物理学基礎 II

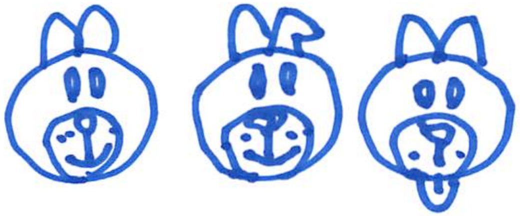
講義３の板書ノート

スカラー・ベクトルと座標系

谷村 省吾

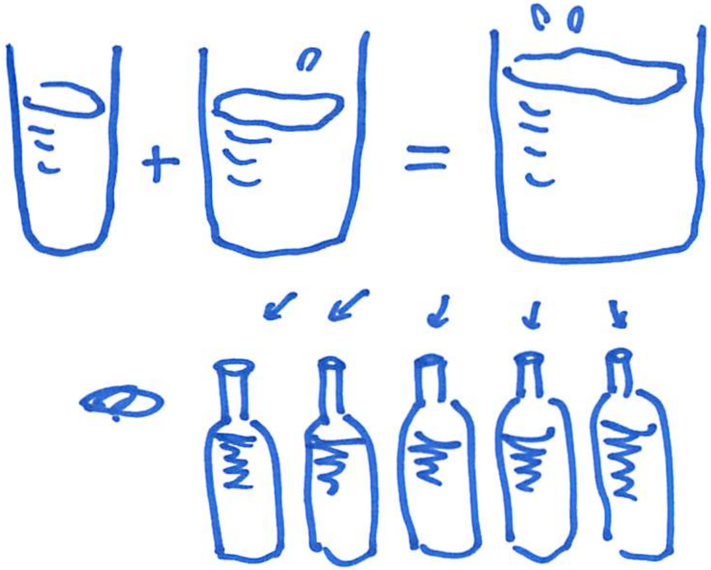
物理量の分類

- 離散量(discrete)…1つ2つと数えられる明瞭な単位・区切りがある量。個数や人数など。



個・匹・頭・人などの単位が便宜的に用いられるが、数学的には単位はなしで済ませられる。

- 連続量(continuous)…どのようにも分割・合併が可能
ある種の一様性・均質性を備えている。



水ならコップ1杯、2杯、… 1リットル、2リットル
というように単位量を定めると、それの何倍か
ということで数値化できる。

連続量はさらに2種類に分けられる

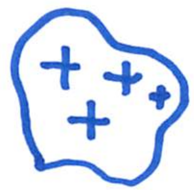
連続量

- スカラー量 (scalar) … 大きさはあるが空間的な向きのない量.
  質量・電荷・エネルギーなど.

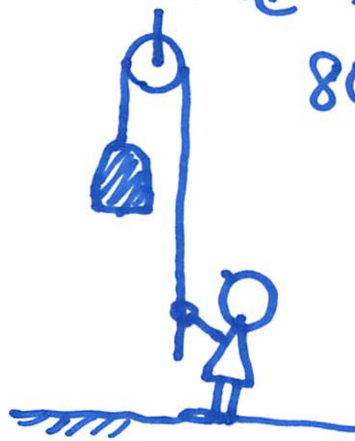
塩 5 kg

$M_1 + M_2 = M$

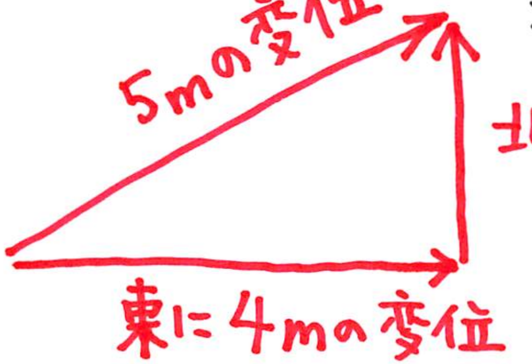
電荷 3.1 C



位置エネルギー(仕事)
80 J



- ベクトル量 (vector) … 大きさと向きのある量.
  変位・速度・力・運動量・電場など.



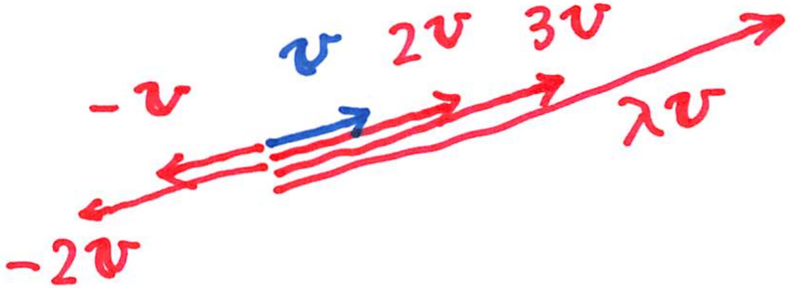
$v_1 + v_2 = v$

スカラー量でもベクトル量でもできる演算

スカラー倍(実数倍)と和

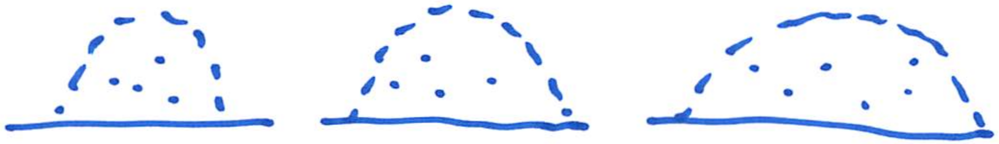
Mという量も実数λ(ラムダ)倍してλMという量を定めることができる.

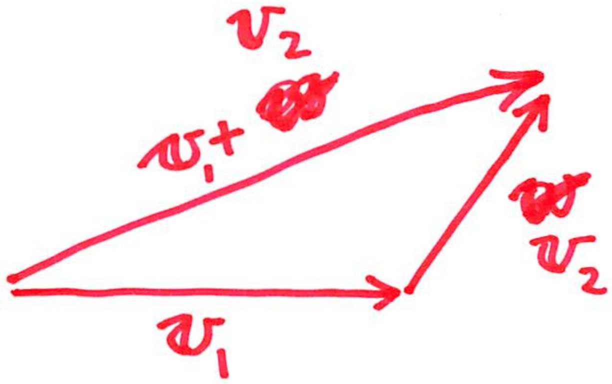
vというベクトルもλ倍してλvというベクトルを定めることができる.



量同種の量を足し算できる. ベクトルの足し算ができる.

塩 M_1 + 塩 M_2 = 塩 M





スカラー量は単位量を一つ定めると数値化できる.

$$M = c\,u$$

測りたい量 (M)　単位量の何倍かを表す係数 (c)　単位量 (u)

$$M = 50\ \mathrm{kg} = 50 \times (1000\,\mathrm{g}) = 50{,}000\,\mathrm{g}$$
$$= 5 \times 10^4\,\mathrm{g}$$

質量 M は、kg（キログラム）という量の50倍だ.

