物理学基礎 II

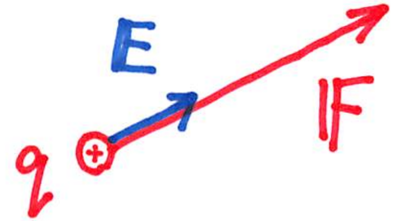
講義４の板書ノート

点電荷と線電荷が作る電場

谷村　省吾

電場に関する基本法則

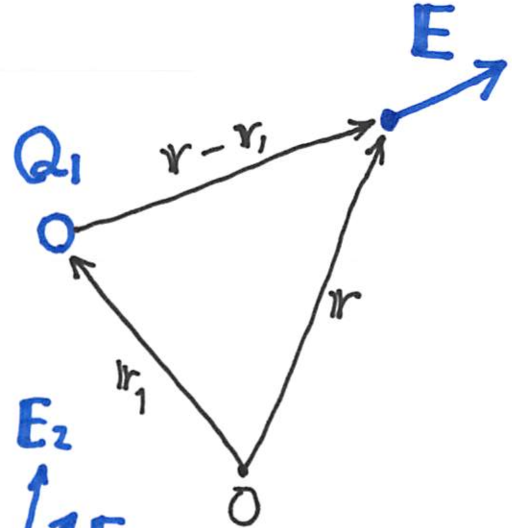
1. 点 $\mathbb{r}$ に電場 $\mathbb{E}(\mathbb{r})$ があり、そこに点電荷 q があれば、点電荷は $\mathbb{F} = q\mathbb{E}$ の力を受ける。(電場の定義)



2. 点電荷 Q_1 が位置 $\mathbb{r}_1$ に静止しているとき、位置 $\mathbb{r}$ には

$$\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{\|\mathbb{r}-\mathbb{r}_1\|^2}\frac{\mathbb{r}-\mathbb{r}_1}{\|\mathbb{r}-\mathbb{r}_1\|}$$

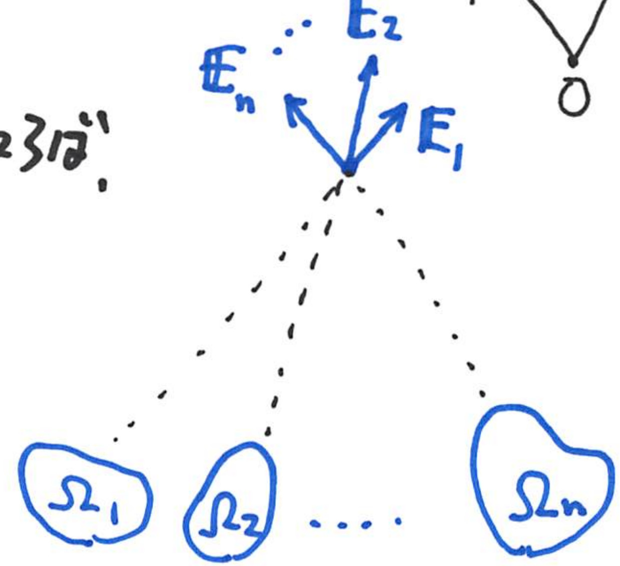
の電場ができる。(クーロンの法則)



3. 電荷分布 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$ がそれぞれ電場 $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \cdots, \mathbb{E}_n$ を作るならば、すべての電荷分布が共存しているときは

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \cdots + \mathbb{E}_n$$

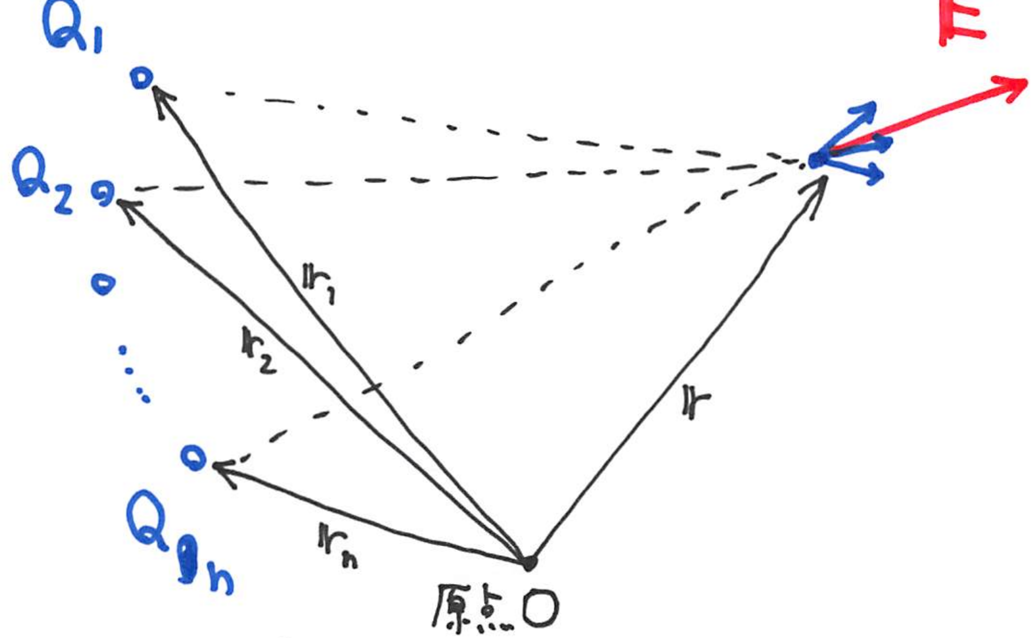
の電場ができる (重ね合わせの原理)



