

物理学基礎II

講義 14 の板書ノート

変位電流とアンペールの法則の修正

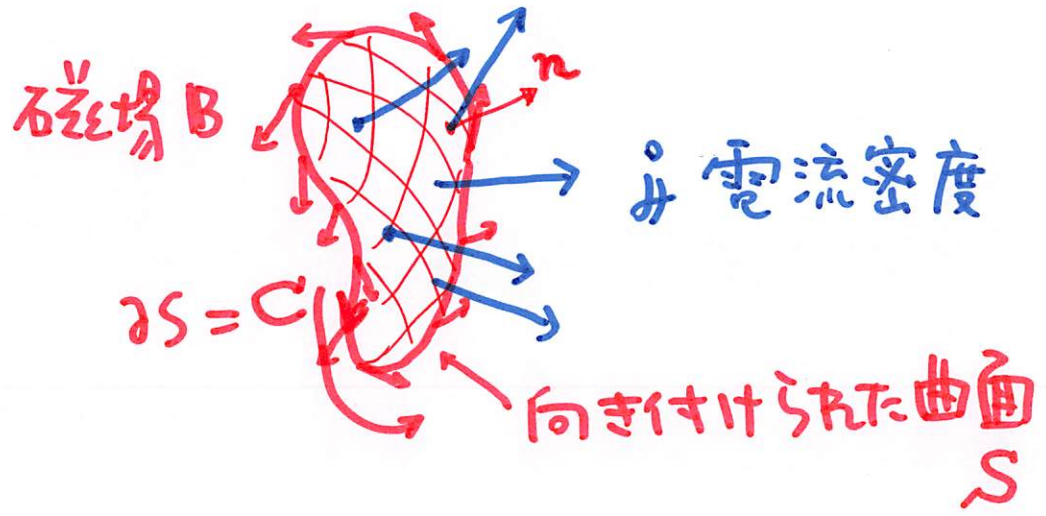
谷村 省吾

問11-12の解説

アンペールの法則 (復習)

(任意の曲面の縁 ∂S に沿った磁場の線積分) = $\mu_0 \times$ (曲面 S を貫く電流量)

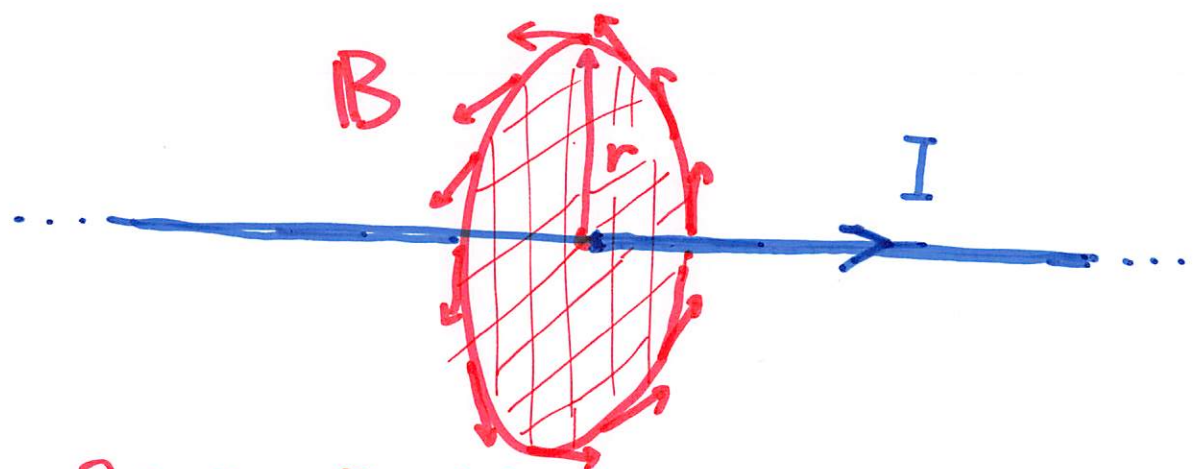
$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$



直線電流 I から距離 r 離れたところの磁場 B は、

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



S とは I に直交する半径 r の円板

• ローレンツ力の法則 (復習)

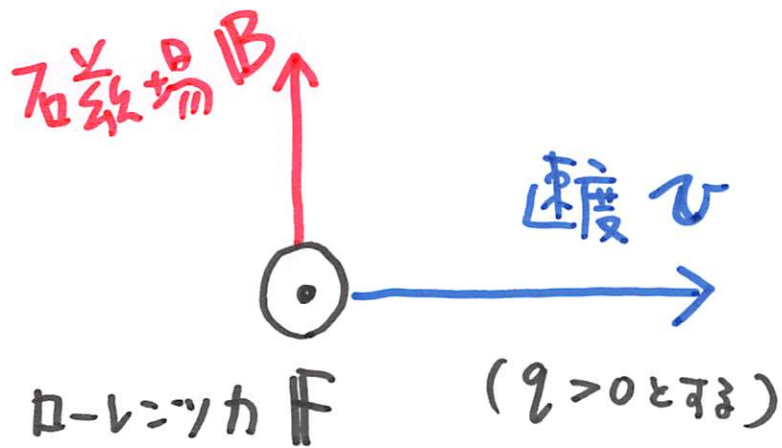
点電荷 q が速度 v で磁場 B の中を動くときに受ける力は

$$F = qv \times B.$$

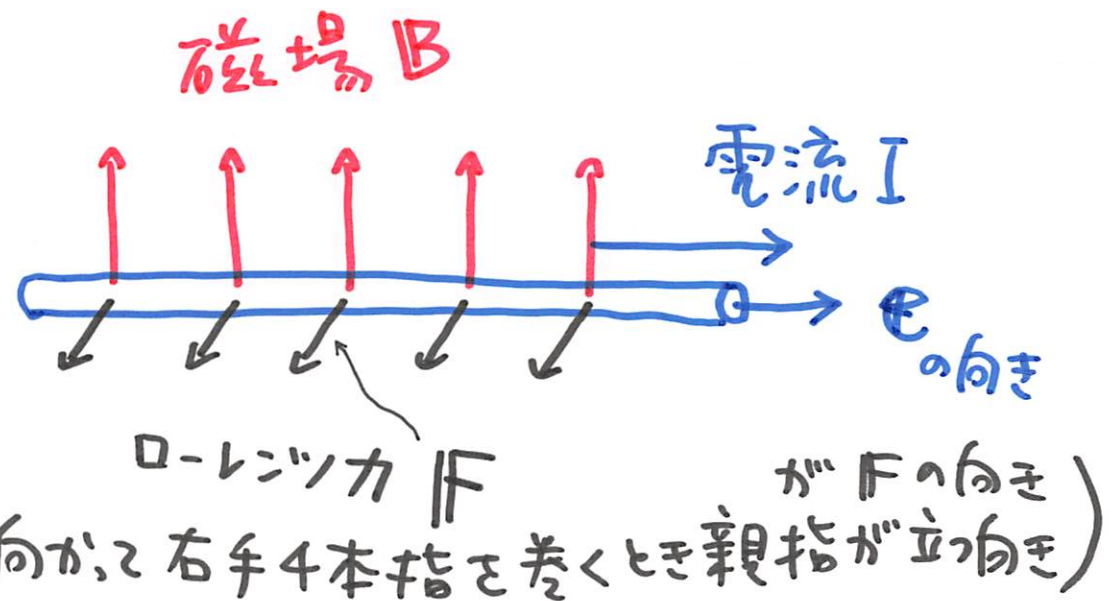
あるいは、

電流 I が流れる長さ L の直線導線が単位ベクトル e を向きとして磁場 B の中にあるときに受ける力は

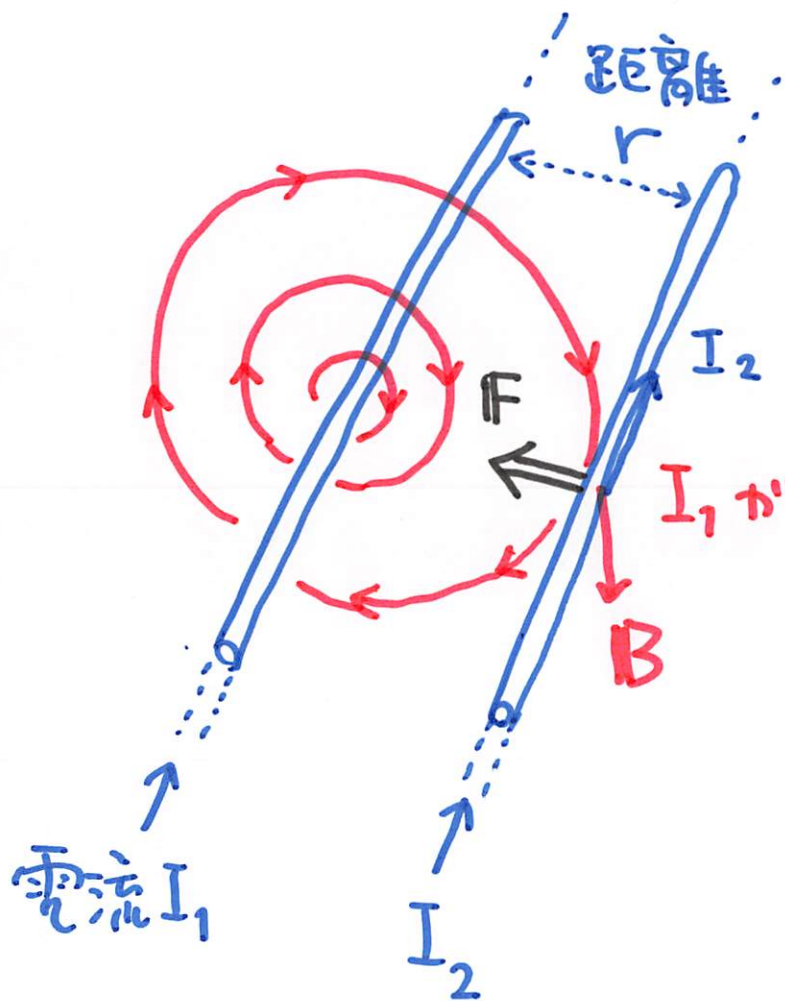
$$F = IL e \times B.$$



は紙面から表に出る向き (v から B に向かて右手4本指を巻くとき親指が立つ向き)



平行導線に同じ向きに電流が流れる場合.



I_1 が I_2 の場所に作る磁場の大きさ $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$

I_2 の長さ L の区間が受ける力の大きさ

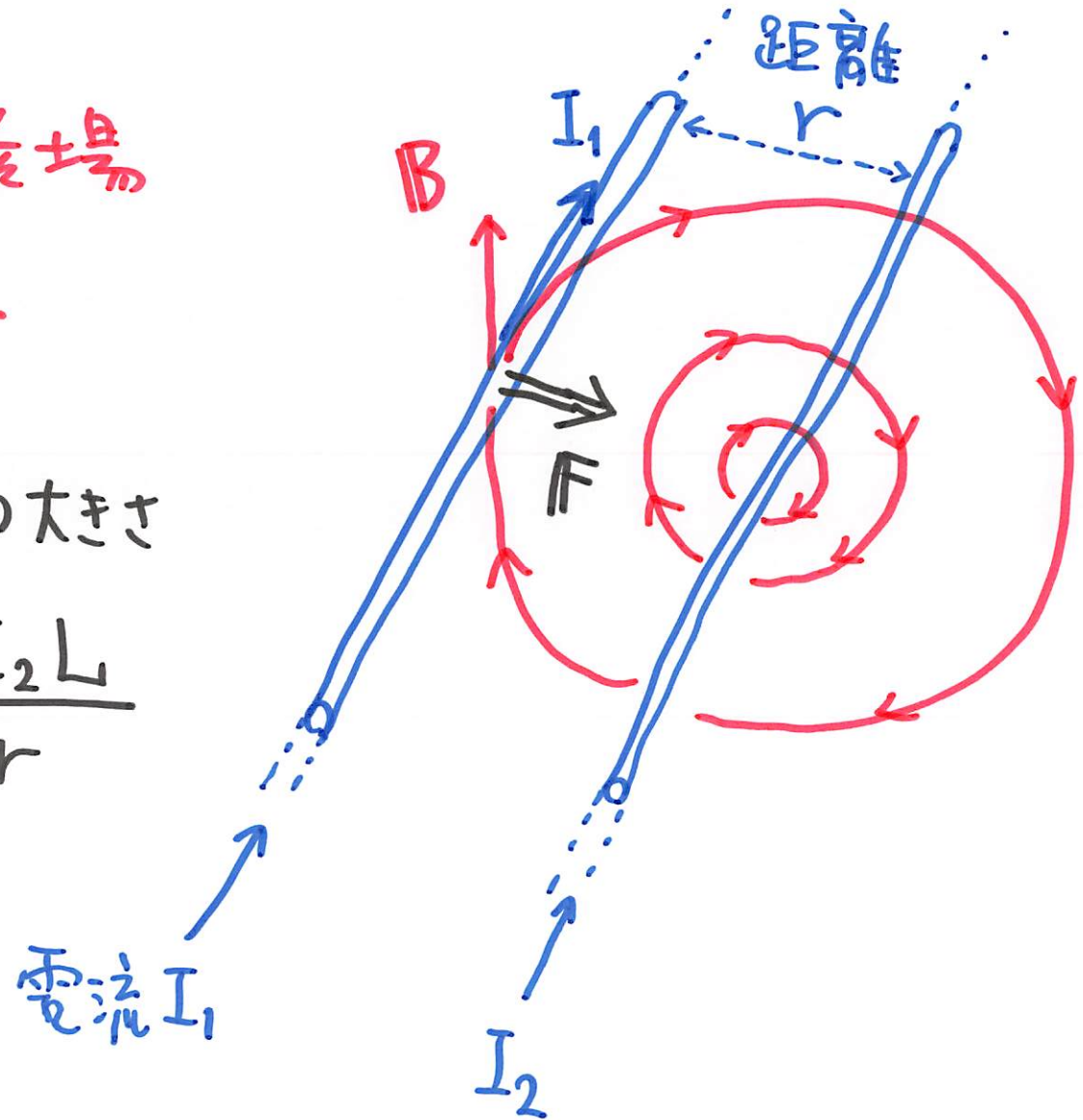
$$F = I_2 L B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi r}$$