ベクトル量は単位ベクトルを複数個定めると数値化できる。

$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{e}_x + r_y \mathbf{e}_y + r_z \mathbf{e}_z$$

測りたい量

係数

$\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ 単位ベクトルの組を基底という。

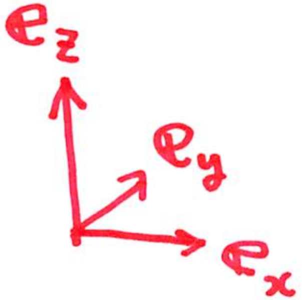
東に4mの変位 + 東に3mの変位 = 東に7mの変位　は係数の足し算ができるが

東に4mの変位 + 北に3mの変位 =　は、ベクトルの和としては意味があるが、係数の和に帰着させることができない。

任意の変位ベクトル $\mathbf{r}$ = (東に1mの変位)×(何倍) = $\mathbf{e}_x \cdot r_x$

+ (北に1mの変位)×(何倍) + $\mathbf{e}_y \cdot r_y$

+ (上に1mの変位)×(何倍) + $\mathbf{e}_z r_z$



どんな基底を使っているか、了承できている場面では基底を省略して係数だけのベクトルで書き表してよい。

$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{e}_x + r_y \mathbf{e}_y + r_z \mathbf{e}_z \longrightarrow \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

東に4mの変位＋東に3mの変位 $= \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{m} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\,\mathrm{m} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\,\mathrm{m} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

東に4mの変位＋北に3mの変位 $= \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{m} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3\,\mathrm{m} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{m} \\ 3\,\mathrm{m} \\ 0 \end{pmatrix}$.

間違って変な足し算をする心配がない。

ベクトルの演算

- スカラー倍(実数倍)　$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$

- 和　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$

- 内積 inner product

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_x, a_y, a_z)\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- ノルム norm

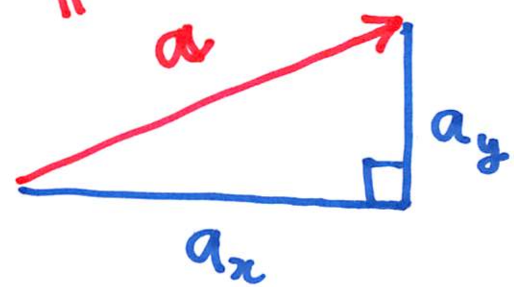
$$\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

ベクトルの大きさ・長さ

二重タテボウサンドイッチ

2次元の場合,

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$



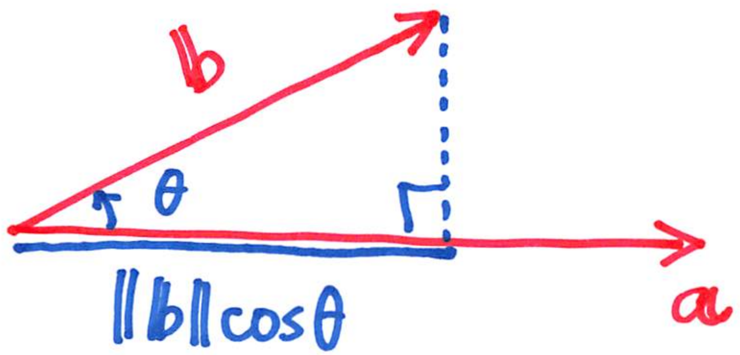
- 外積 exterior product, cross product

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{pmatrix}$$

内積の幾何学的性質

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\underbrace{\|\mathbf{a}\|}_{(\mathbf{a}\text{の長さ})}\cdot\underbrace{\|\mathbf{b}\|\cdot\cos\theta}_{(\mathbf{a}\text{に落とした}\mathbf{b}\text{の影の長さ})}$$

(aの長さ)×(aに落とした bの影の長さ)



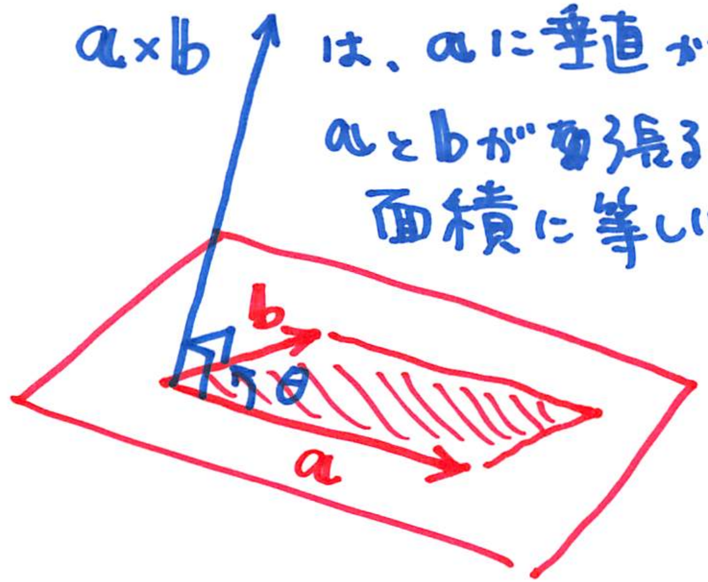
外積の幾何学的性質

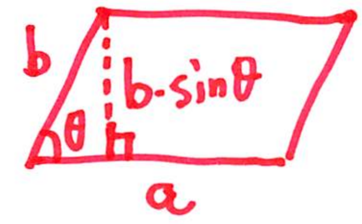
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=0$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=0$$

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|=\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cdot\sin\theta$$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は、$\mathbf{a}$に垂直かつ、$\mathbf{b}$に垂直で、$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$が張る平行四辺形の面積に等しい大きさを持つ。





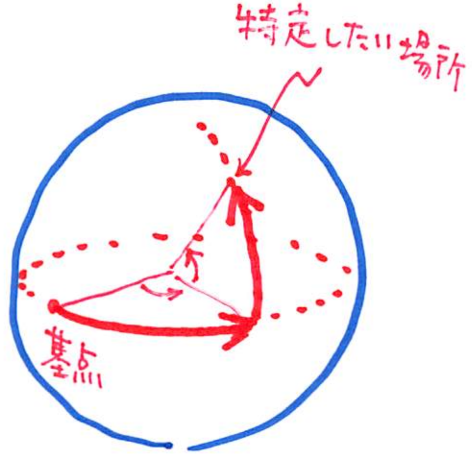
座標 coordinate

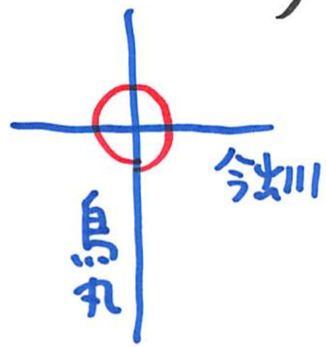
平面や地球表面や空間中の場所・位置を記述する方法.