点電荷群が作る電場

点電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ がそれぞれ位置 $\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2, \cdots, \mathbb{r}_n$ に静止しているときに位置 $\mathbb{r}$ にできる電場

$$\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{\|\mathbb{r}-\mathbb{r}_i\|^3}(\mathbb{r}-\mathbb{r}_i)$$



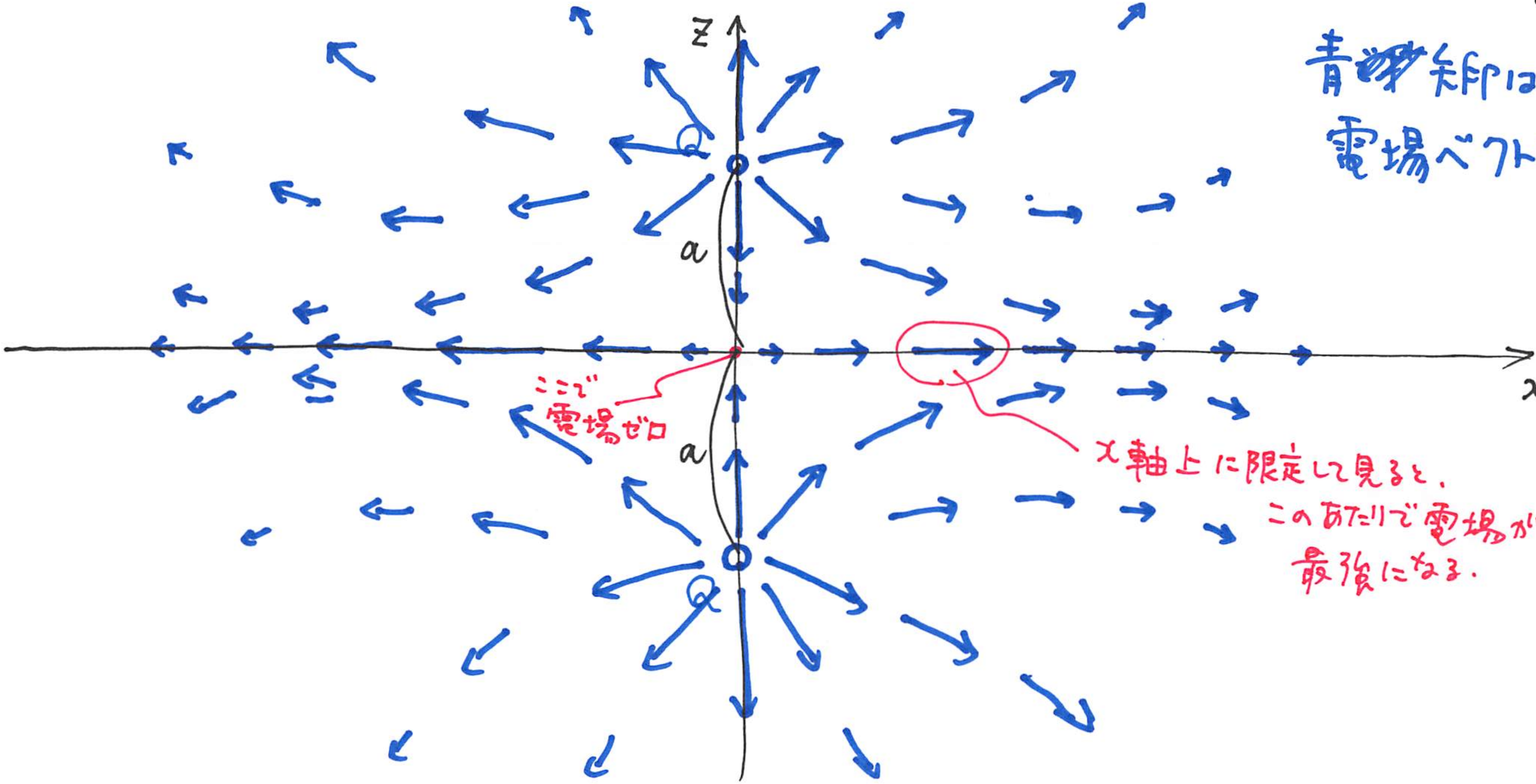
$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad \mathbb{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbb{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{\left\{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x-x_i \\ y-y_i \\ z-z_i \end{pmatrix}$$

例題　点 $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ に電荷 $Q_1 = Q$，点 $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ に電荷 $Q_2 = Q$ があるときの $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ における電場は、