平行導線に同じ向きに電流が流れる場合、

I_2 が I_1 の場所に作る磁場の
の大きさ $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$

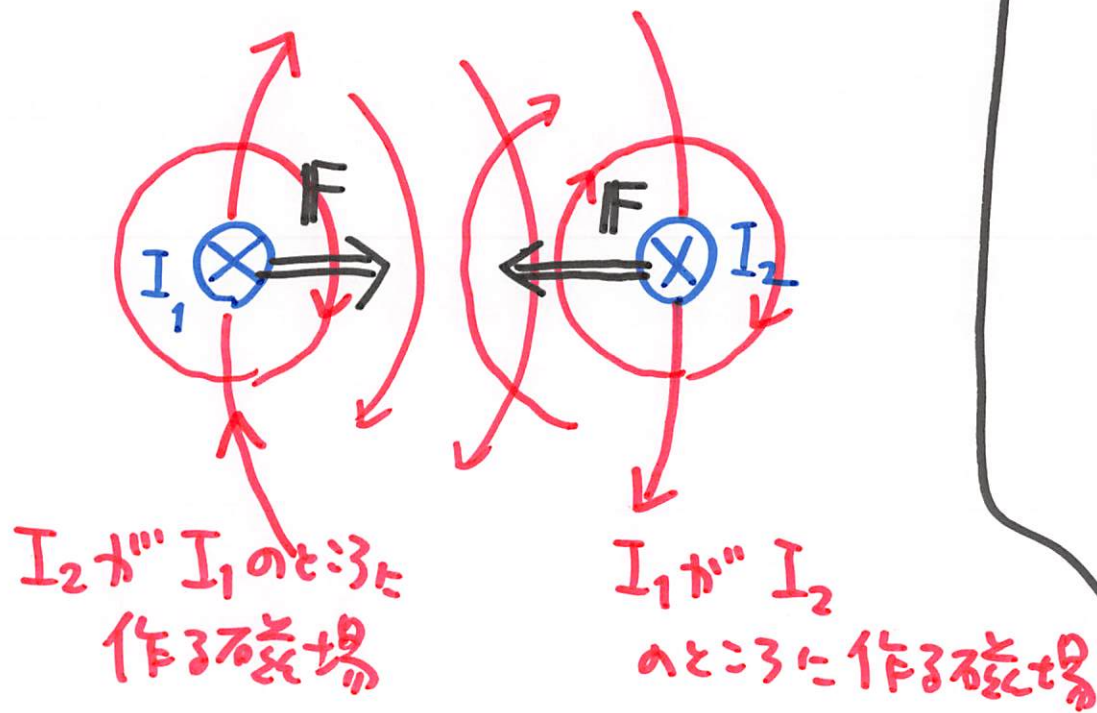
I_1 の長さ L の区間が受ける力の大きさ

$$F = I_1 L B_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi r}$$

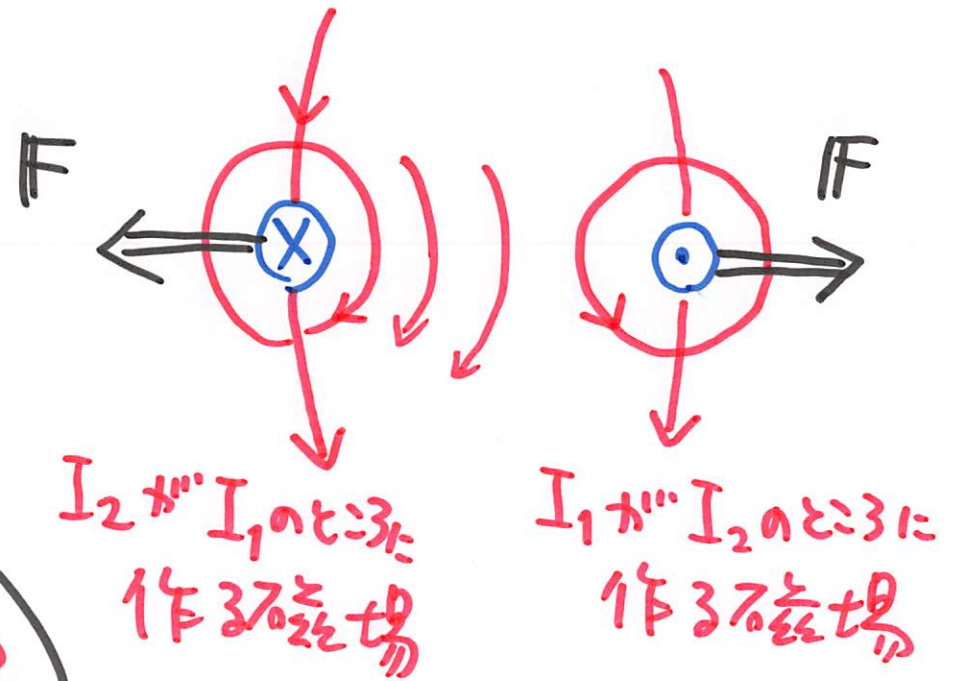


まとめと、

同方向の電流の場合、
導線同士は引き合う。



互いに反対向き電流の場合、
導線同士は斥け合う
リゾ

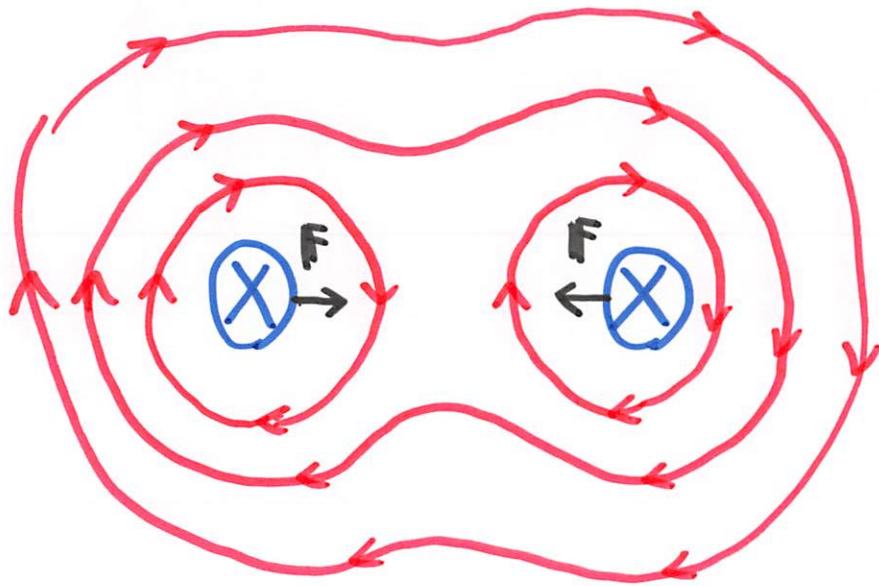


いずれも、導線の長さLあたりに受ける力の大きさは $F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi r}$

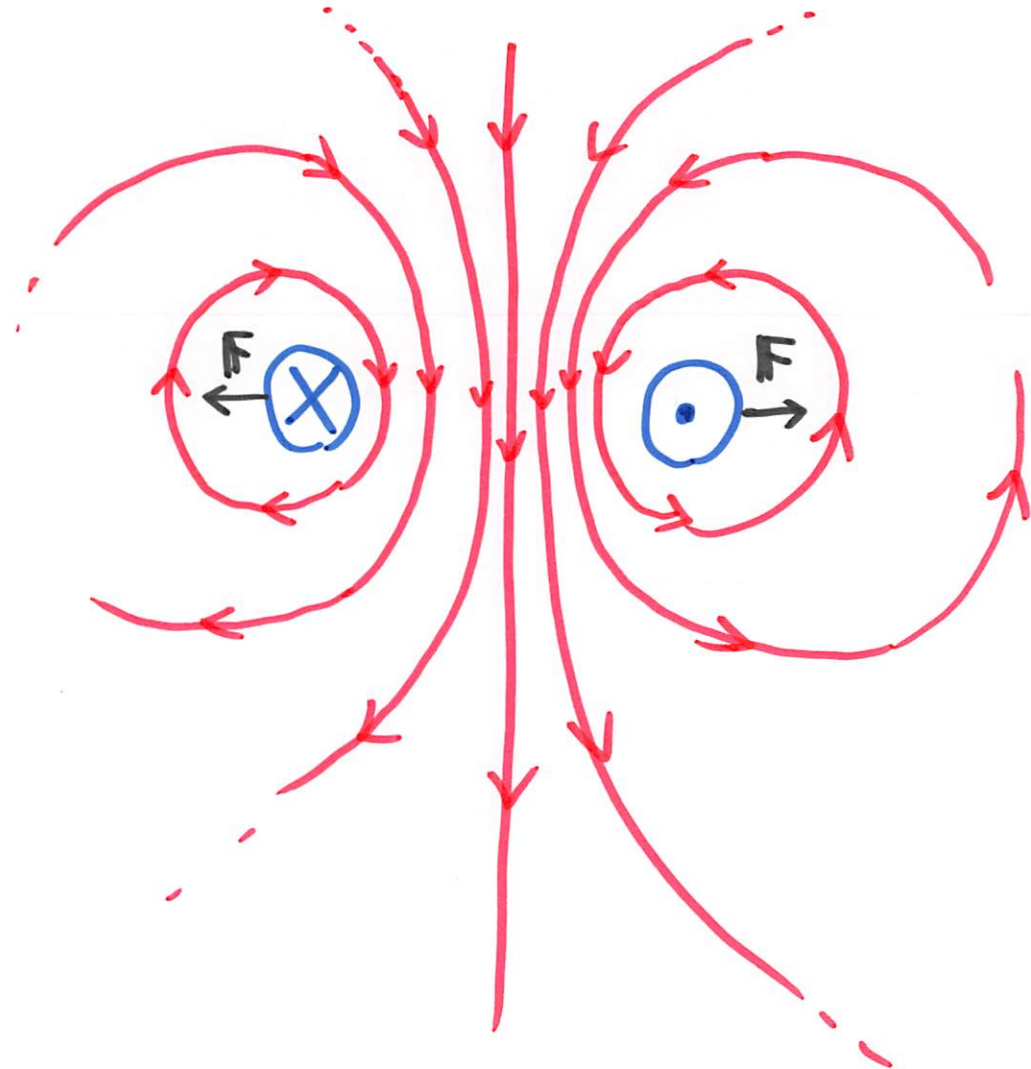
I_1, I_2 が作る磁場と重なると磁気力線はこうなる:

同方向の電流の場合,

導線間の磁場は打ち消し合って弱くなる。



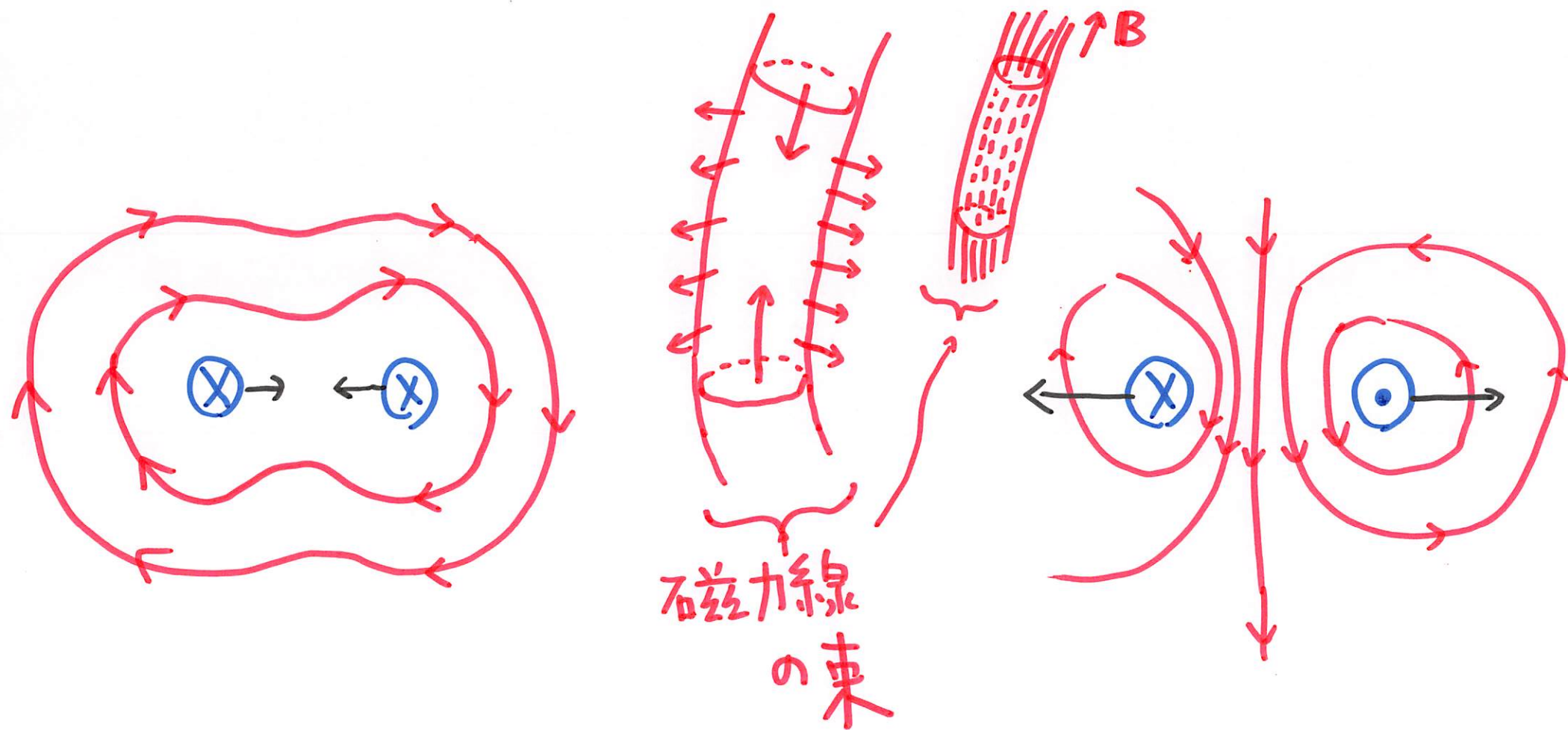
互いに反対向き電流の場合,
導線間の磁場は強くなる。



マクスウェル応力 という性質があり、

磁力線は長さ方向には縮まろうとする力が働き、

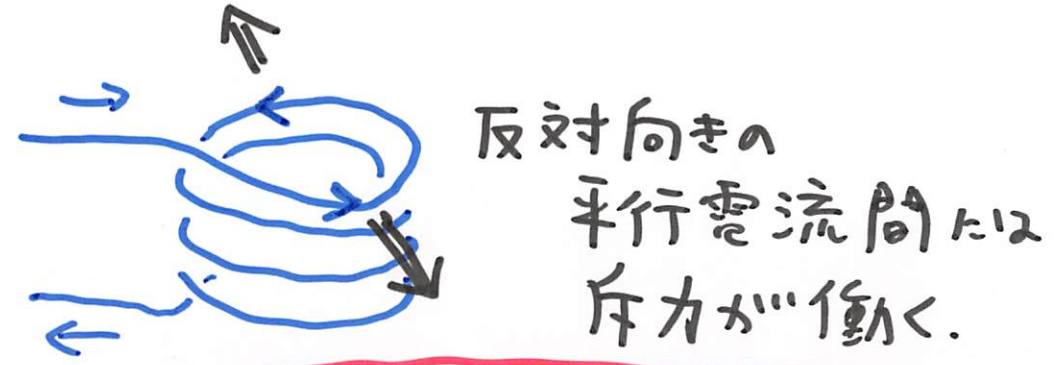
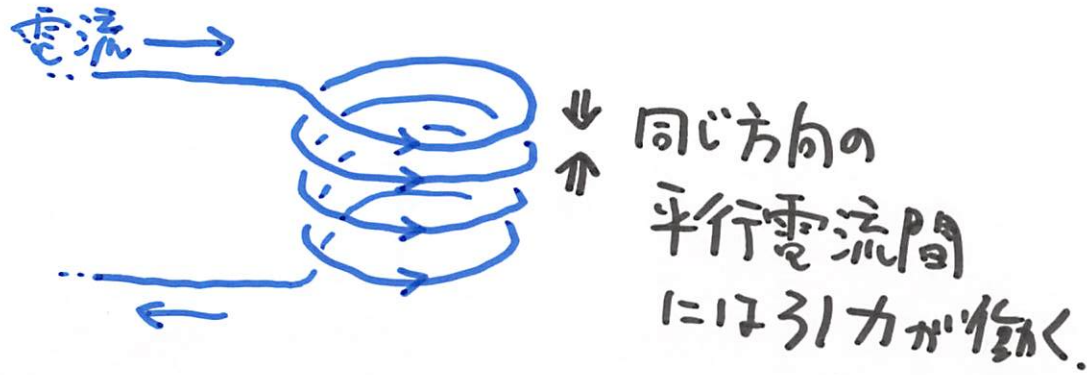
太さ方向には膨らもうとする力が働いている。



電気力線も同様のマクスウェル応力を持つている。

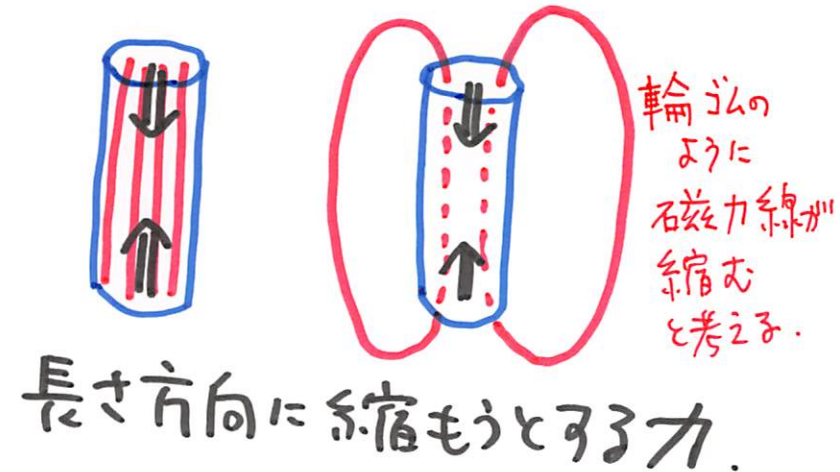
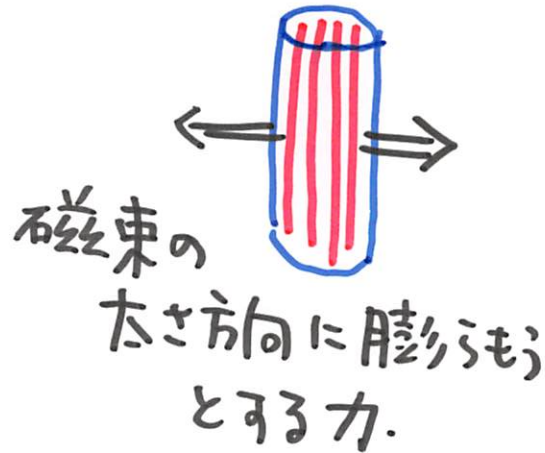
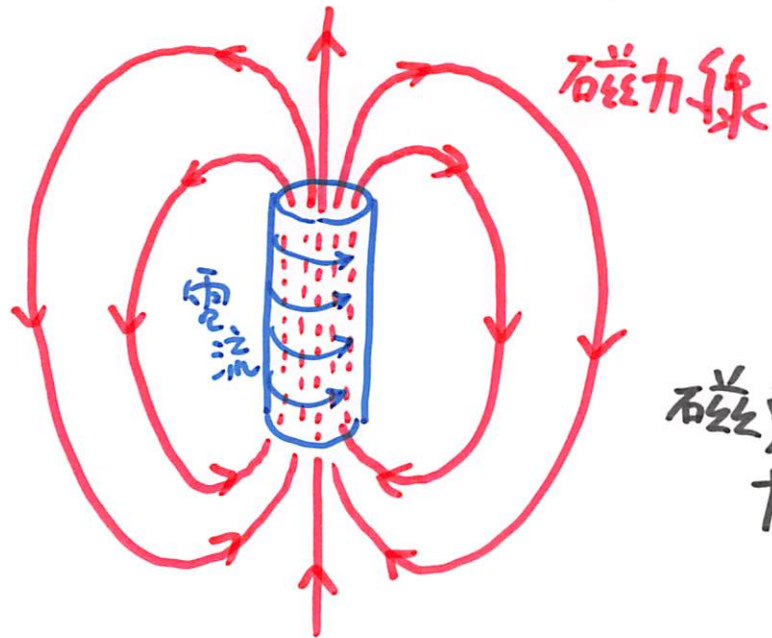
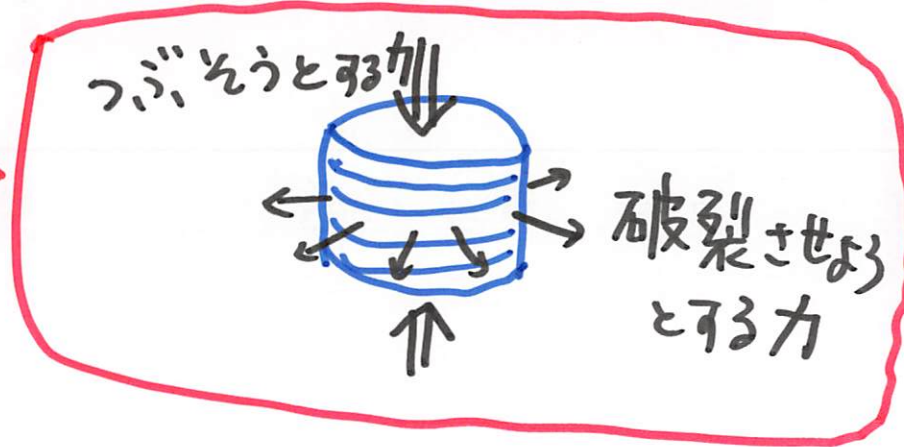
問11-13のセント : ソレノイドコイルにはどんな力が働いているか?

・ローレンツ力の観点から考えると、



これが正解 →

・マクスウェル応力の観点から考えると、



強力な電磁石を作ろうとすると...