・地名：名古屋市 千種区 不老町（エリアを絞る）

・地名：京都市 烏丸(からすま)今出(いまで)川(がわ)（南北に走る烏丸通と東西に走る今出川通の交差点）

・座標：東経〇度、北緯〇度





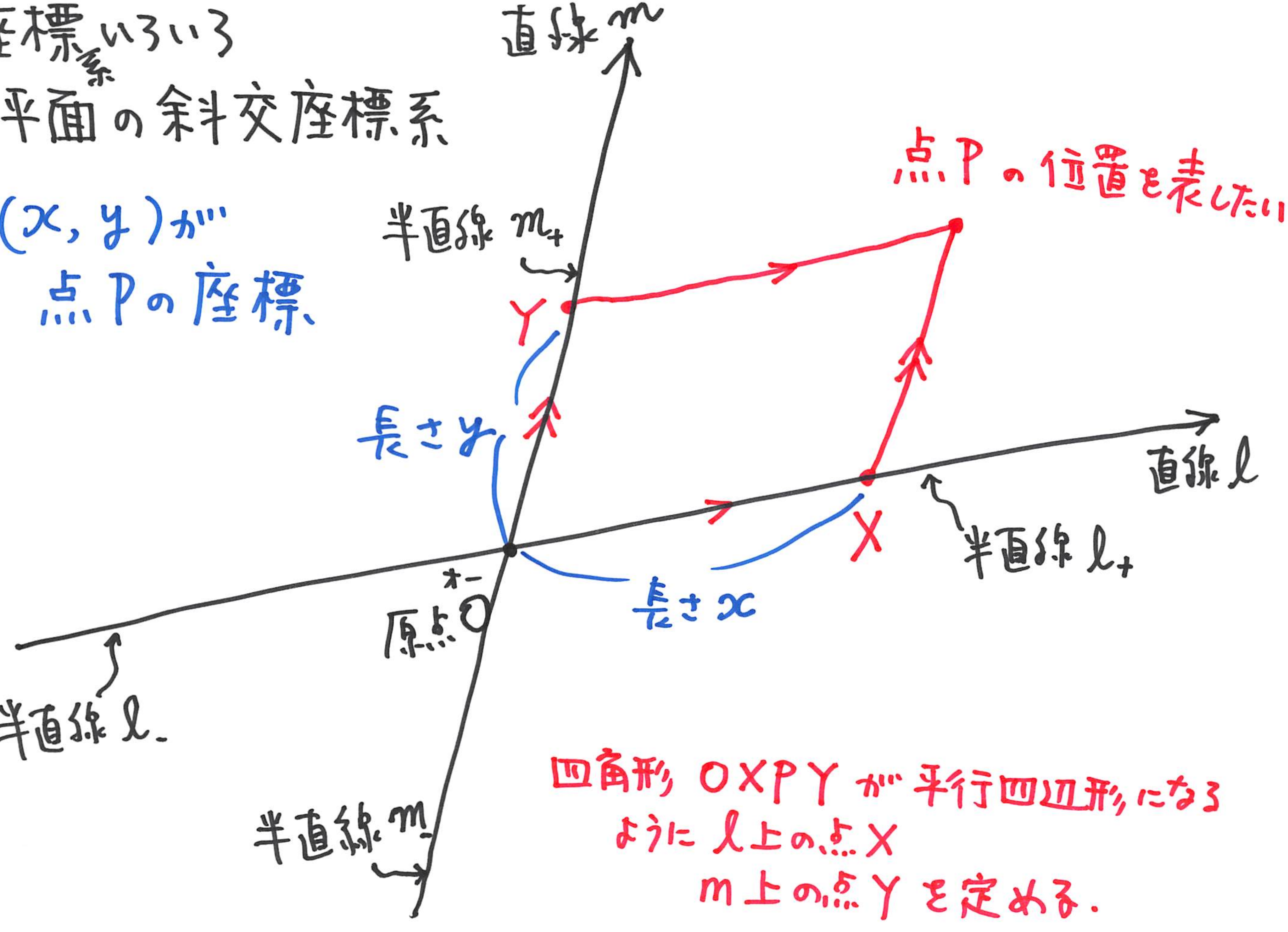
数値の組 (x, y)

(x, y, z)

などで位置を指定する.

座標系いろいろ

・平面の斜交座標系

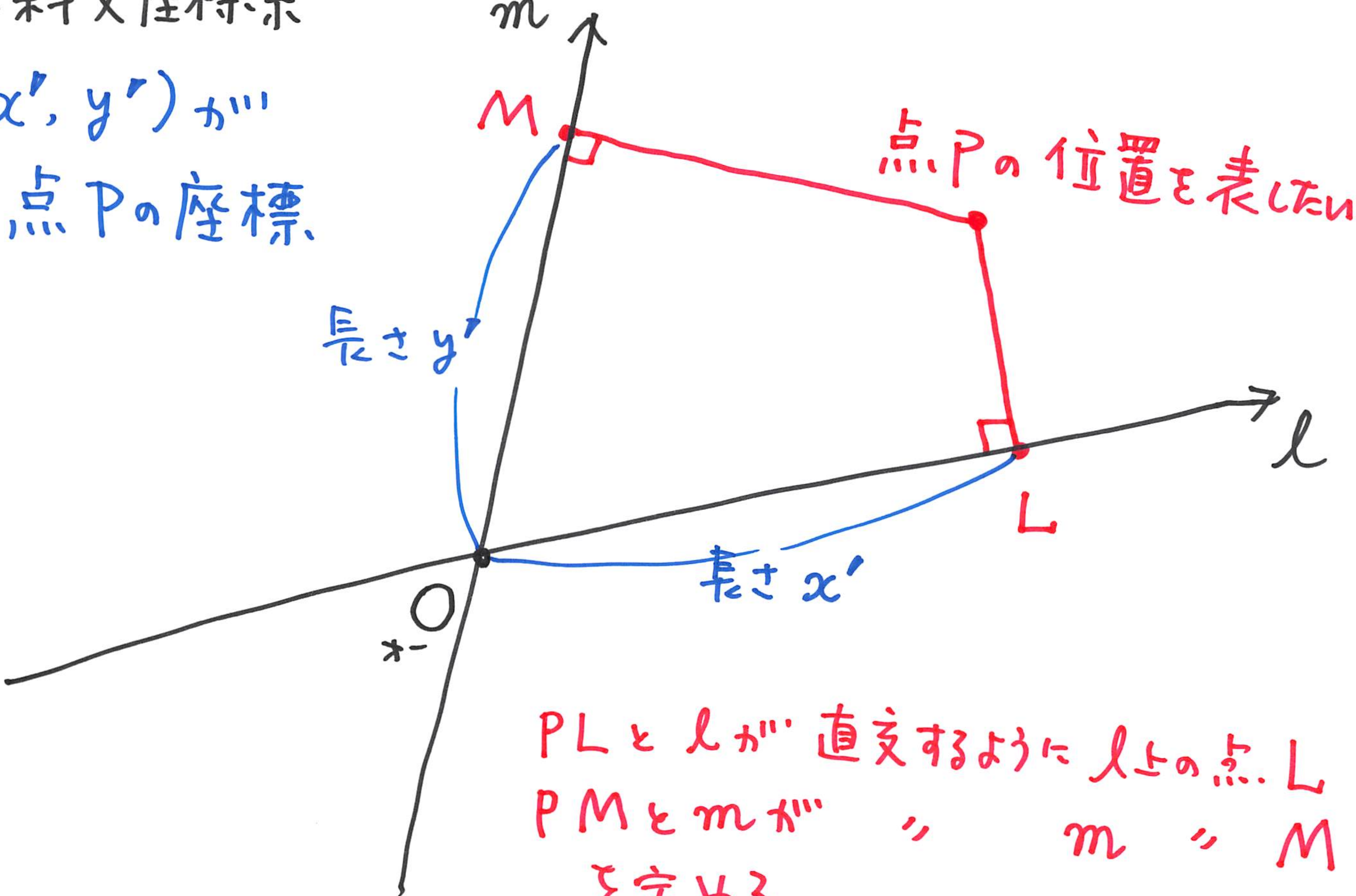


(x, y)が
点Pの座標

四角形 OXPY が平行四辺形になる
ように l上の点X
m上の点Y を定める.