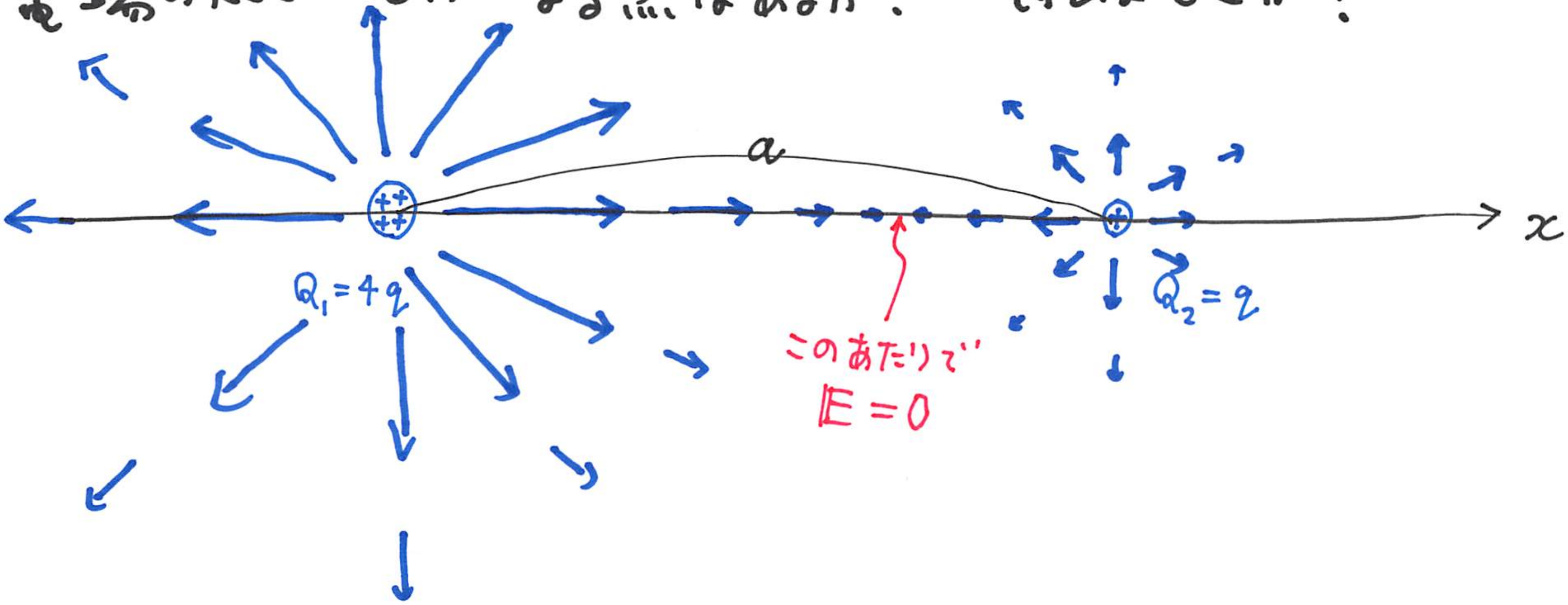
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\{x^2+y^2+(z-a)^2\}^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix} + \frac{Q}{\{x^2+y^2+(z+a)^2\}^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z+a \end{pmatrix}\right]$$



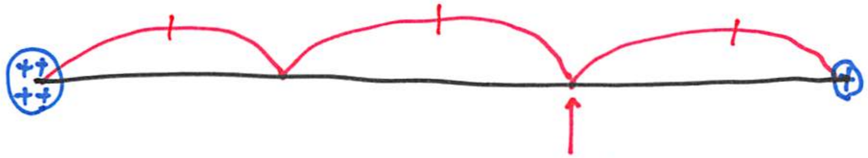
青い矢印は電場ベクトル

x軸上に限定して見ると、このあたりで電場が最強になる。

例題．点$(0,0,0)$に電荷$Q_1=4q$，点$(a,0,0)$に電荷$Q_2=q$がある．
電場の大きさがゼロになる点はあるか？ それはどこか？



Q_1が作る電場はQ_2が作る電場の4倍の強さ．
距離が2倍になれば電場は $\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$倍



