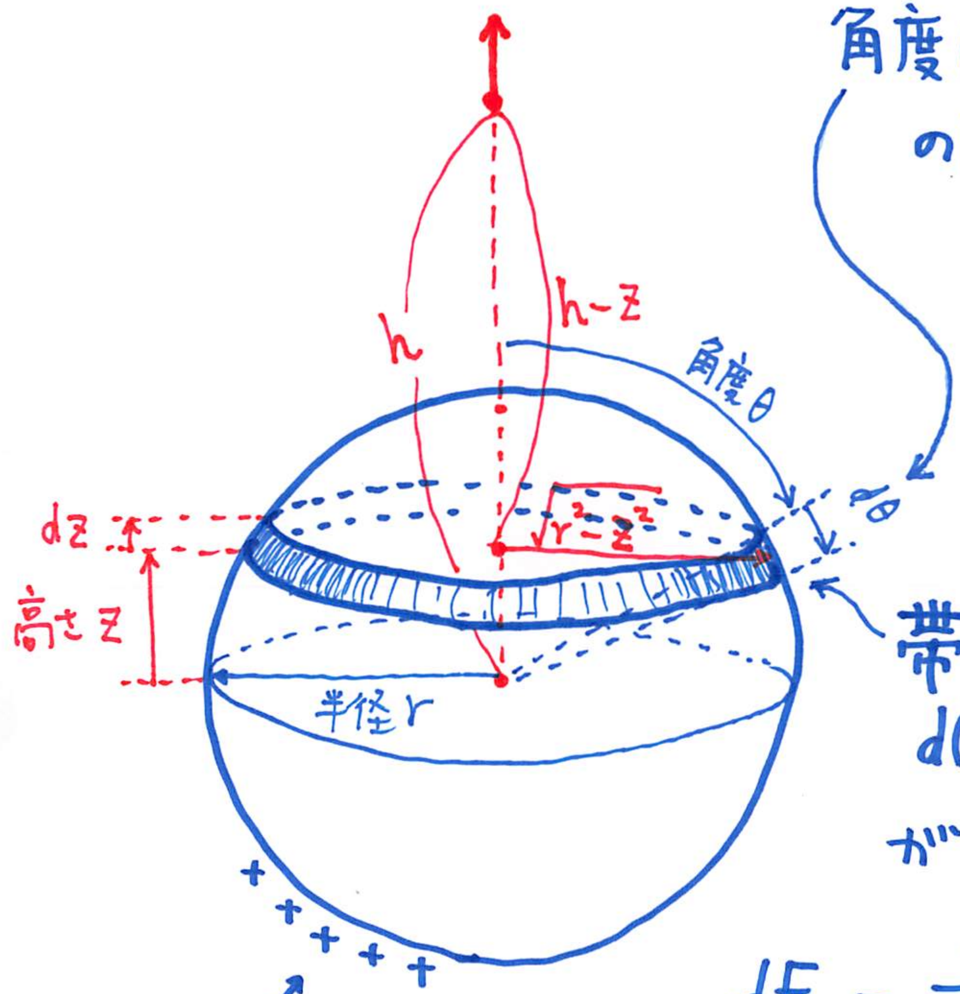
$$E_z = \frac{h\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) \to E_z = \frac{h\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{h} - 0\right)$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



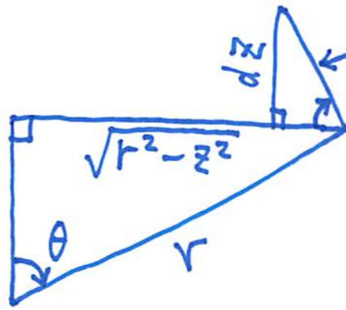
電場の強さは
hに無関係!!
平面電荷から遠ざかっても
電場は弱くならない。

半径rの球面電荷が作る電場を求めよう.