・余斜交座標系

(x', y') が
点Pの座標

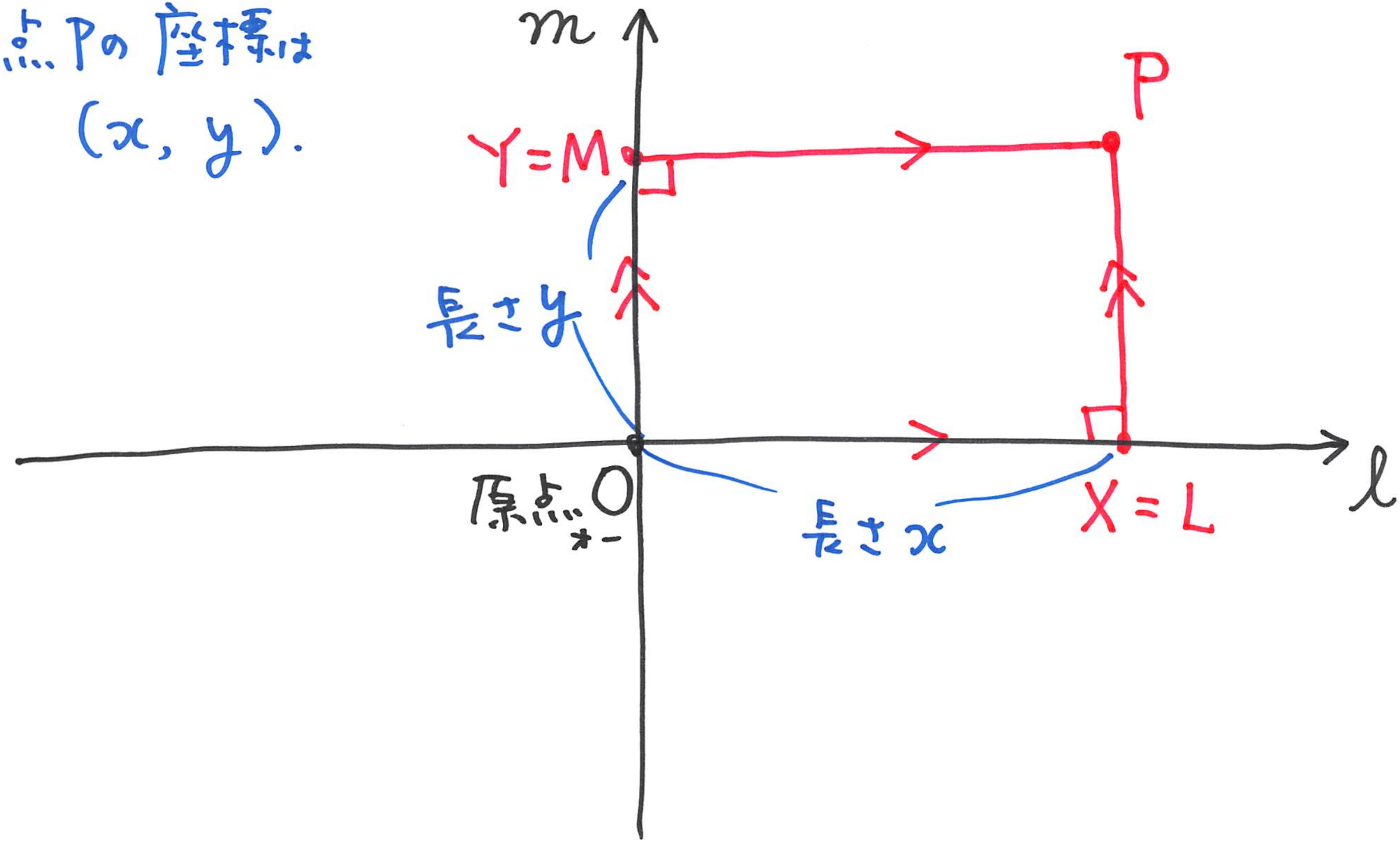


PLとlが直交するようにl上の点L
PMとmが 〃 m 〃 M
を定める.

・直交座標系 ＝ デカルト座標系

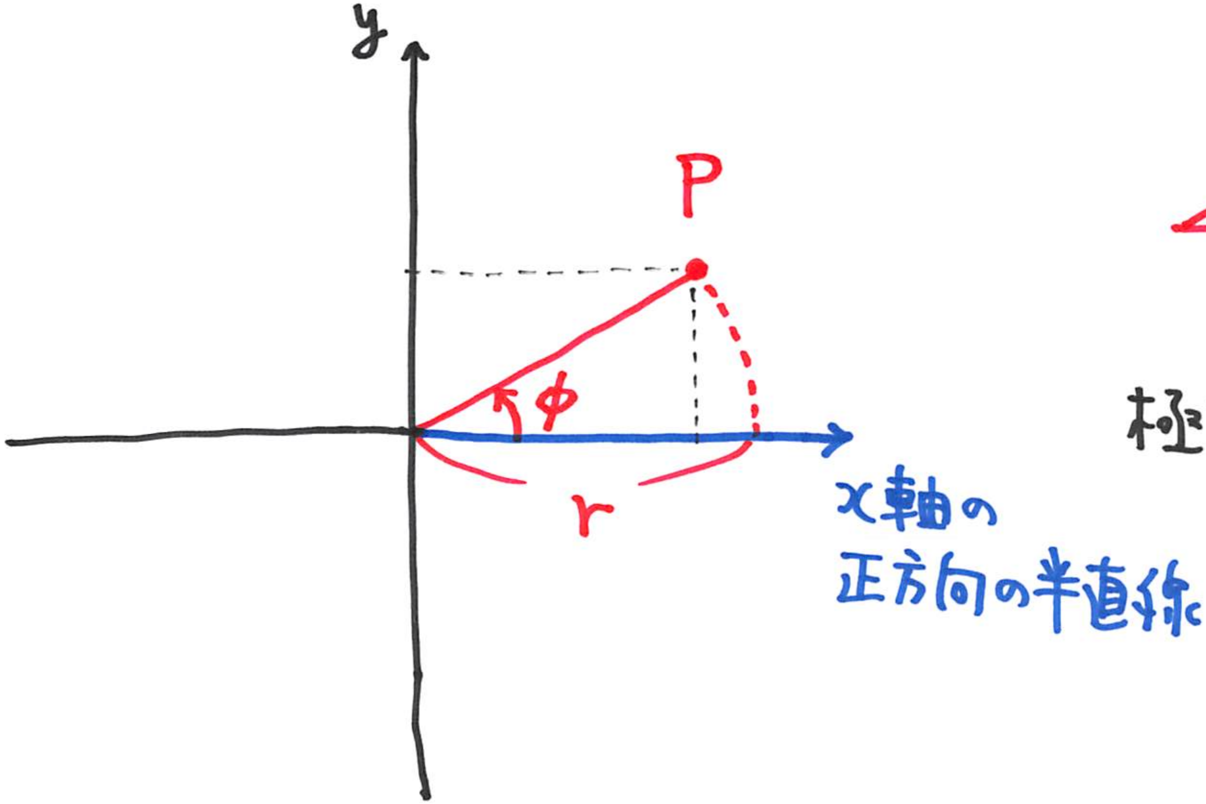
座標軸 l と m が直交するように選ぶ.

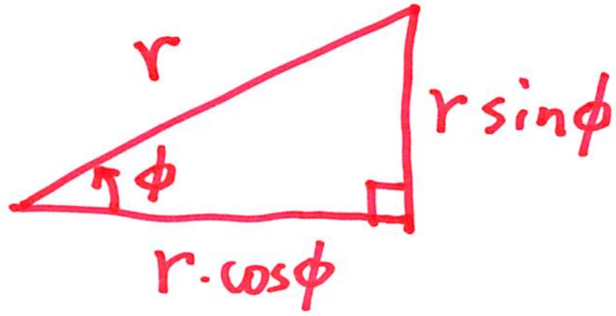
点Pの座標は
(x, y).