$x=\frac{2}{3}a$の点　座標$\left(\frac{2}{3}a,0,0\right)$

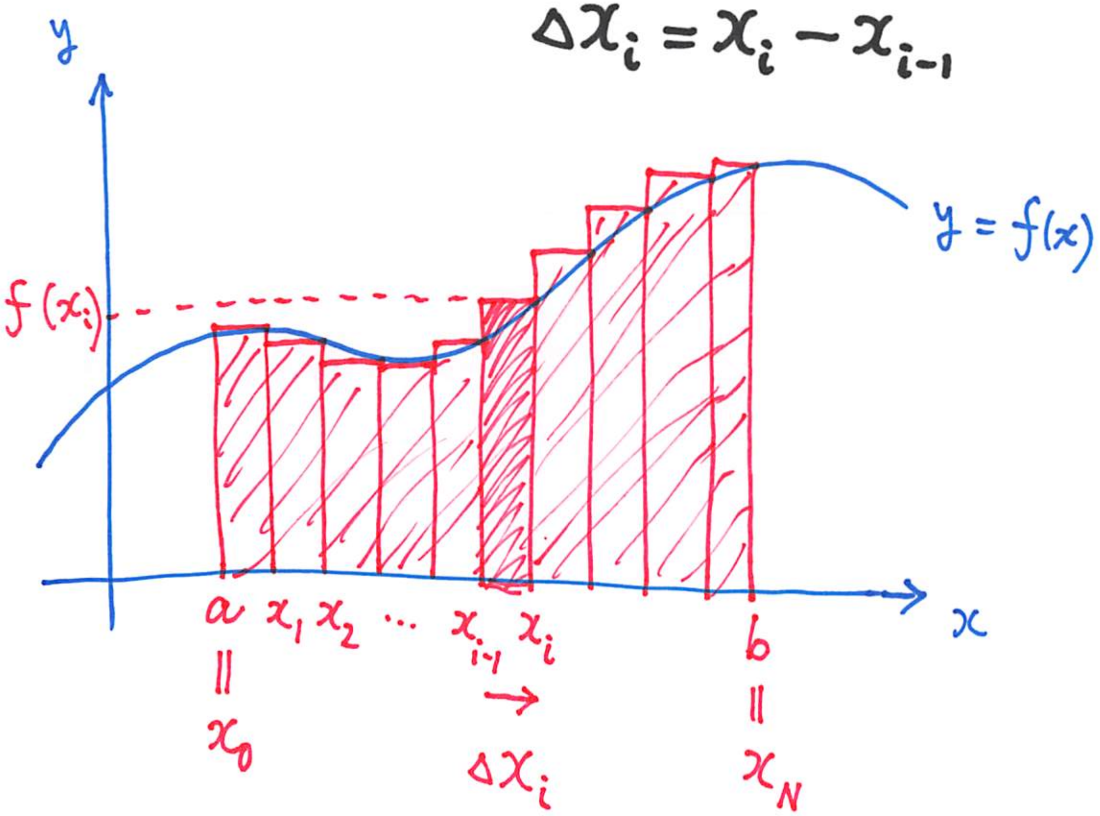
積分とは何か？

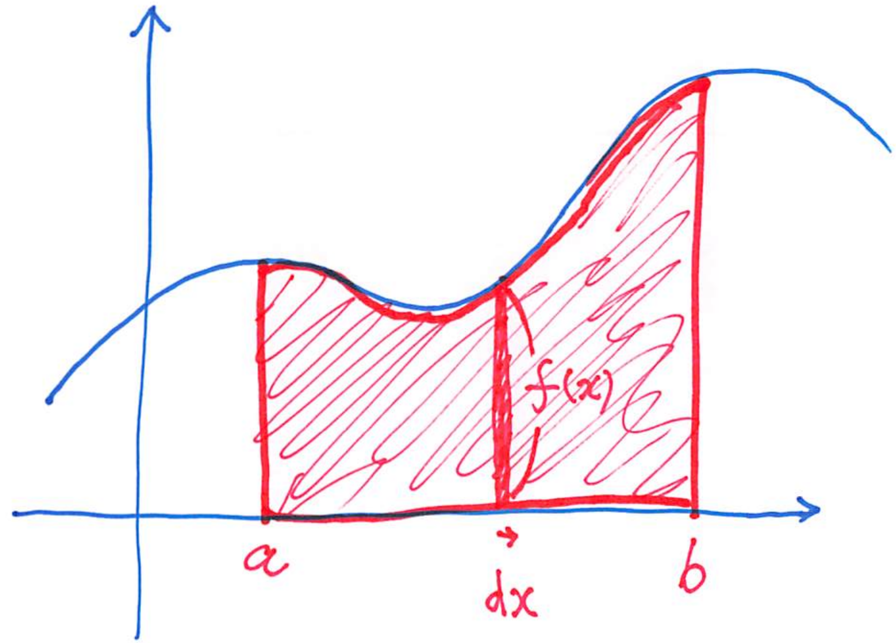
有限分割　　　　　　　　　　無限分割

和分　　　　　　　　　　　　積分

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot\Delta x_i \xrightarrow{N\to\infty} S = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