一様な電荷面密度σ

角度θとθ+dθ(高さzとz+dz)の間にはさまれた帯の面積 $dA = 2\pi\sqrt{r^2-z^2}\cdot r\,d\theta$



$$r\,d\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2-z^2}}\,dz$$

$$\therefore\ dA = 2\pi r\,dz$$

帯にのっかっている電荷

$$dQ = \sigma\,dA = \sigma\cdot 2\pi r\,dz$$

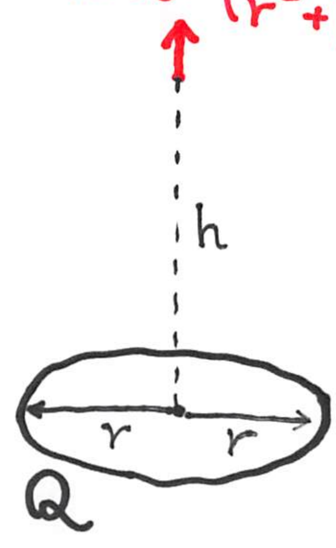
が作る電場は

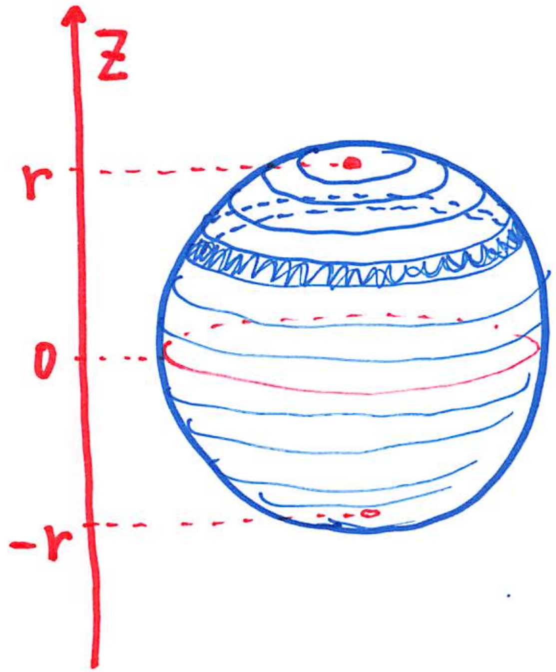
$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(h-z)\,dQ}{\left(r^2-z^2+\underset{(h-z)^2}{\cancel{h^2}}\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma\cdot 2\pi r}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{h-z}{\left(r^2-z^2+\underset{(h-z)^2}{\cancel{h^2}}\right)^{3/2}}\,dz$$

参照：円周電荷が作る電場

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{hQ}{(r^2+h^2)^{3/2}}$$





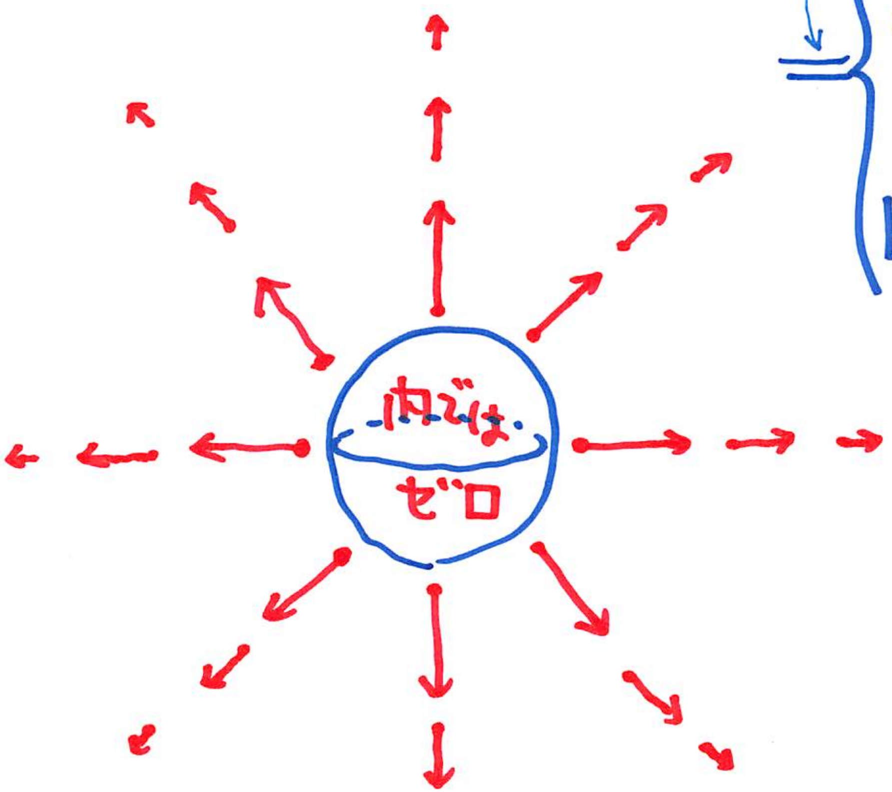
球面を細い帯に分割して、各帯が作る電場をもとめ、
z=−r から z=r まで積分する：