・平面の極座標

原点からの距離 r と，一定の半直線からの角度 ϕ で点の位置表す.





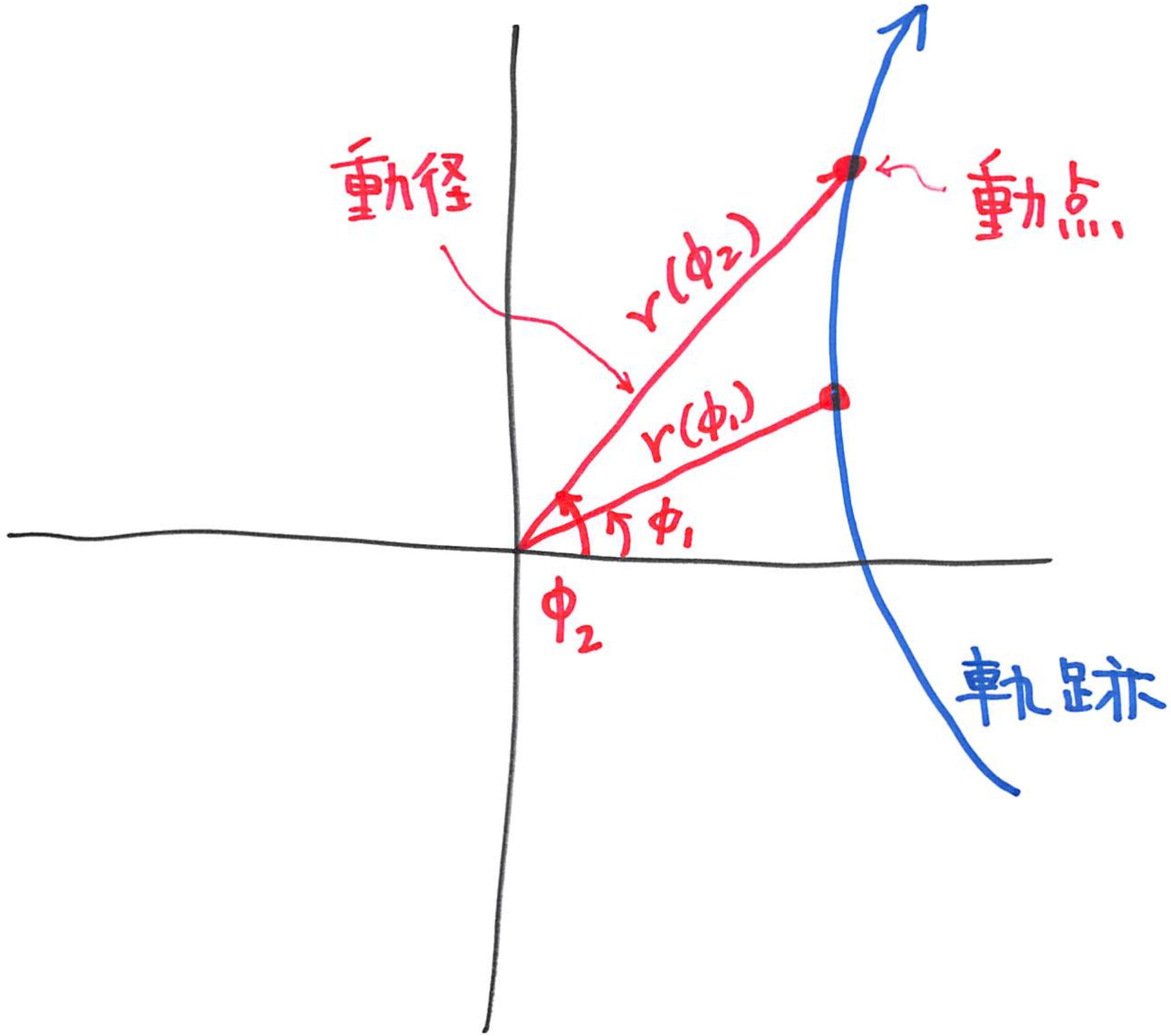
極座標 (r, ϕ) と直交座標 (x, y) の関係式

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \quad \left(r = \sqrt{x^2+y^2}\right) \\ \tan\phi = \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi} = \dfrac{y}{x} \quad \left(\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right) \end{cases}$$

曲線の極座標

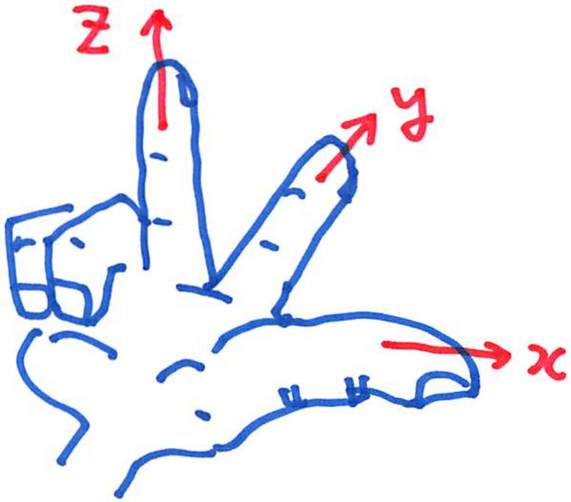
動径長さ r を角度 ϕ の$\overbrace{\text{関数}}^{r(\phi)}$として与えて，動点の軌跡を定める