・強力な磁場のマクスウェル応力が電磁石自体が変形したり壊れたりする。

・電気抵抗 R に電流 I が流れると、単位時間あたりの発熱量が $P = RI^2$ になり(ジュール熱の法則)、コイル自体が高温で焼けたり解けたりしてしまう。

→ なので冷却装置が必要になり、こちらでさらに電力を食う。

→ 電気抵抗ゼロの超伝導状態を使うとよいか、

超伝導を保つために冷却が必要。

また磁場が強くなりすぎると、超伝導が常伝導に戻ってしまう。

電荷保存則

2次元面積
x-軸

$\rho(r, t)$: 電荷密度 単位体積あたりの電荷の量, 単位は $C \cdot m^{-3}$

$\mathbf{j}(r, t)$: 電流密度 単位面積あたりの電流量, 単位は $A \cdot m^{-2} = C \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$

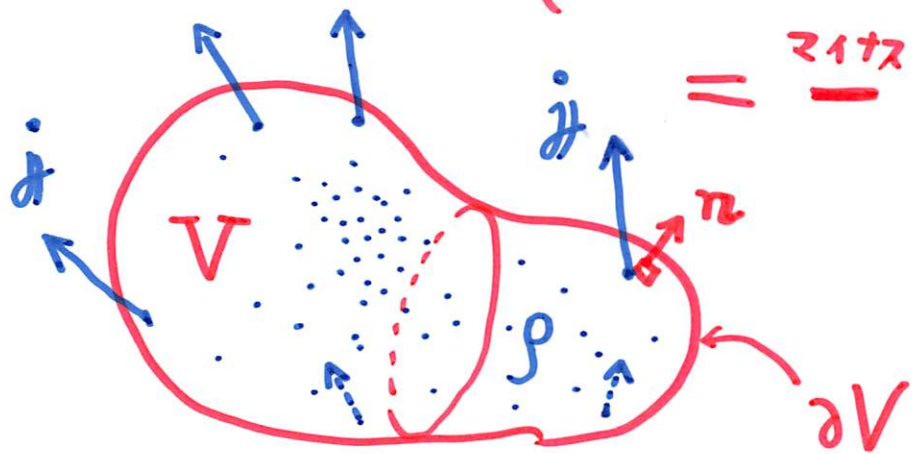
任意の立体領域 V と その境界面 ∂V について,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

バランス方程式
ともいう。

が成立する。(V の内部にある電荷量の 単位時間あたりの増加量)

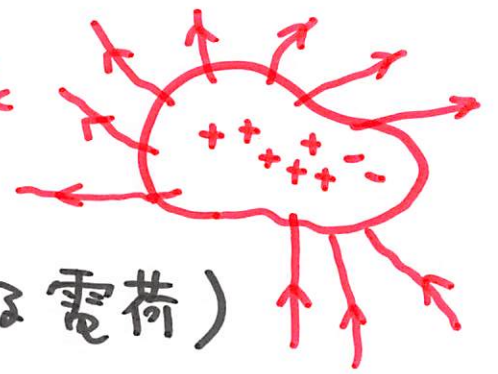
$= -$ (V の表面 ∂V を貫いて出ていく電流の総量)



ガウスの法則
電場の

$$\epsilon_0 \int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dV$$

電気力線



(Vの表面 ∂V から出く電束) = (Vの中に在る電荷)

と
電荷保存則
を

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

組み合わせると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

移項して、 $\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \int_{\partial V}$ の中に押し込め、積分をまとめると、

領域Vが
時間変化しな
ければよい。

$$\int_{\partial V} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

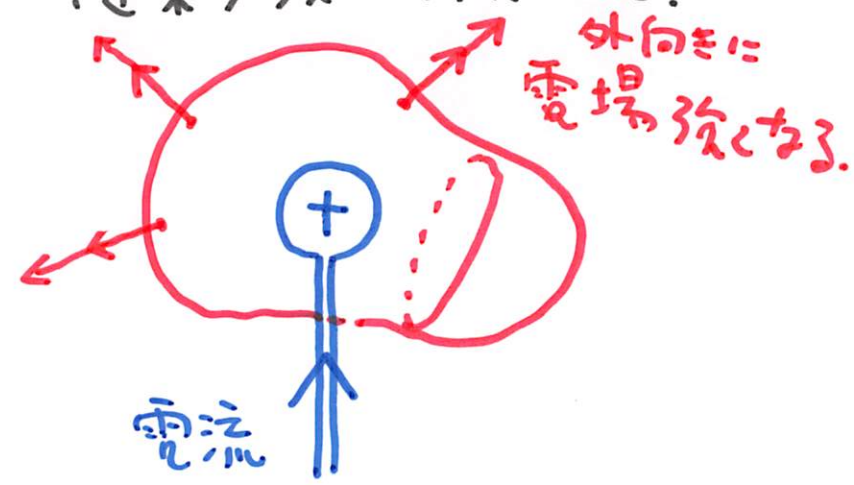
変位電流(密度) displacement current $\mathbf{j}_{disp} := \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

を定めると、

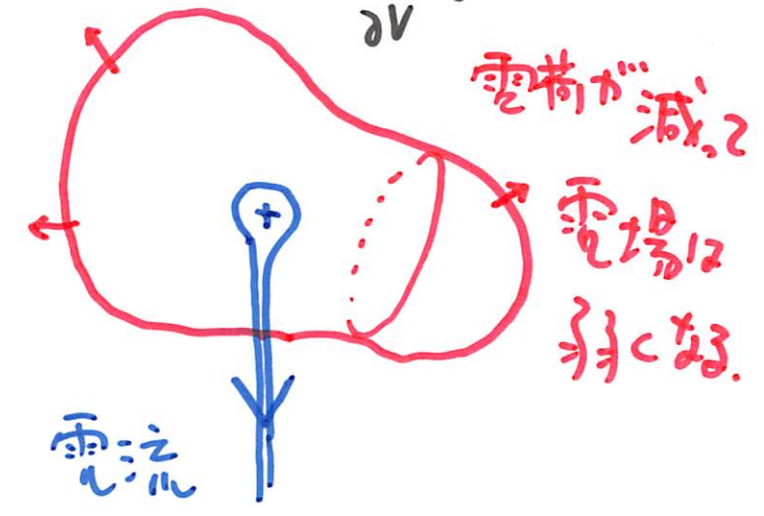
変位電流と通常の電流を足したものは、
湧き出しも吸い込みもない。
と言える。

$$\int_{\partial V} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

電流が流れ込んでくるところでは、 $\int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS < 0$ だが、
電荷がたまるときの、
電気力線の湧き出しは増えるので $\int_{\partial V} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS > 0$
で、正味プラスマイナスゼロ。



電流が流れ逃げていくと、
 $\int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS > 0$ だが、
電場は弱くなるので $\int_{\partial V} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS < 0$ 。

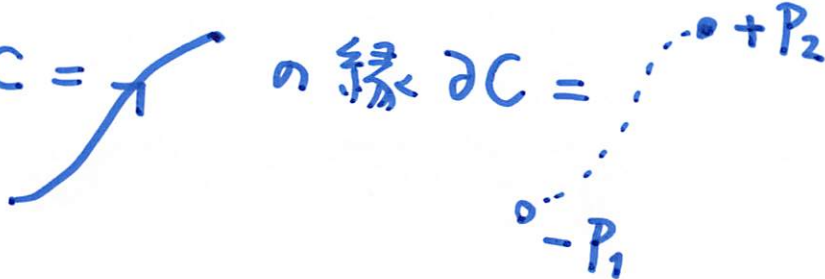


ホモロジー (homology) 幾何学

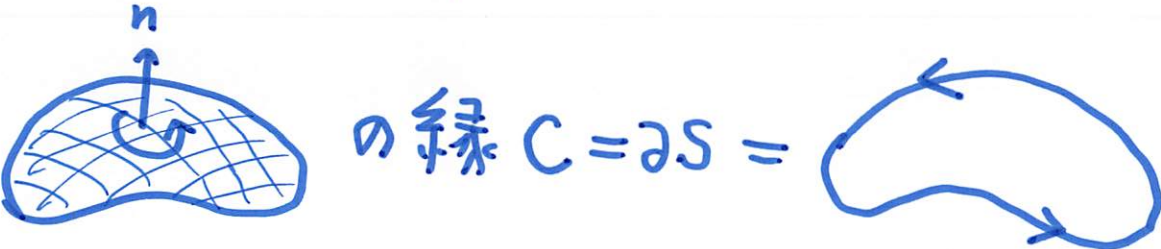
どんな向き付けられた曲面 S に対しても,

その境界線 $C = \partial S$ は、^{向き}縁がなす $\partial C = \partial \partial S = 0$.

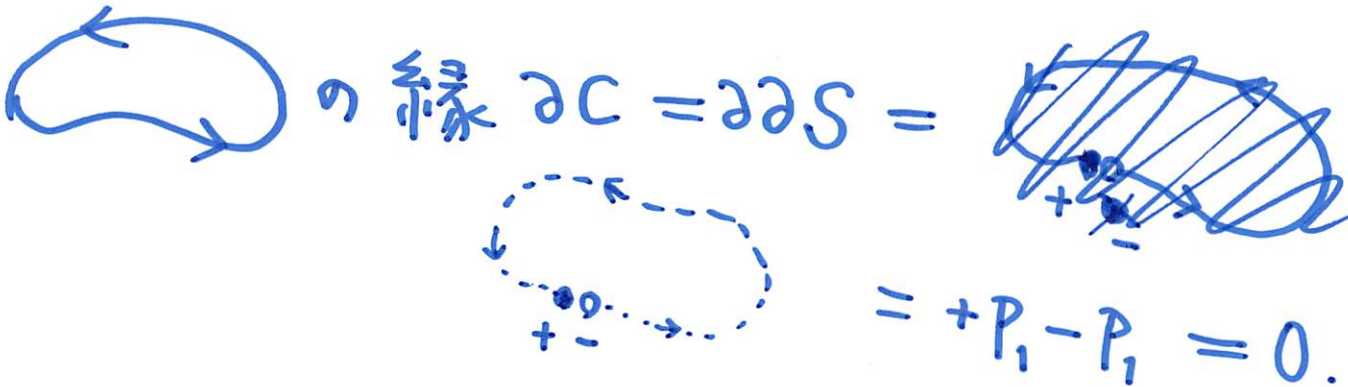
向き付けられた曲線 $C = \curvearrowright$ の縁 $\partial C = \overset{+}{P_2} - \overset{-}{P_1} = P_2 - P_1$



向き付けられた曲面 $S = \text{dome}$ の縁 $C = \partial S = \text{loop}$



$C = \partial S = \text{loop}$ の縁 $\partial C = \partial \partial S = \text{shaded loop} = \overset{+}{P_1} - \overset{-}{P_1} = 0$.



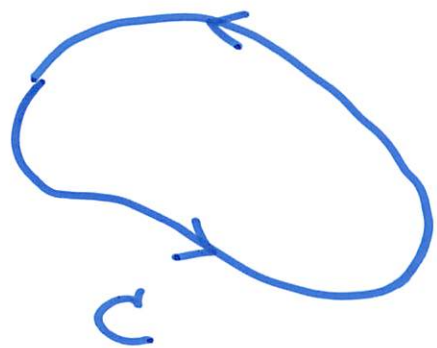
ホモロジ-幾何学の問題

向き付けられた閉曲線 C ($\partial C = 0$) ならば

$C = \partial S$ とするような向き付けられた曲面 S があるか?

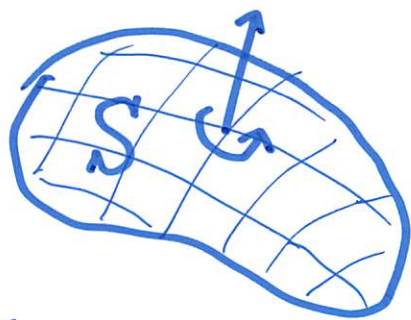
ある. ただし $C = \partial S$ とするような S は一意的ではない.

$C = \partial S_1 = \partial S_2$ とするような曲面 S_1, S_2 ($S_1 \neq S_2$) はありえる (じつは無数にある)



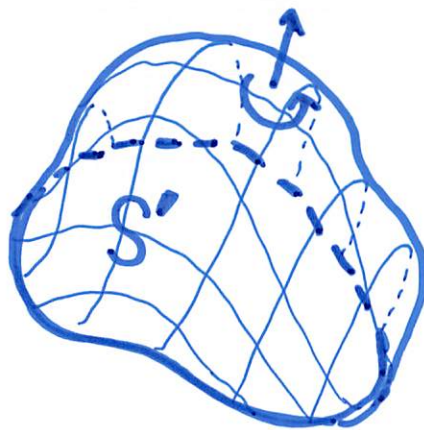
C
閉曲線

$$\partial C = 0$$



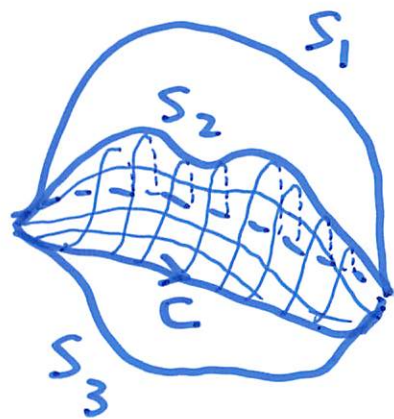
向き付けられた曲面 S

$$C = \partial S$$



曲面 S'

$$C = \partial S'$$



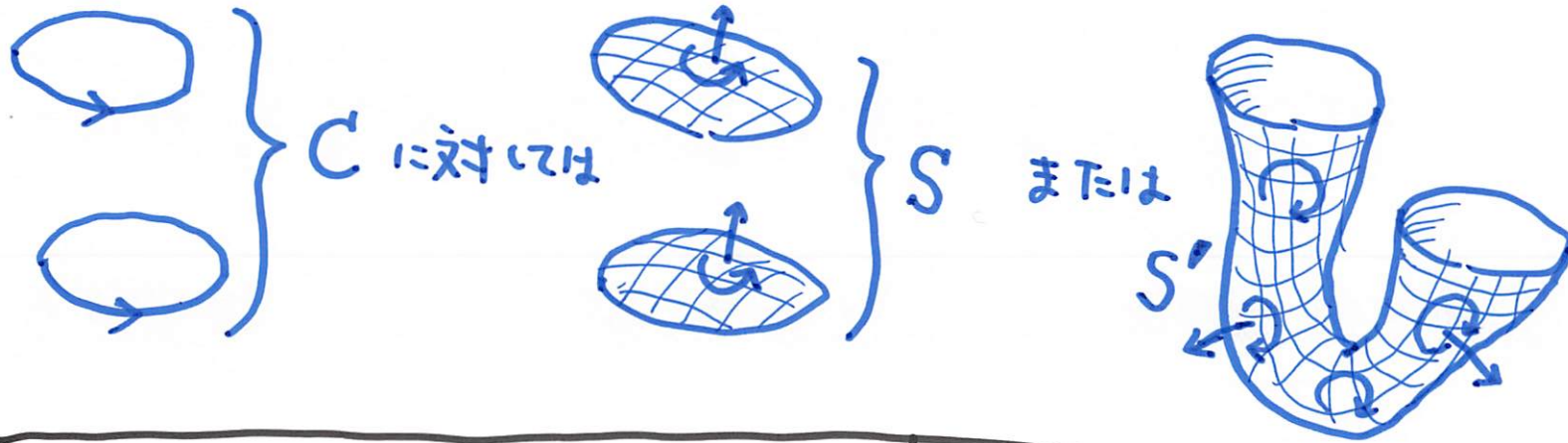
$$\partial S_1 = \partial S_2 = \partial S_3 = C.$$