$$E_z = \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0}\int_{-r}^{r}\frac{h-z}{\left(r^2-z^2+\underbrace{\cancel{h^2}}_{(h-z)^2}\right)^{3/2}}dz$$

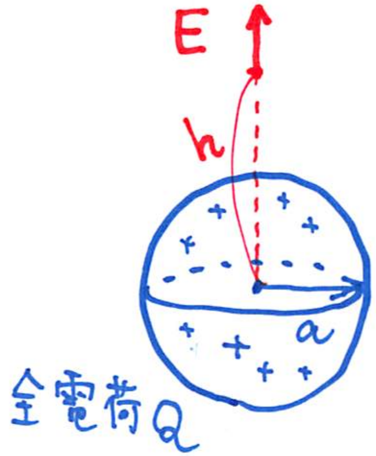
計算の詳細はテキストを見てください

$$= \begin{cases} \dfrac{\sigma r}{2\varepsilon_0}\cdot\dfrac{2r}{h^2} = \dfrac{\sigma\cdot 4\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 h^2} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2} & h>r \text{ のとき} \\ 0 & h<r \text{ のとき} \end{cases}$$

点電荷と同じ結果!!

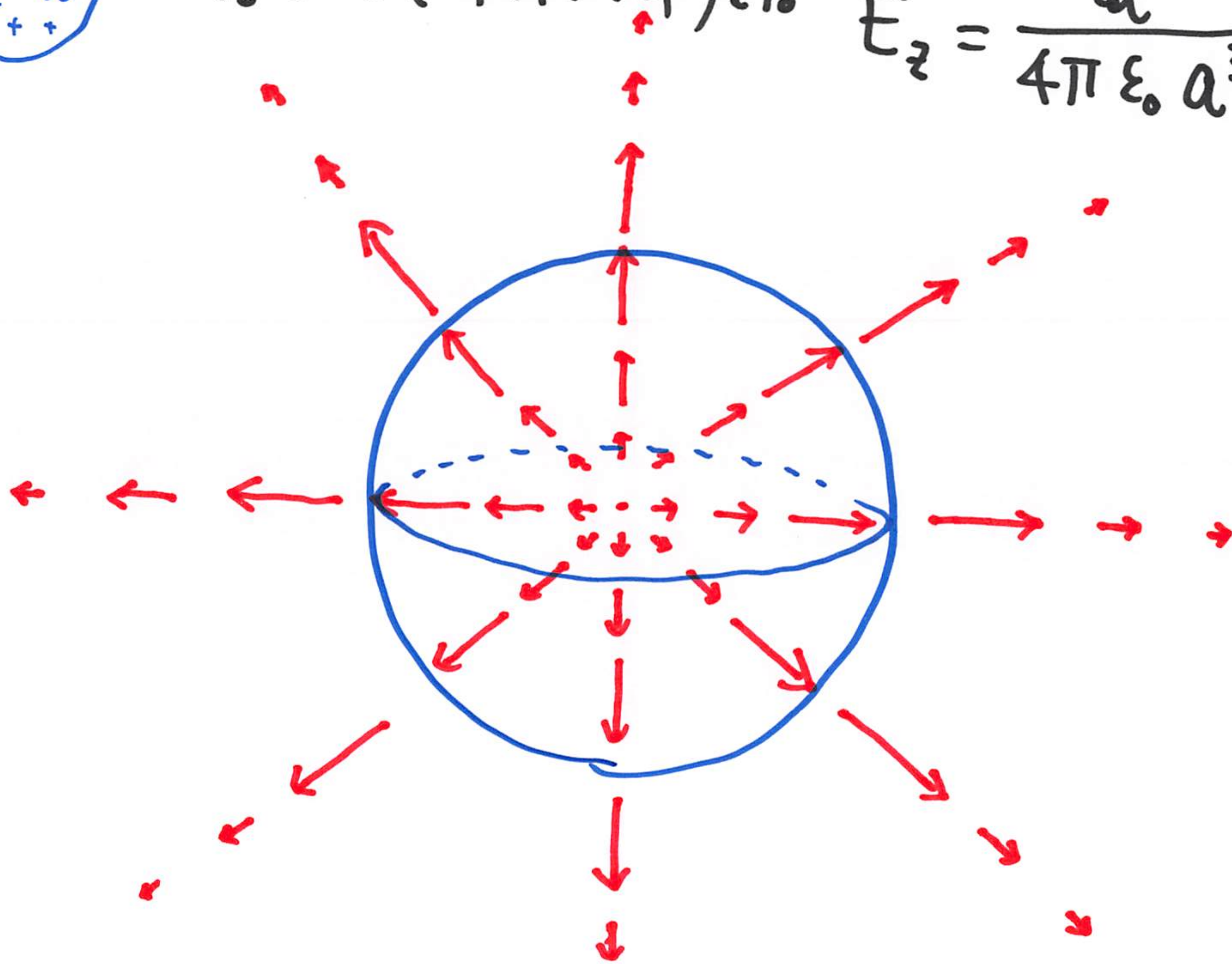


半径aの球体内部に電荷が一様に分布している場合の電場



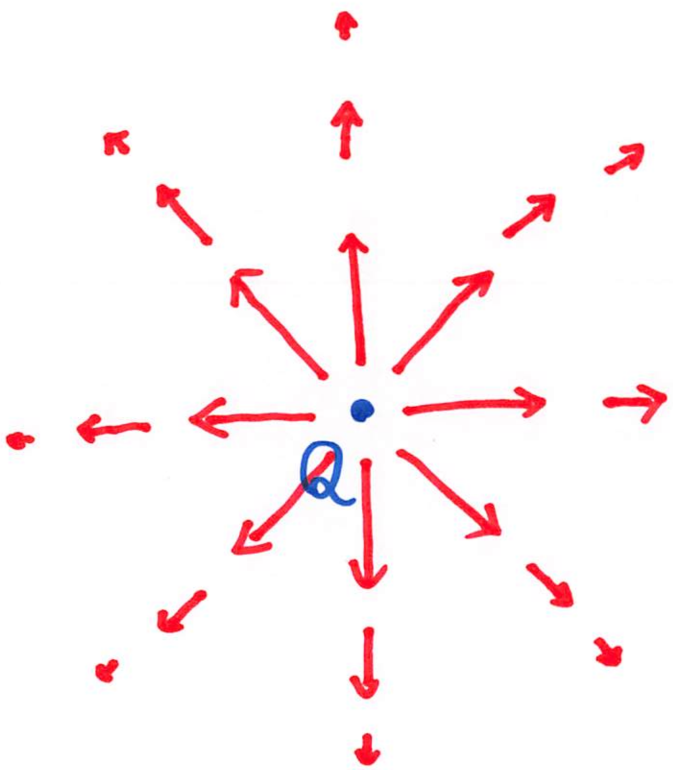
h > a (球体の外)では $E_z = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}$

h ≦ a (球体内部)では $E_z = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\cdot h$