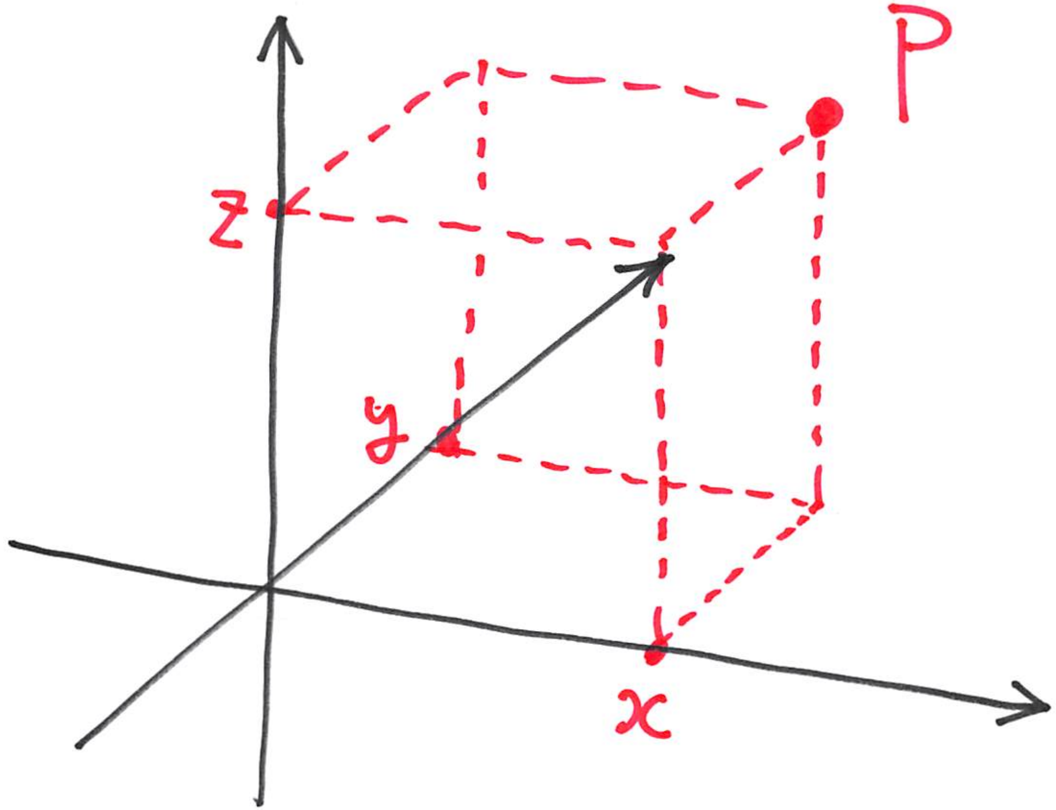


・3次元空間の直交座標

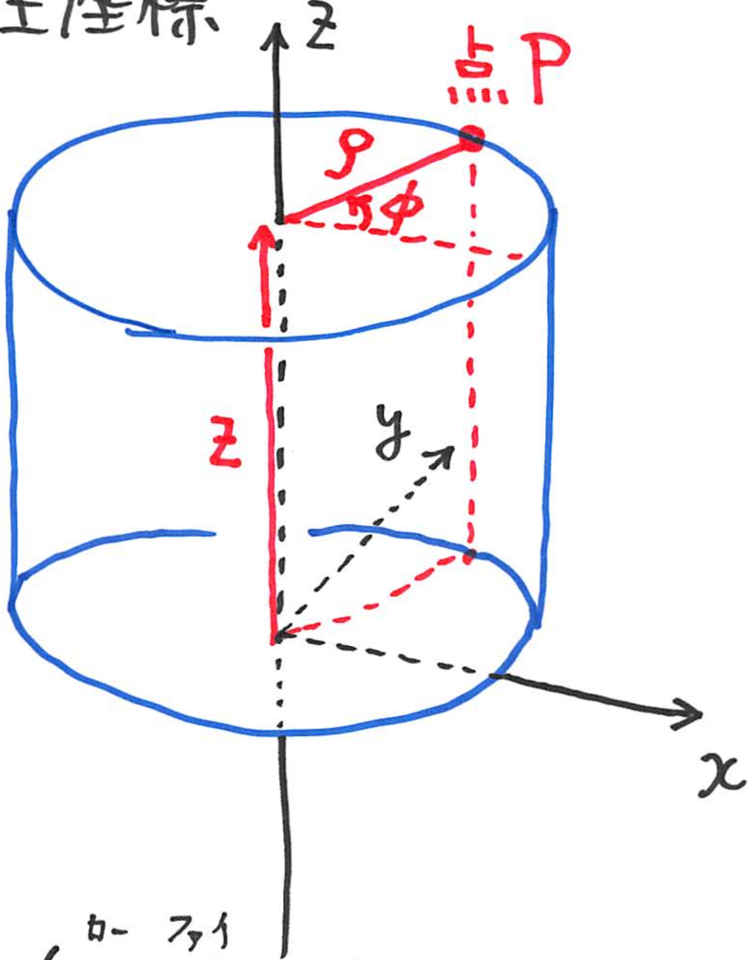
x軸の正の方向…東向き…右手の親指
y　〃　…北　…右手の人さし指
z　〃　…上　…右手の中指

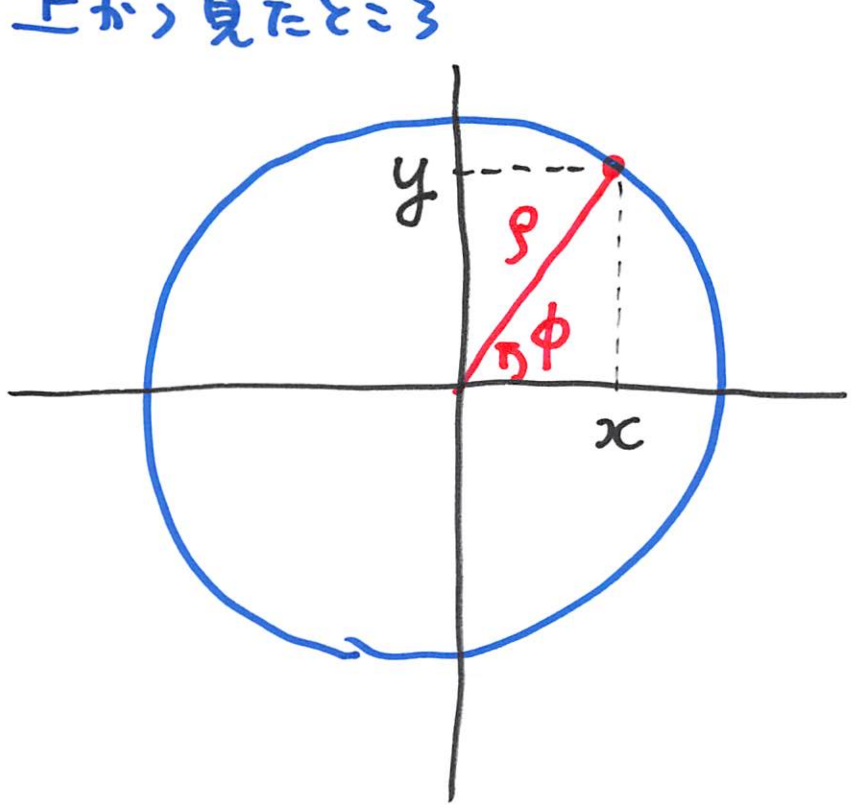
の向きになるように選んだものを **右手系** という.





・円柱座標





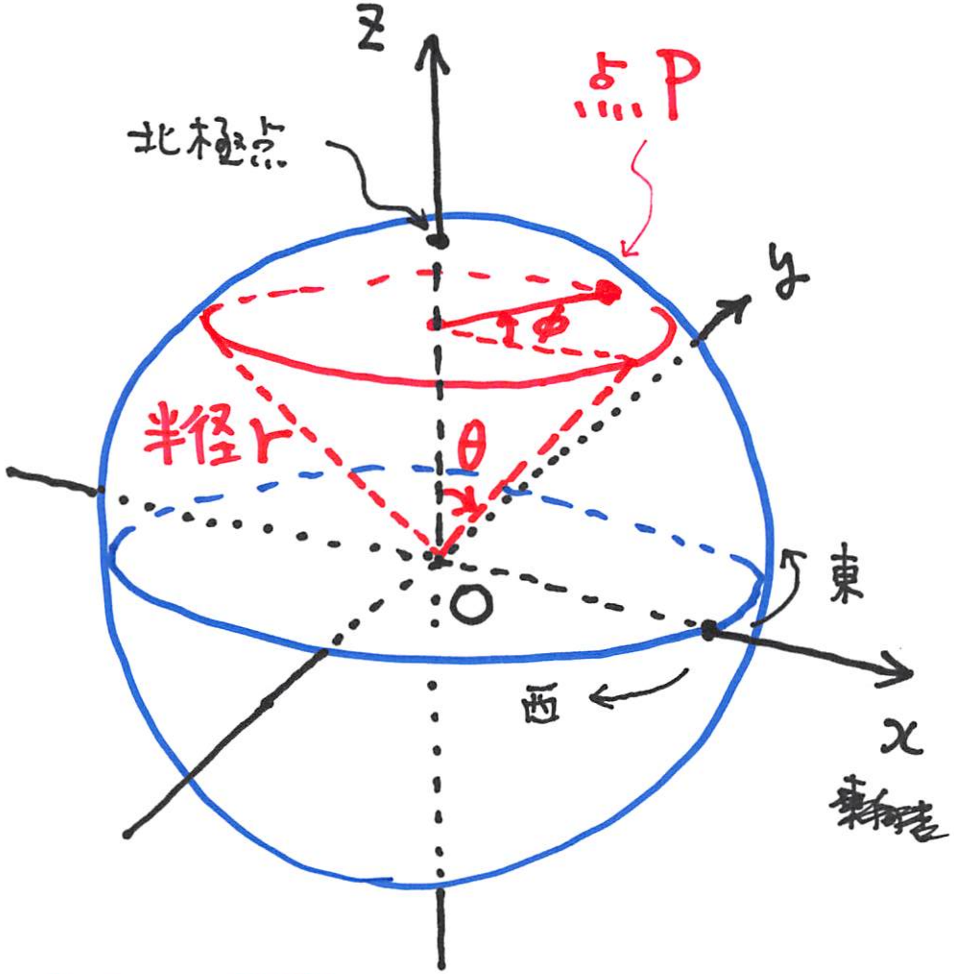
$(\overset{\text{ロー}}{\rho}, \overset{\text{ファイ}}{\phi}, z)$ が円柱座標