閉曲線 C ($\partial C=0$) が与えられたときに、 $C=\partial S$ となる曲面 S を見つけた。

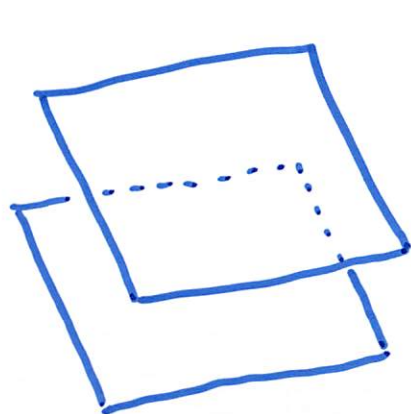
ただし C はひとつながりの図形ではなくてもよいし、

S もひとつながりではなくてもよいし、 S は自己交差していてもよい。

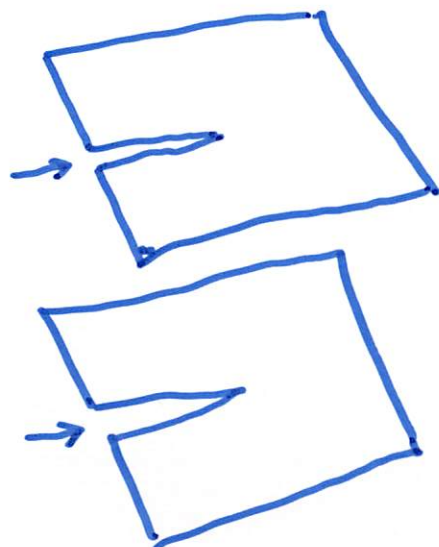
しかし S は向き付け可能でなくてはならない。



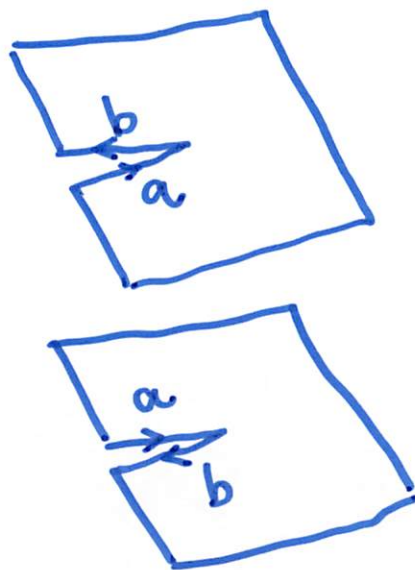
自己交差している曲面とは？



2枚の紙きれ

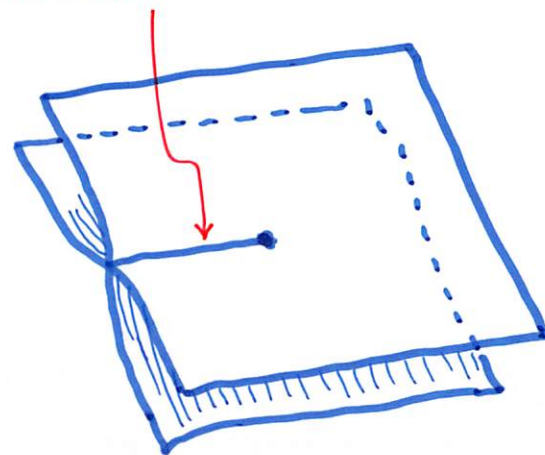


切れ込みを入れる。



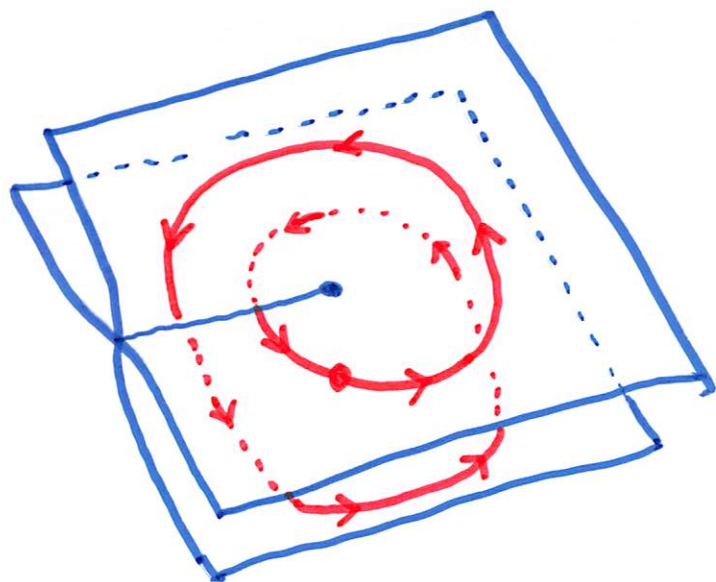
辺a同士,
辺b同士を見よりに合わせる。

自己交差のキズ

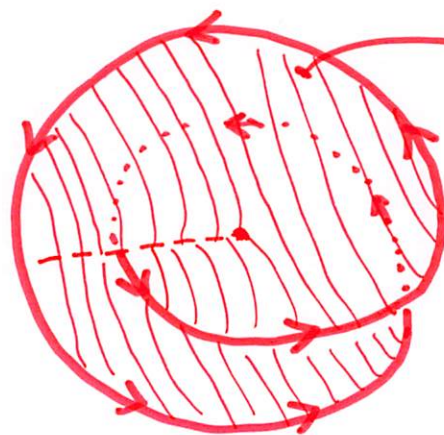


“ $\sqrt{2}$ のリーマン面”

と呼ばれる図形
ができる。



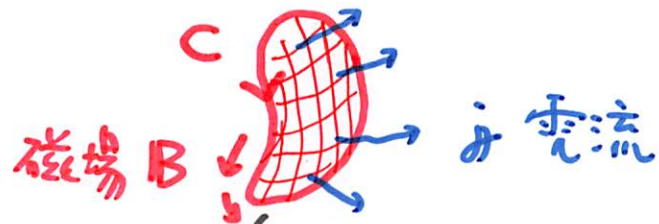
アリがこのシートの上を歩いた軌跡。



$$C = \partial S$$

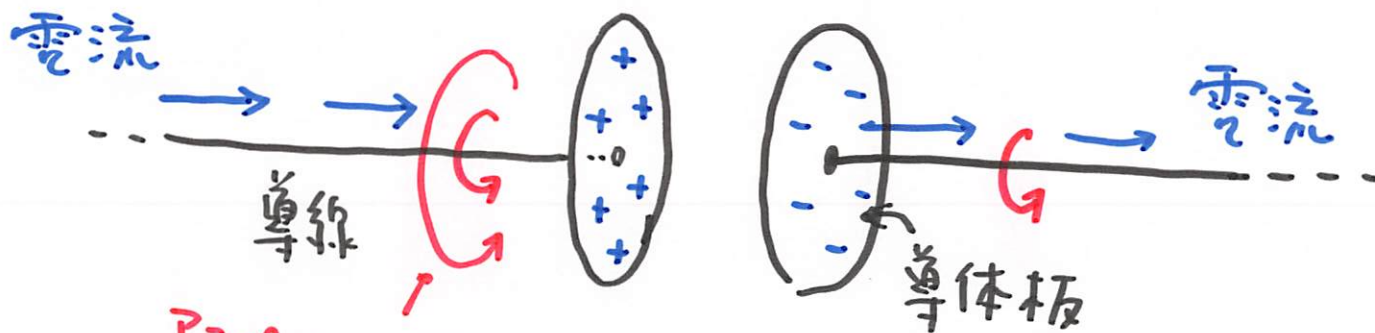
この曲面 S

アンペールの法則
($C = \partial S$)
$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$



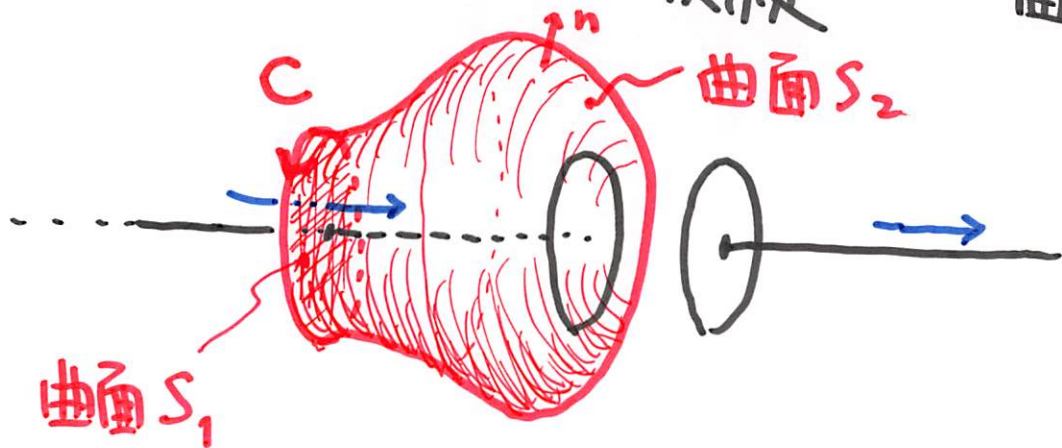
(閉曲線 C に沿う磁場の線積分) = $\mu_0 \cdot$ (曲面 S を貫く電流)

コンデンサに電荷をためている状況と考える。



アンペールの法則から予想される磁場。

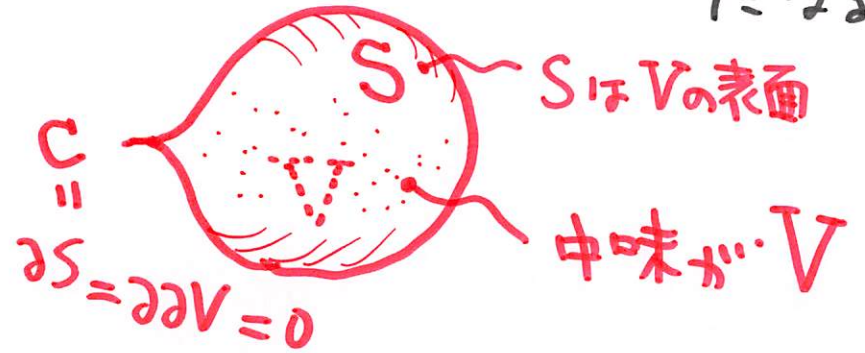
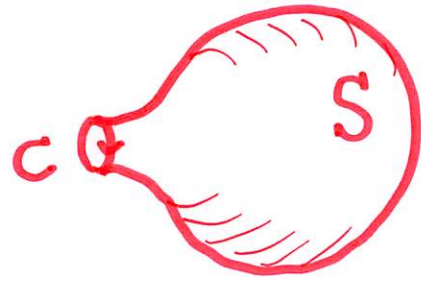
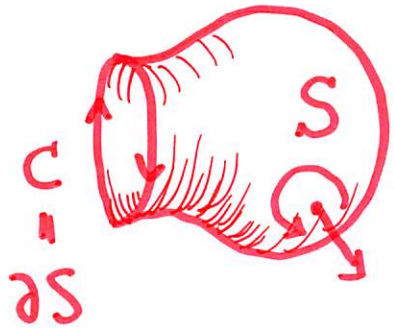
アンペールの法則の破綻



曲面 S_1 を貫く電流はゼロではないが、
 S_2 を貫く電流はゼロ。

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} \stackrel{?}{=} \underbrace{\mu_0 \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS}_{\neq 0} \neq \underbrace{\mu_0 \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS}_{=0}$$

S の \square $C = \partial S$ をすぼめると $S = \partial V$ (V は立体領域) になると $C = \partial S = \partial \partial V = 0$ になる。



アンペールの法則 $\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$

を $S = \partial V$ に適用すると、 $\partial S = \partial \partial V = 0$ なのぞ。

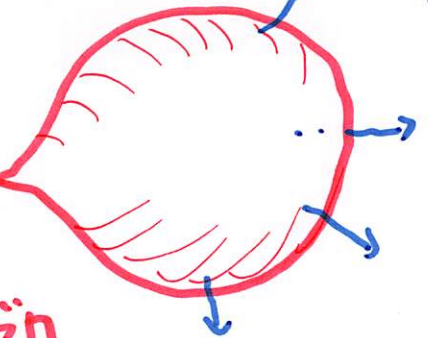
アンペールの法則の左辺 = $\int_{\partial \partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

右辺 = $\mu_0 \int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS =$ 一般には 0 じゃない。

とな、アンペールの法則が破綻!!