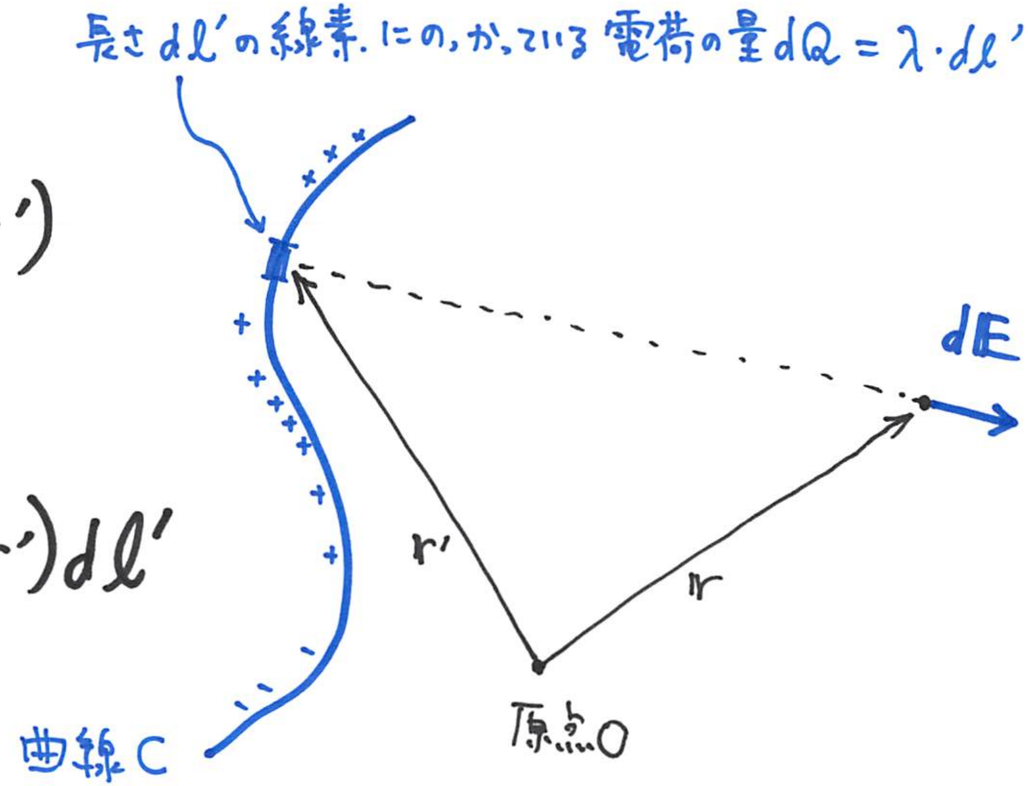


電荷線密度 λ

長さ dl の線要素にのっかっている電荷量 $dQ = \lambda \cdot dl$

線電荷が作る電場

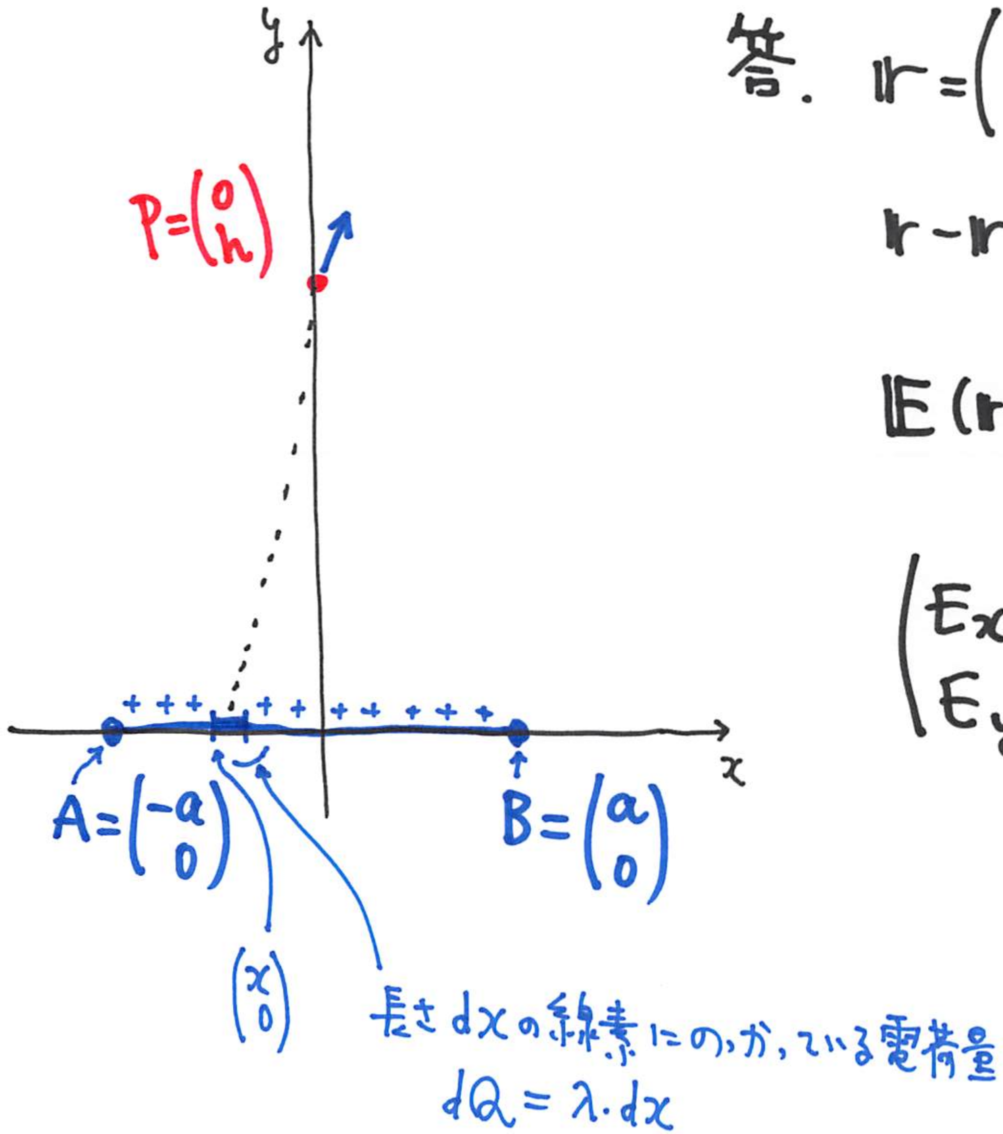
曲線 C に沿って点 $\mathbf{r}'$ の近傍に線密度 $\lambda(\mathbf{r}')$ の電荷が分布しているとき、
位置 $\mathbf{r}$ にできる電場



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{dQ(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dl'$$

例題　平面の直交座標を(x, y)とする。
点$A(-a, 0)$と点$B(a, 0)$を両端とする線分AB上に
一定の線密度λの電荷が分布しているとき、点$P(0, h)$にできる電場を求めよ。



答.　$\mathbb{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \quad \mathbb{r}' = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

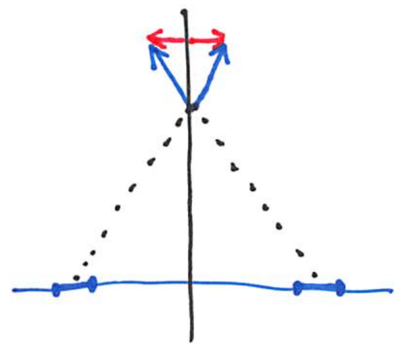
$$\mathbb{r} - \mathbb{r}' = \begin{pmatrix} -x \\ h \end{pmatrix} \qquad \|\mathbb{r} - \mathbb{r}'\|^2 = x^2 + h^2$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_C \frac{\lambda \, d\ell}{\|\mathbb{r} - \mathbb{r}'\|^3} (\mathbb{r} - \mathbb{r}')$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{\lambda \, dx}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -x \\ h \end{pmatrix}$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{-\lambda x}{(x^2+h^2)^{3/2}}\,dx$$

$$= 0.$$



関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x)$

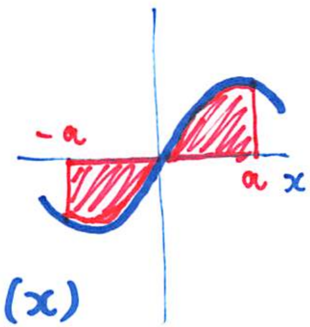
が任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(-x) = -f(x)$$