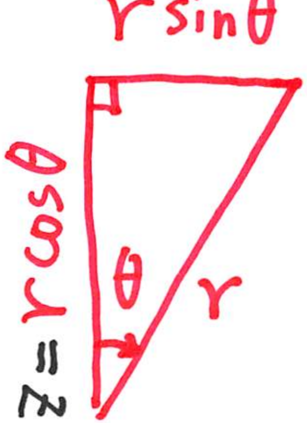
(円筒座標ともいう)

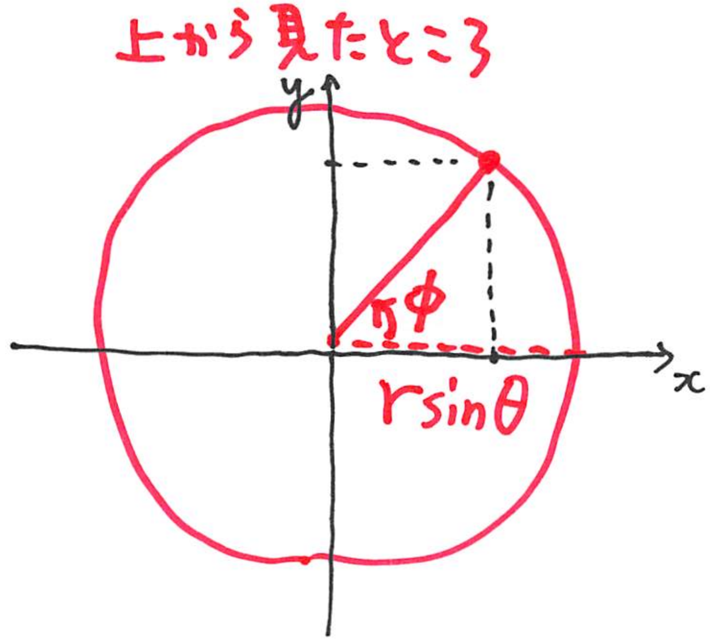
直交座標との関係

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

・3次元空間の極座標







直交座標との関係

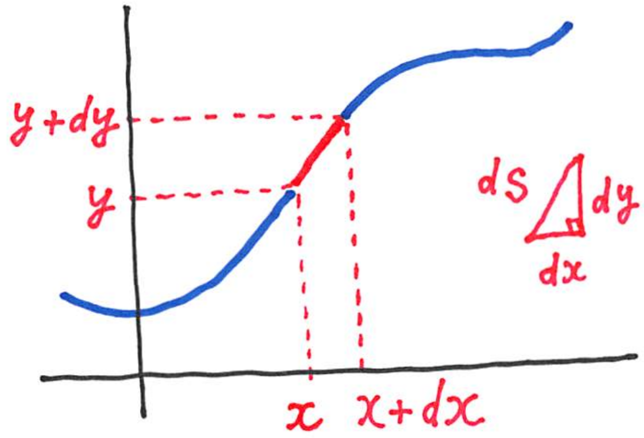
$$\begin{cases} x = r\sin\theta \cdot \cos\phi \\ y = r\sin\theta \cdot \sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