流れ出る電流はゼロ

磁場の総積分はゼロ



アンペールの法則
$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

は $S = \partial V$ に選んだときに 左辺は 0 になるが、右辺は 0 にならないのがまずい。

そこで電荷保存則 + 電場のガウスの法則は、
$$\int_{\partial V} (\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$
 と導いた。

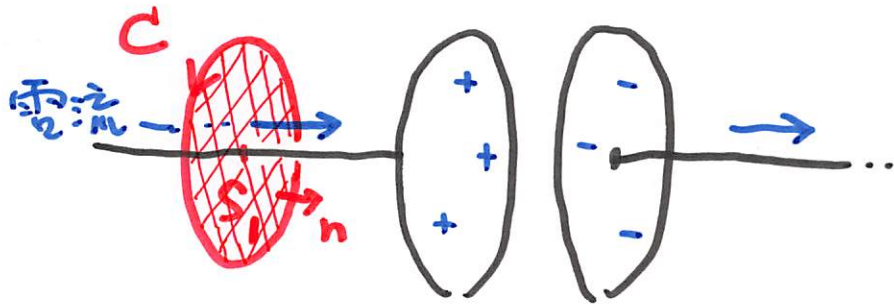
修正版アンペールの法則

(アンペール・マクスウェルの法則)

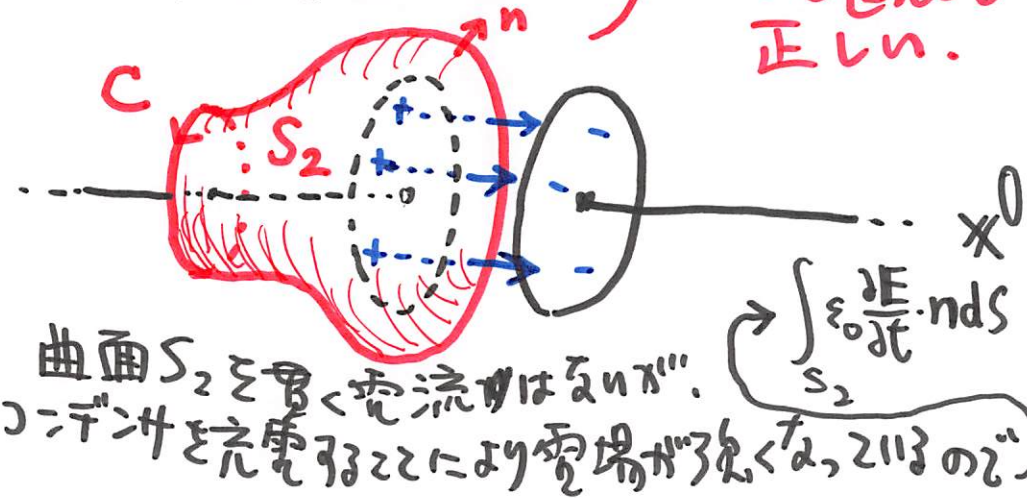
$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S (\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}) \cdot \mathbf{n} dS$$

こういおけば $S = \partial V$ のときも両辺とも 0 になり矛盾を解消する。

曲面 S_1, S_2 どちらを選んでも正しい。



曲面 S_1 を貫く電流があるのだから $\int_{S_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \neq 0$



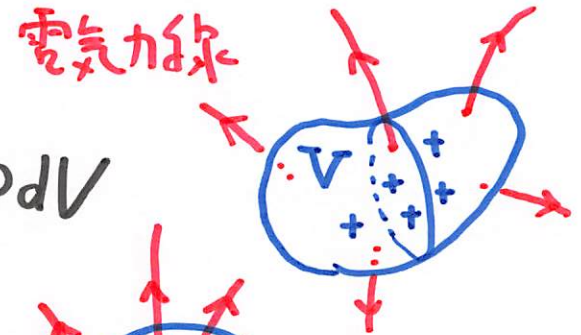
曲面 S_2 を貫く電流はない。コンデンサを充電すると電場が湧くから、2113 の $\int_{S_2} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$

マクスウェル方程式

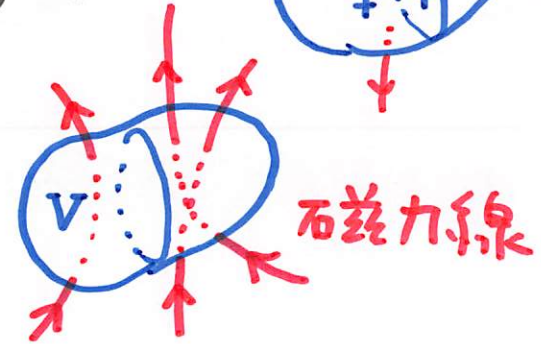
古典電磁気学の集大成

Maxwell (イギリスの物理学者 1831-1879年) が 1865年にまとめた。
最初に書かれたのはこの形の式ではなく、ここに書いてあるのは後の時代の人々が整理したバージョン。

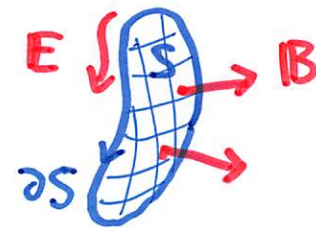
1. 電場のガウスの法則
$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$



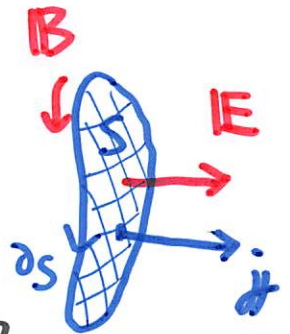
2. 磁場のガウスの法則
$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$



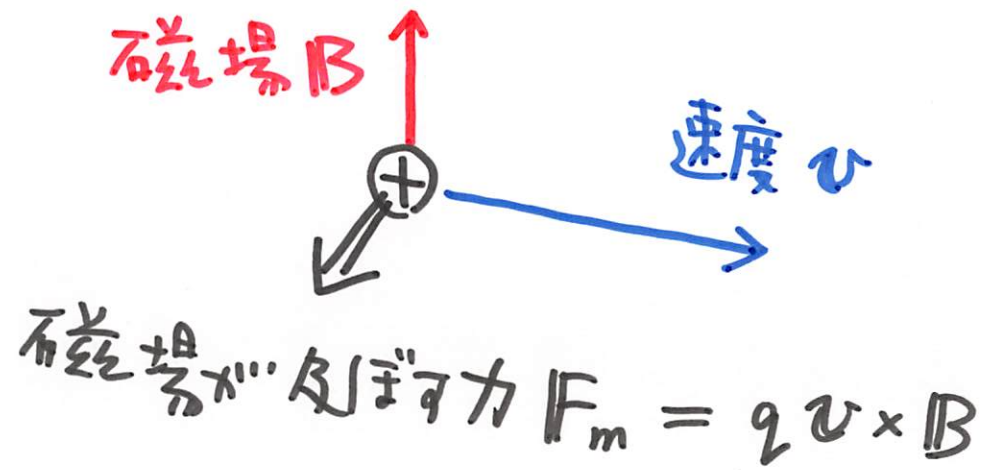
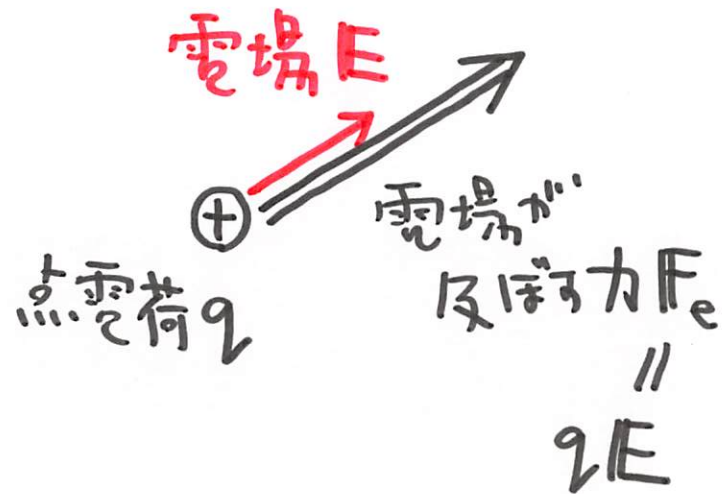
3. ファラデーの法則
$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$



4. アンペール・マクスウェルの法則
$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{n} dS$$



5. ローレンツ力の法則 $F = qE + qv \times B$



以上が電磁気学のゆきぎない法則である。

点電荷の動く速さが光速に近い、相対性理論的状況でも、これらの関係式は正しく成り立つ。

物理学基礎II

講義 14 の板書ノート (後半)

ベクトル解析とマクスウェル方程式

谷村 省吾

解析学 analysis

… 極限操作を扱う数学.

ゼロじゃないけど限りなくゼロに近づく数列 a_1, a_2, a_3, \dots

無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

ゼロに近いものをゼロに近いもので割り算する. $\frac{\Delta y \rightarrow 0}{\Delta x \rightarrow 0}$

ゼロに近づいていく数を無限個足し算する:

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta x_1 & + & \Delta x_2 & + & \Delta x_3 & + & \dots + \Delta x_n & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} & ? \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

関数の微分や積分を扱う.

ベクトル解析 vector analysis

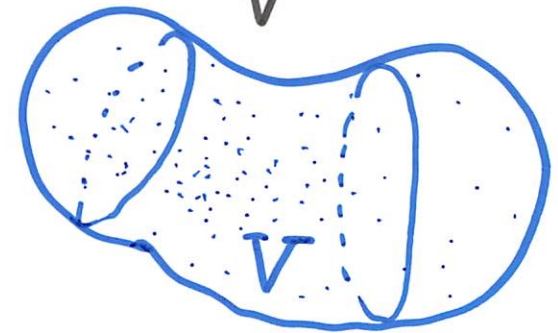
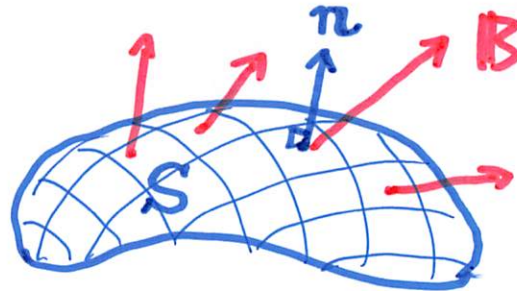
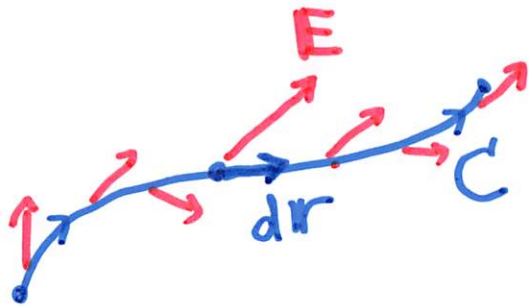
... スカラー場やベクトル場の微分や積分を扱う数学.

すでに積分は学んだ:

• ベクトル場も曲線に沿って線積分 $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$

• ベクトル場が曲面を貫く量が面積分 $\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$

• スカラー場が領域にたまっている量が体積積分 $\int_V \rho dV$



今回は微分を学ぼう.