を満たすなら、f を奇関数という。

このとき、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

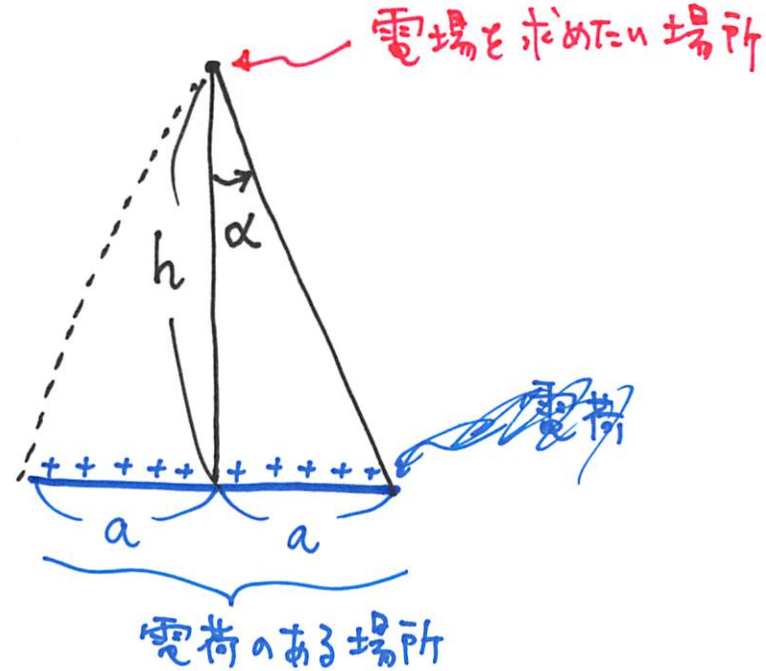


$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda h}{(x^2+h^2)^{3/2}}\,dx$$

ここの計算
自習用テキスト
を参照

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\lambda}{h}\cdot\sin\alpha$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$$



総電荷量 $Q = \lambda \cdot 2a$ を使って書くと、

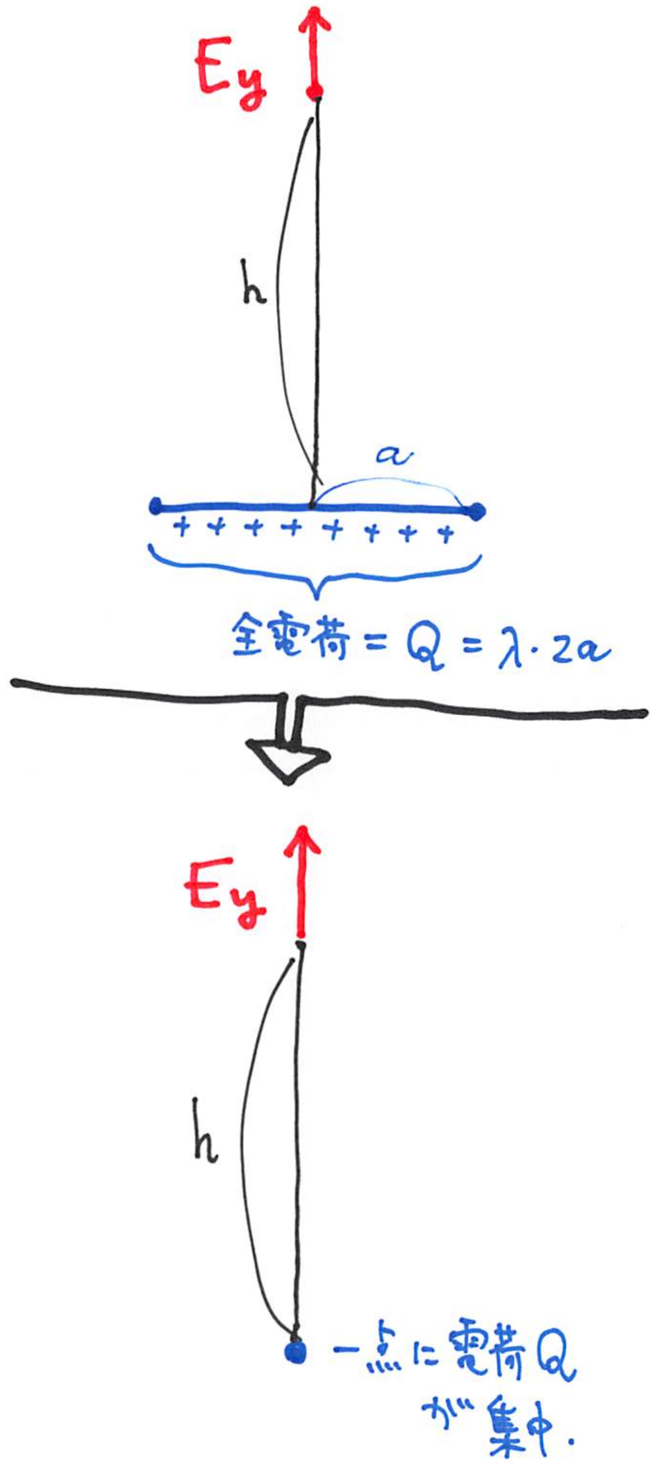
$$E_y = \frac{\lambda \cdot 2a}{4\pi\varepsilon_0 \, h \cdot \sqrt{a^2+h^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \, h\sqrt{a^2+h^2}}$$