点Pの位置を
原点Oからの距離r,
北極点からの角度θ シータ,
~~東向き軸~~からの角度φ ファイ の組 (r, θ, φ) で表す.
x軸正の半直線

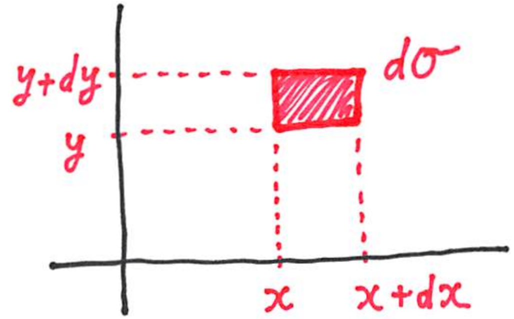
平面上の曲線の線要素（微小な長さ）ds

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$ 長さの要素ともいう



平面上の面積要素（微小面積）$d\sigma = dx\,dy$（シグマ）



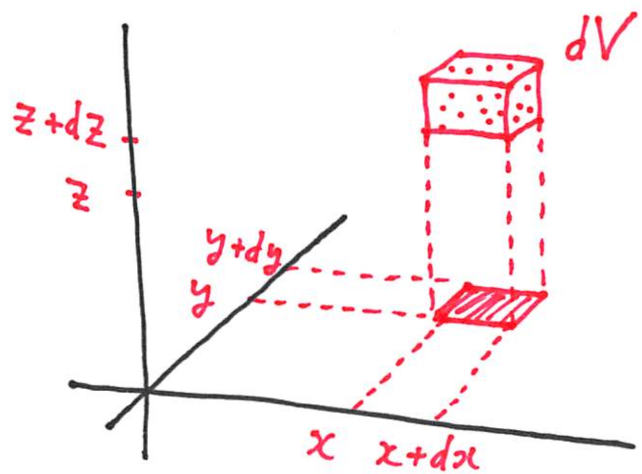
シグマの小文字の書き方 σ　大文字 Σ

曲面・表面のことを英語でsurfaceという。

ギリシャ文字のσはローマ字のsにあたる。

3次元空間中の体積要素 $dV = dx\,dy\,dz$

体積のことを英語でvolumeという。

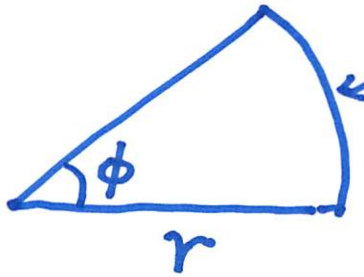


弧度法（ラジアン）の定義

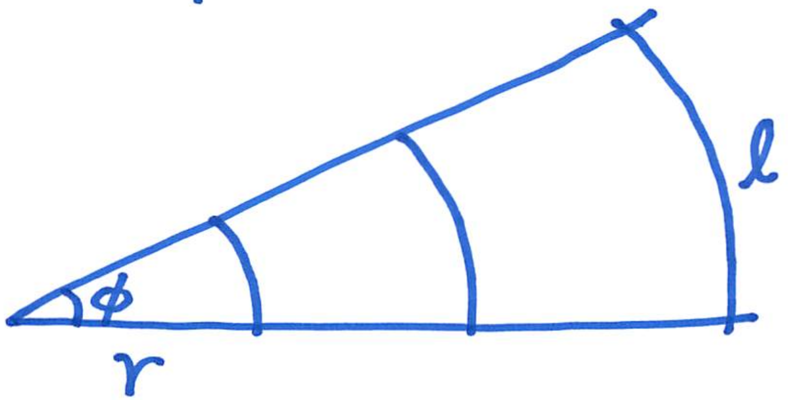
比例関係

$y \propto x$

$y = ax$

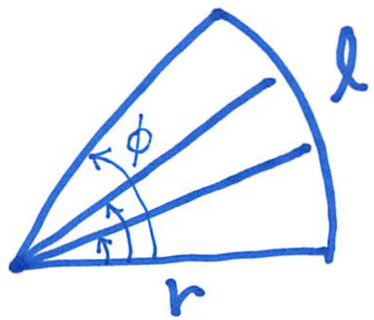


扇型の弧の長さlを求めたい。



中心角ϕが一定ならば、

lはrに比例する。 $l \propto r$



半径rが一定ならばlはϕに比例する。

$l \propto \phi$

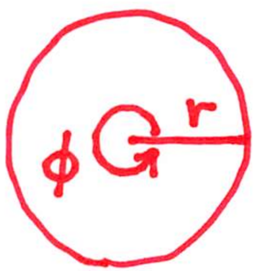
したがって $l = ar\phi$ → $l = r\phi$

いっそのこと比例係数 $a = 1$ となるように

角度ϕの単位を選んだものがラジアン

radian

rad.



360°, 一周すると

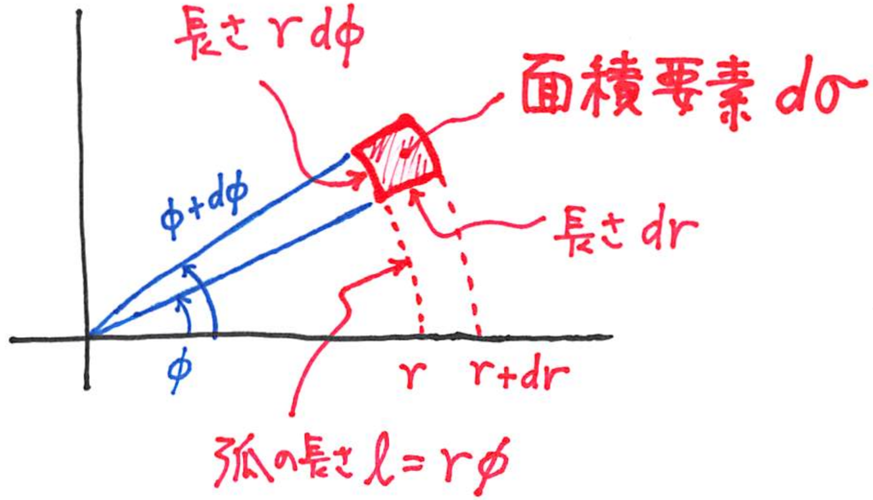
$l = 2\pi r$

つまり $360° = 2\pi$ rad

平面の極座標で表された線要素

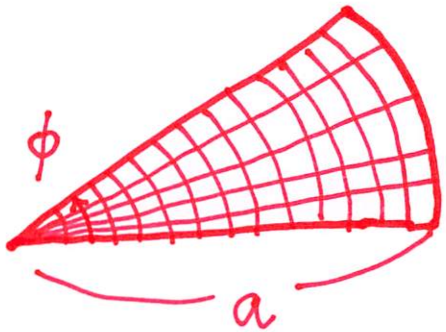
動径方向の線要素 dr

角度方向の 〃 $r\,d\phi$



面積要素 $d\sigma = dr \times r\,d\phi = r\,dr\,d\phi$

例題：半径 a, 中心角 ϕ の扇型の面積 S



$$S = \int_0^a r\,dr \int_0^\phi d\phi = \frac{1}{2}a^2 \times \phi = \frac{1}{2}a^2\phi$$

とくに $\phi = 2\pi$ のとき $S = \frac{1}{2}a^2 \cdot 2\pi = \pi a^2$

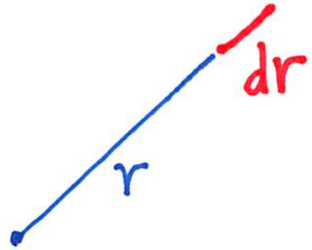
（半径 a の円の面積）

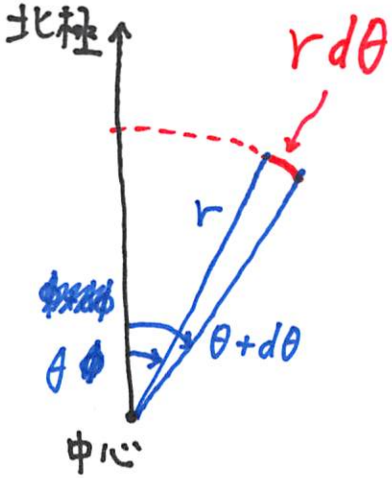
3次元空間の極座標で表された線要素

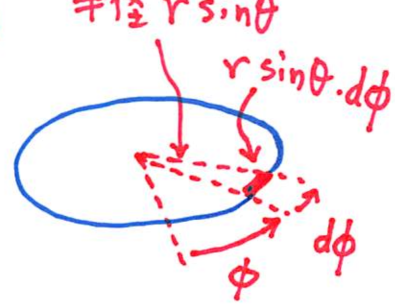
r方向の線要素 dr

θ 〃 $r\,d\theta$

ϕ 〃 $r\sin\theta\,d\phi$

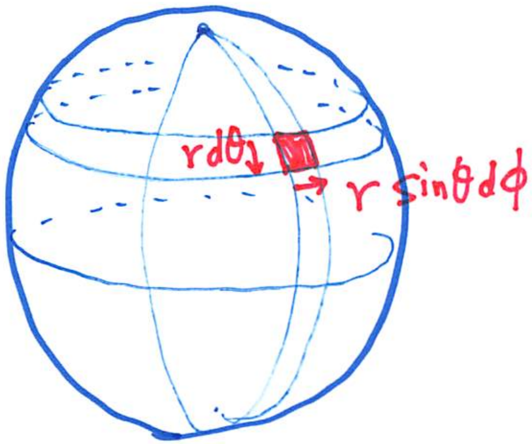






球面の面積要素

$$d\sigma = r\,d\theta \times r\sin\theta\,d\phi$$
$$= r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$



例題 北半球の面積は

$$S = \underbrace{\int_0^{\pi/2}}_{\theta\text{の積分範囲}} \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\phi\text{の積分範囲}} r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$= r^2\left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \times 2\pi$$
$$= r^2\cdot(-0+1)\cdot 2\pi$$
$$= 2\pi r^2.$$

球体の体積要素

$$dV = dr \times r\,d\theta \times r\sin\theta\,d\phi$$
$$= r^2\sin\theta\cdot dr\,d\theta\,d\phi.$$