3種類の微分がある。

1) グラディエント gradient ニョバイン 勾配

ナブラ nabla という記号

スカラー場 ϕ を ベクトル場 $\text{grad } \phi = \nabla \phi$ に変える微分。

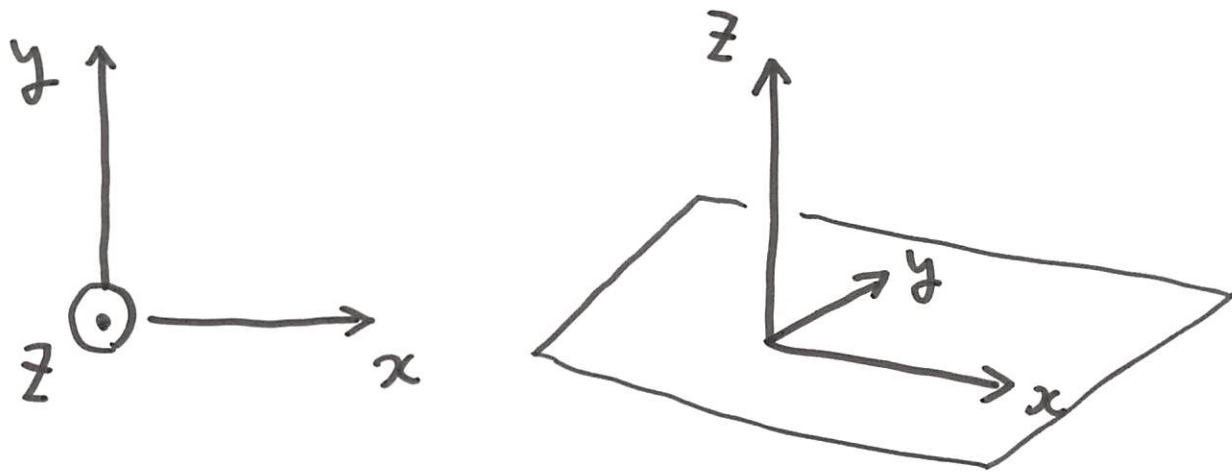
2) ローテーション rotation 回転

ベクトル場 A を ベクトル場 $\text{rot } A = \nabla \times A$ に変える微分。

3) ダイバージェンス divergence 発散

ベクトル場 B を スカラー場 $\text{div } B = \nabla \cdot B$ に変える微分。

(x, y, z) は右手系の直交座標とする。



ナブラ (nabla) 偏微分演算子をあたかも3次元ベクトルの成分のように並べた記号

書き方

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

∂
- (000)

1) グラディエント gradient

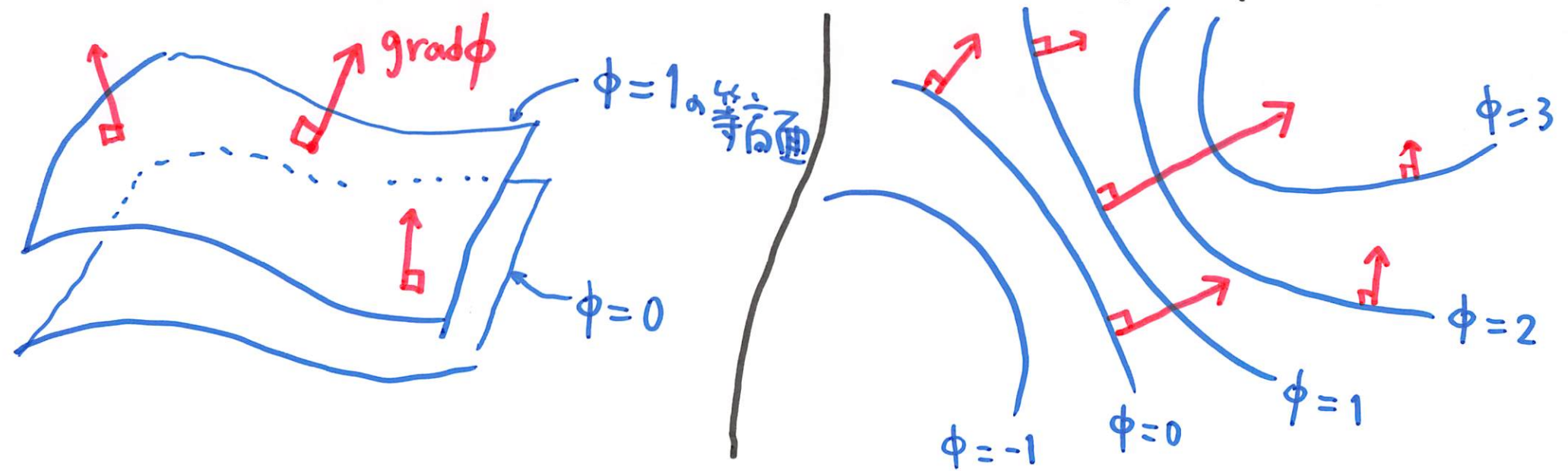
スカラー場 $\phi(x, y, z)$ に対して、

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad \text{これはベクトル場}$$

性質・ ϕ の等高面に垂直。

・ ϕ の値が 大きくなる方向を向いている。

・ ϕ の値の変化が 激しい場所では $\text{grad } \phi$ は大きい。



2) □-テ-シヨﾝ rotation

ベクトル場 $A = (A_x, A_y, A_z) = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))$
 に対し、

$$\text{rot } A = \nabla \times A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

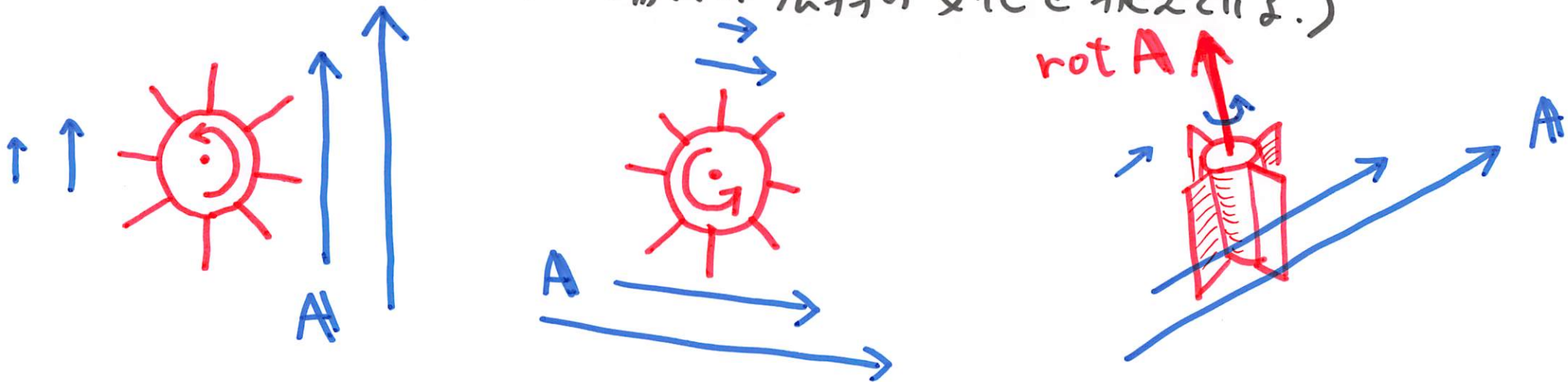
これはベクトル場

意味: ベクトル場 A を水の流れと思つたときに、

水流の中に水車を入れたとて、水車が「一番勢いよく回転

する軸の右ねじの方向を向いたベクトル場が $\text{rot } A$.

(微分なのでベクトル場 A の強弱の変化を捉えてゐる.)



3) ダイバージェンス divergence

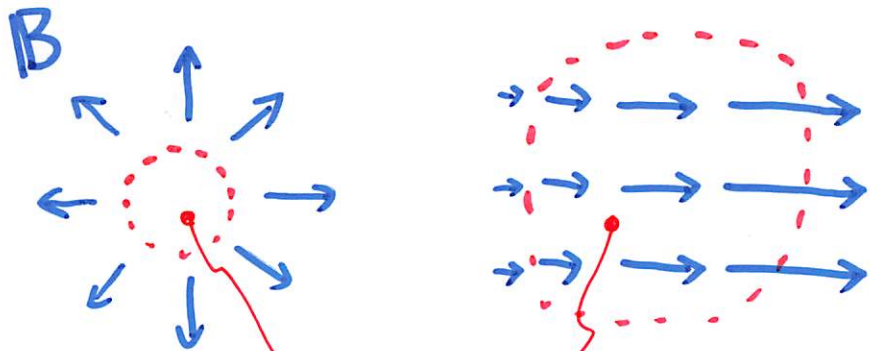
ベクトル場 $B = (B_x, B_y, B_z) = (B_x(x, y, z), B_y(x, y, z), B_z(x, y, z))$
に対し、

$$\text{div } B = \nabla \cdot B = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \text{これはスカラー場}$$

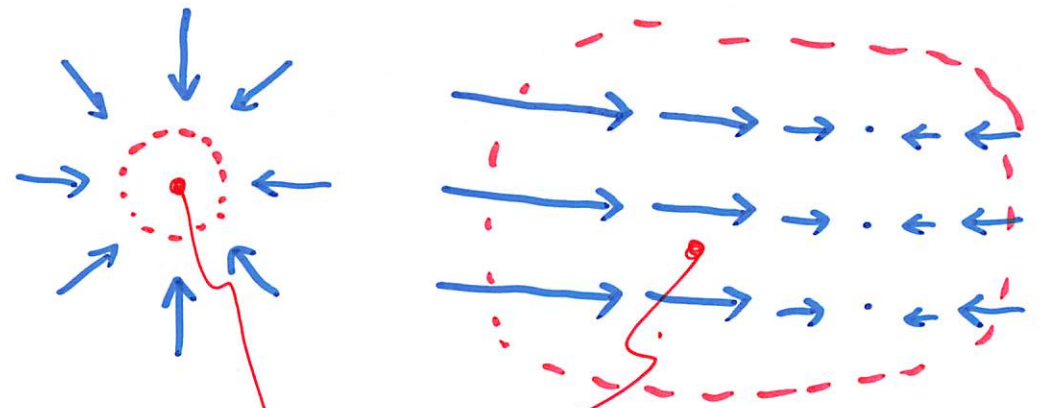
意味: ベクトル場 B を水や空気の流れと思、 T と F に、

湧き出しや膨張している場所では $\text{div } B > 0$,

吸い込みや圧縮 " " $\text{div } B < 0$.



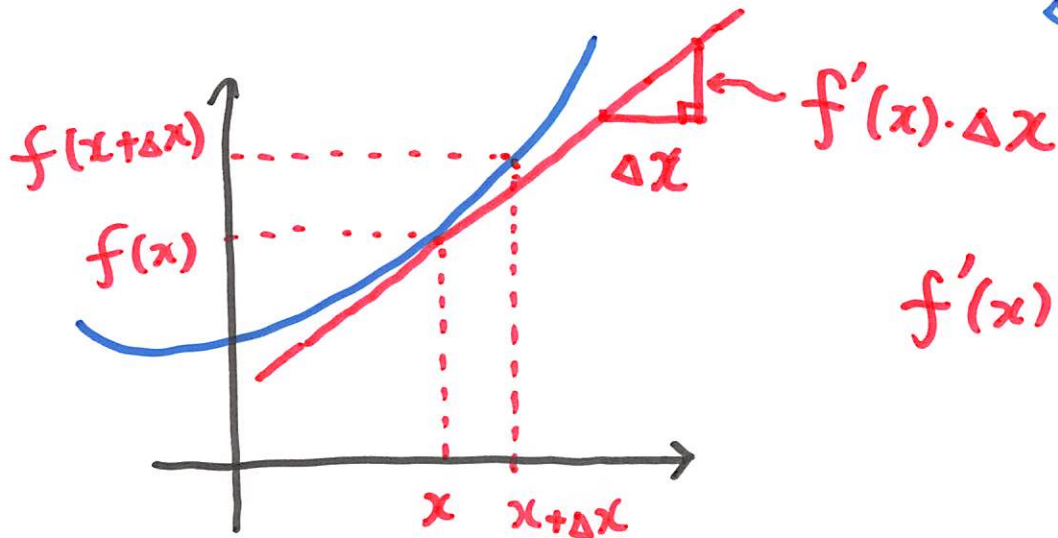
このあたり $\text{div } B > 0$



このあたり $\text{div } B < 0$

関数の微分 (導関数)

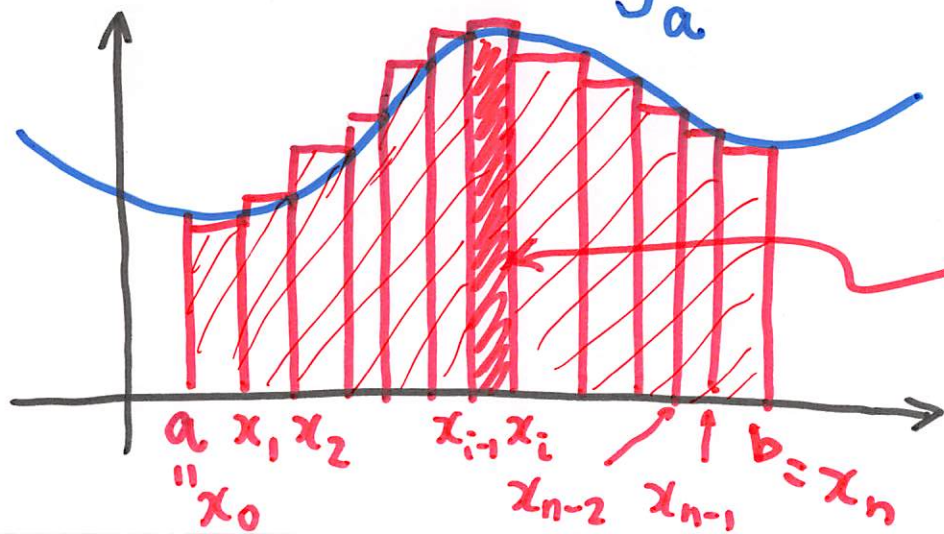
関数 $y = f(x)$ に対して, $f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$