点(0次元)電荷が作る電場

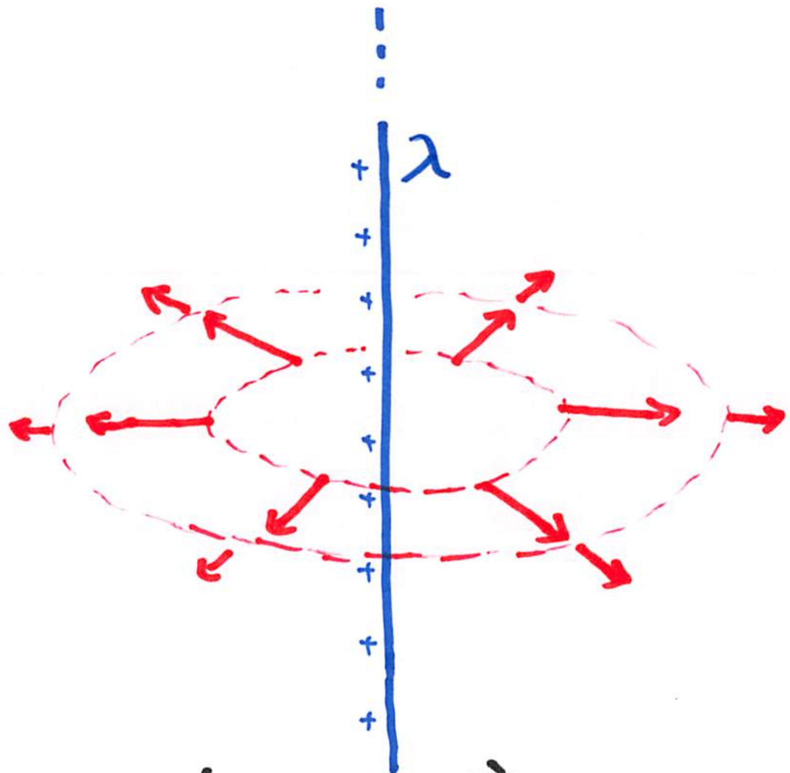
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



強さは距離の2乗に反比例

直線(1次元)電荷が作る電場

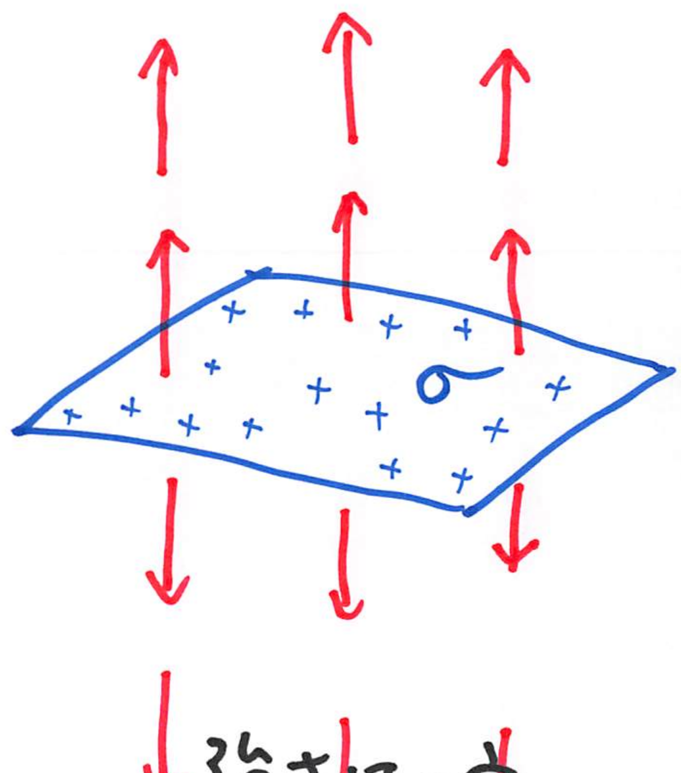
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



強さは距離に反比例。

平面(2次元)電荷が作る電場

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



強さは一定。