整合性チェック

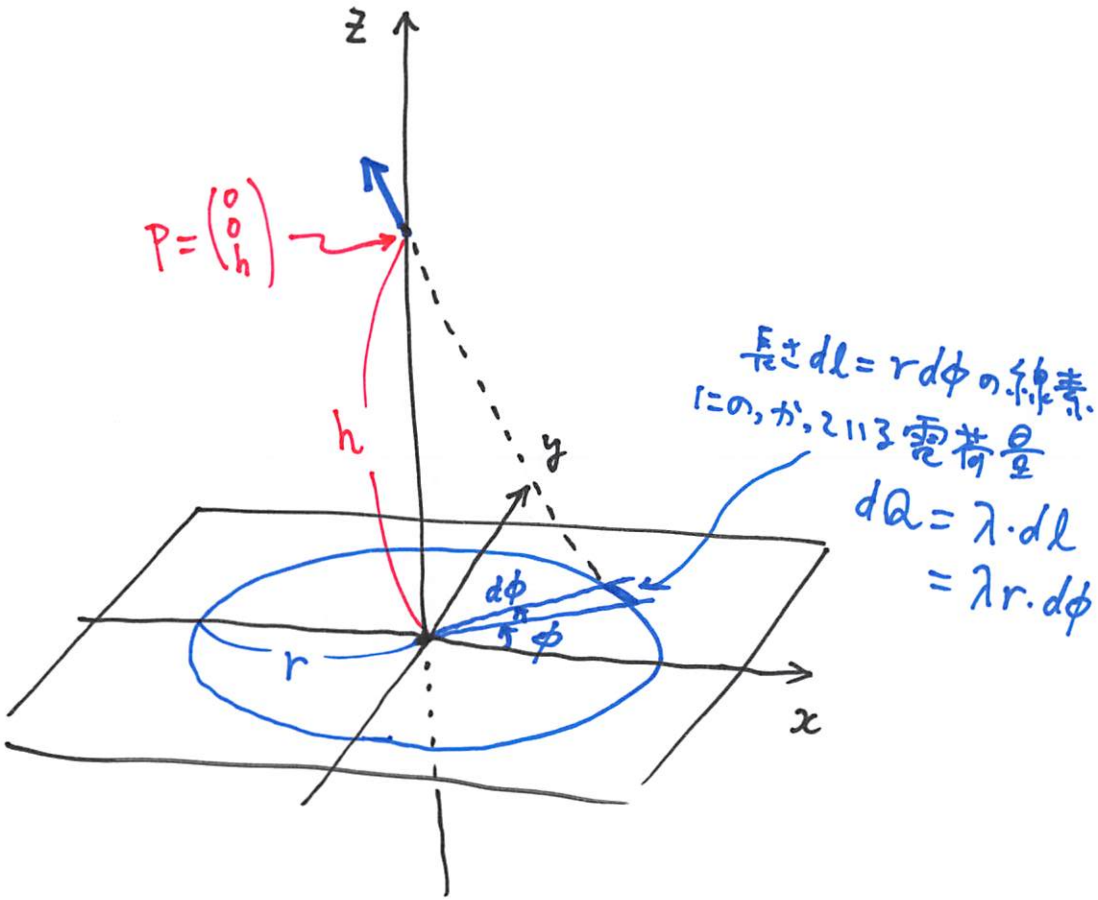
Q, h を一定にとどめて $a \to 0$ の極限をとると、$\lambda \to \infty$

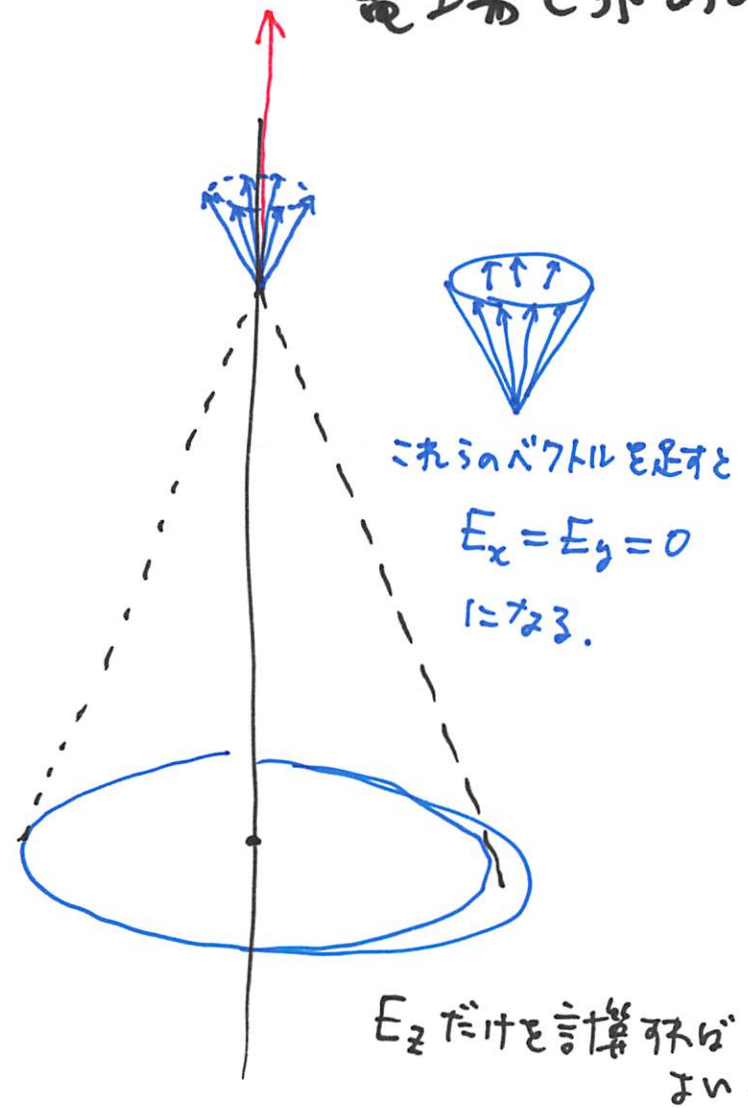
$$E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \, h^2}$$

クーロンの法則に帰着する。



例題　空間の直交座標を(x, y, z)とする.
$z=0$の平面上に$(0,0,0)$を中心とする半径rの円周があり,
円周上に一定の線密度λで電荷が分布しているとき,$(0,0,h)$にできる電場を求めよ.

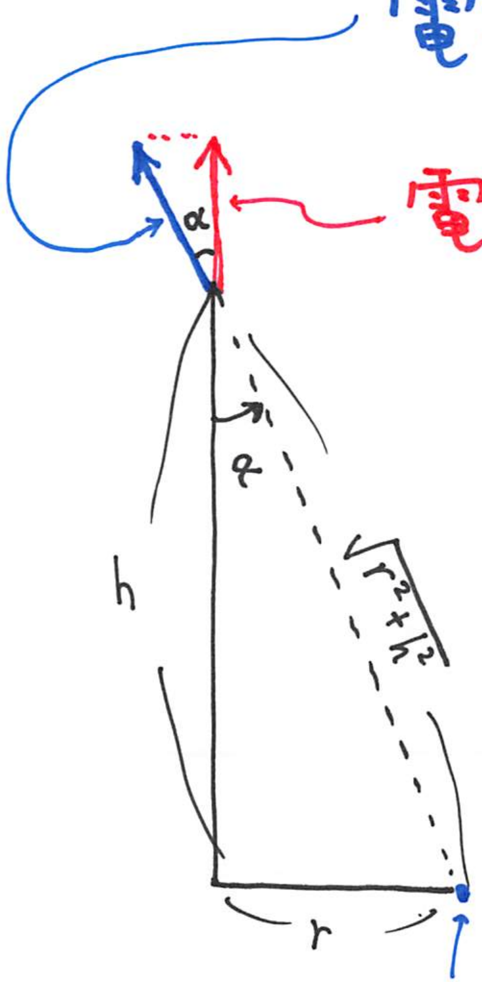




ちょっぴり電荷dQが作る

$$\text{電場の大きさ} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{r^2+h^2}$$

$$\text{電場の}z\text{成分} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{r^2+h^2}\cdot\cos\alpha \quad \left(\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$$



ちょっぴりの電荷

$dQ = \lambda r\, d\phi$

これを総電荷 $Q = \lambda\cdot 2\pi r$ にわたって積分すると,

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2+h^2}\cdot\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

$$= \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+h^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\lambda r\cdot h}{2\varepsilon_0 (r^2+h^2)^{3/2}}$$

整合性チェック

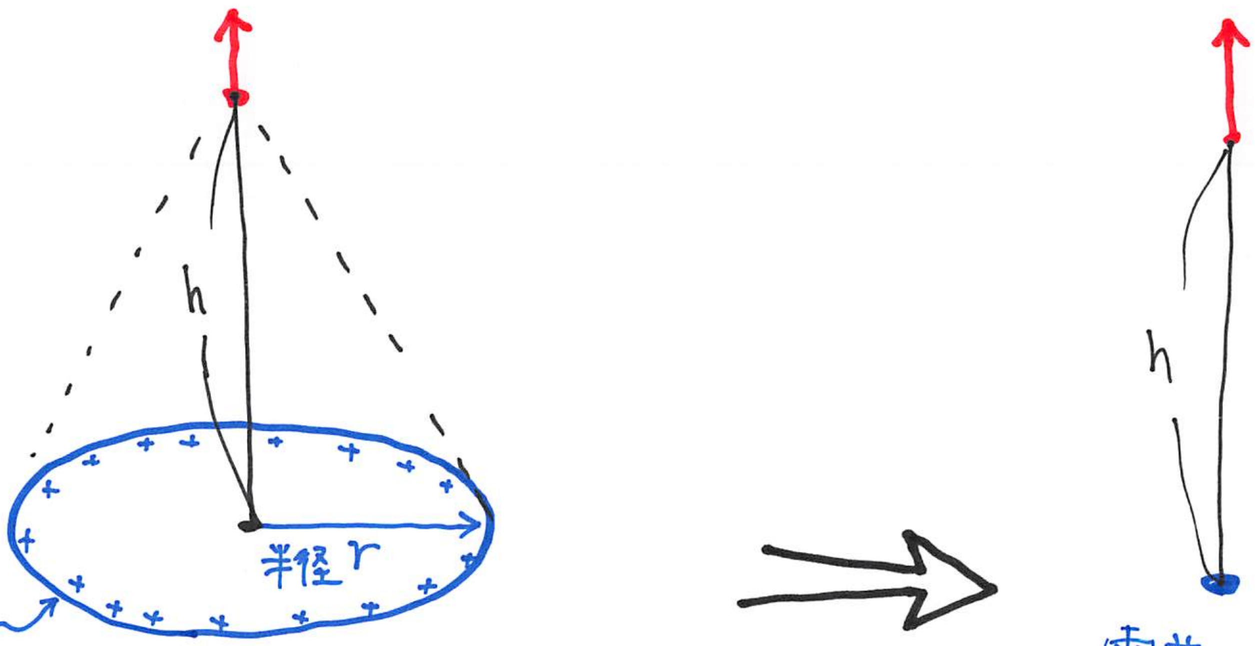
全電荷 $Q=\lambda\cdot 2\pi r$ を一定に保ちながら

$r \longrightarrow 0$

$\lambda \longrightarrow \infty$ の極限をとると、

$$E_z=\frac{Q\cdot h}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+h^2\right)^{3/2}} \longrightarrow E_z=\frac{Q\cdot h}{4\pi\varepsilon_0 h^3}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}$$

クーロンの法則に帰着。



全電荷 Q が一様な密度で分布

電荷 Q が一点に集中