$f'(x)$ は $y = f(x)$ のグラフの x のところの接線の傾き。

関数の積分 (定積分)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$



細長い長方形の面積
 $f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$

関数 $F(x)$ の値の差を小刻みにする: $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n=b$

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0)$$

$$= F(x_n) - \underbrace{F(x_{n-1})} + \underbrace{F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})} + F(x_{n-2})$$

$$\dots - \underbrace{F(x_2)} + \underbrace{F(x_2) - F(x_1)} + F(x_1) - F(x_0)$$

$$= \{F(x_n) - F(x_{n-1})\} + \{F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\} + \dots$$

$$\dots + \{F(x_2) - F(x_1)\} + \{F(x_1) - F(x_0)\}$$

$$= \sum_{i=1}^n \{F(x_i) - F(x_{i-1})\}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$n \rightarrow \infty, \Delta x_i \rightarrow 0$ の極限 $\rightarrow \int_a^b \frac{dF}{dx} dx$

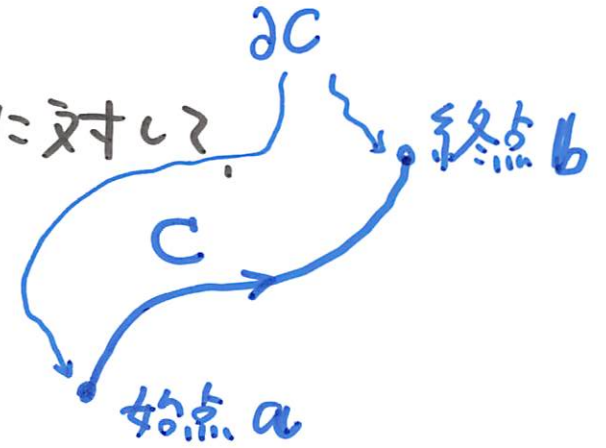
微分積分の基本定理

$$\int_a^b \frac{dF}{dx} dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

ベクトル解析の基本定理

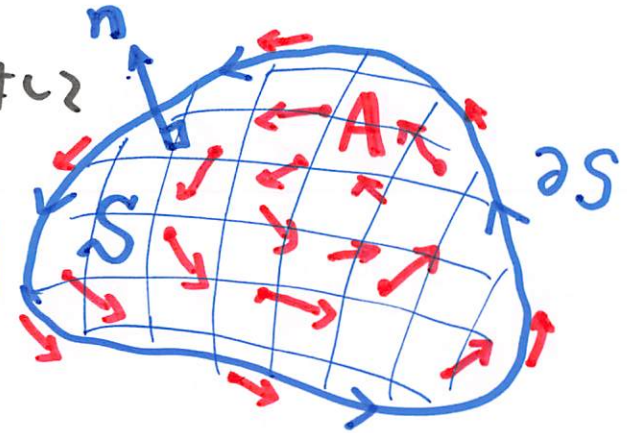
1) スカラー場 ϕ と任意の向き付けられた曲線 C に対して

$$\int_C (\text{grad } \phi) \cdot d\mathbf{r} = \phi(b) - \phi(a)$$



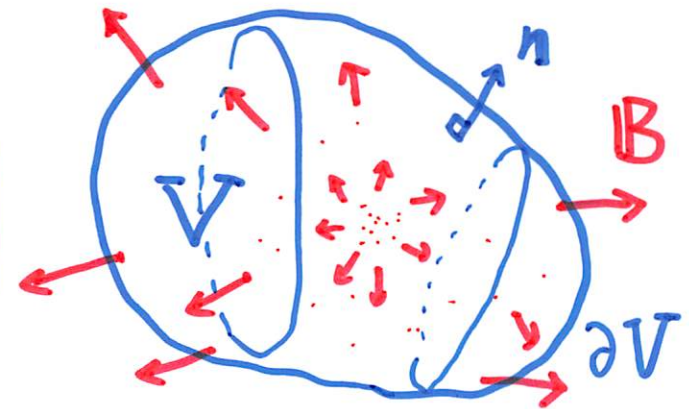
2) ベクトル場 A と任意の向き付けられた曲面 S に対して

$$\int_S (\text{rot } A) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial S} A \cdot d\mathbf{r} \quad \begin{matrix} \text{ストークス} \\ \text{Stokes} \\ \text{の定理} \end{matrix}$$



3) ベクトル場 B と任意の立体領域 V に対して

$$\int_V (\text{div } B) dV = \int_{\partial V} B \cdot \mathbf{n} dS \quad \begin{matrix} \text{ガウス} \\ \text{Gauss} \\ \text{の定理} \end{matrix}$$



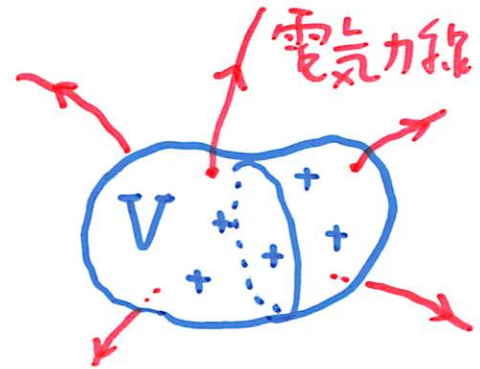
マクスウェル方程式とベクトル解析の公式を組み合わせる:

i) 電場のガウスの法則

$$\int_V (\text{div } E) dV = \int_{\partial V} E \cdot n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

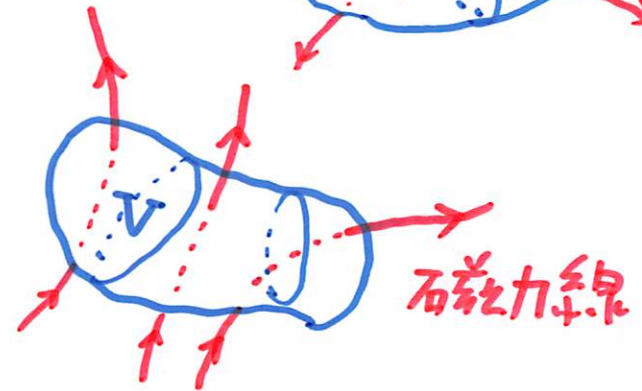
ベクトル解析の公式

マクスウェル方程式



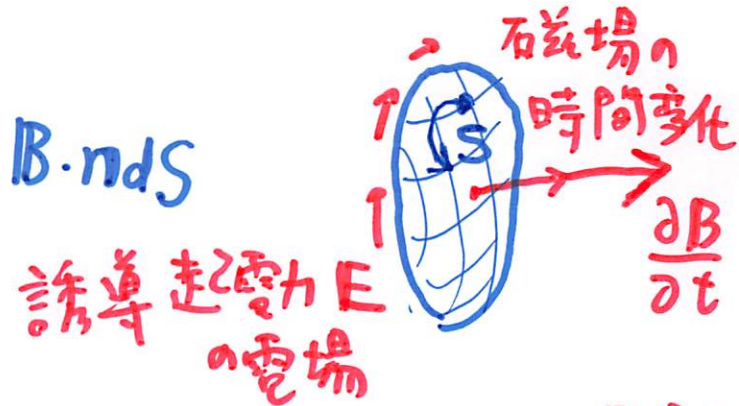
ii) 磁場のガウスの法則

$$\int_V (\text{div } B) dV = \int_{\partial V} B \cdot n dS = 0$$



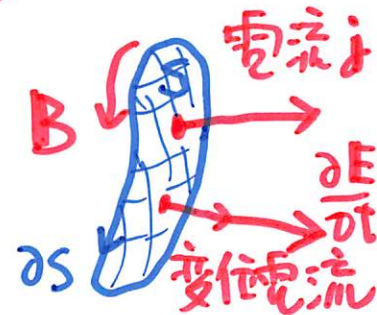
iii) ファラデーの法則

$$\int_S (\text{rot } E) \cdot n dS = \int_{\partial S} E \cdot dr = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S B \cdot n dS$$



iv) アンペール・マクスウェルの法則

$$\int_S (\text{rot } B) \cdot n dS = \int_{\partial S} B \cdot dr = \mu_0 \int_S (j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}) \cdot n dS$$



微分形の マクスウェル 方程式'

$$i) \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$ii) \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$iii) \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$iv) \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right)$$

むしろこれらの方が

ふつうに「マクスウェル方程式」と呼ばれる。

真空中のマクスウェル方程式

電荷 $\rho = 0$, 電流 $\mathbf{j} = 0$ とした場合のマクスウェル方程式のこゝ

i) $\text{div } \mathbf{E} = 0$

ii) $\text{div } \mathbf{B} = 0$

iii) $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

← 磁場 \mathbf{B} の時間変化が
電場 \mathbf{E} の空間変化と連動.

iv) $\text{rot } \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

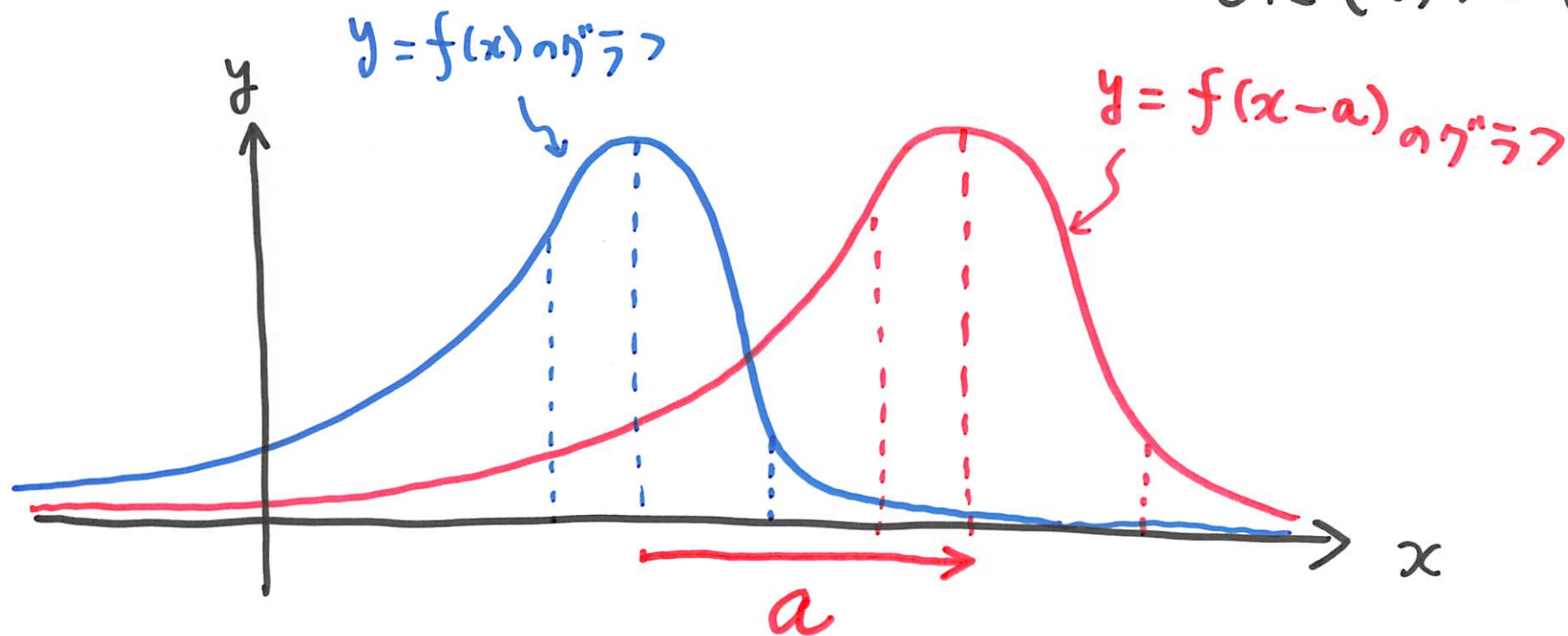
← 電場 \mathbf{E} の時間変化が
磁場 \mathbf{B} の空間変化と
連動.

数学的事実

関数 $y = f(x)$ と、定数 a に対し、

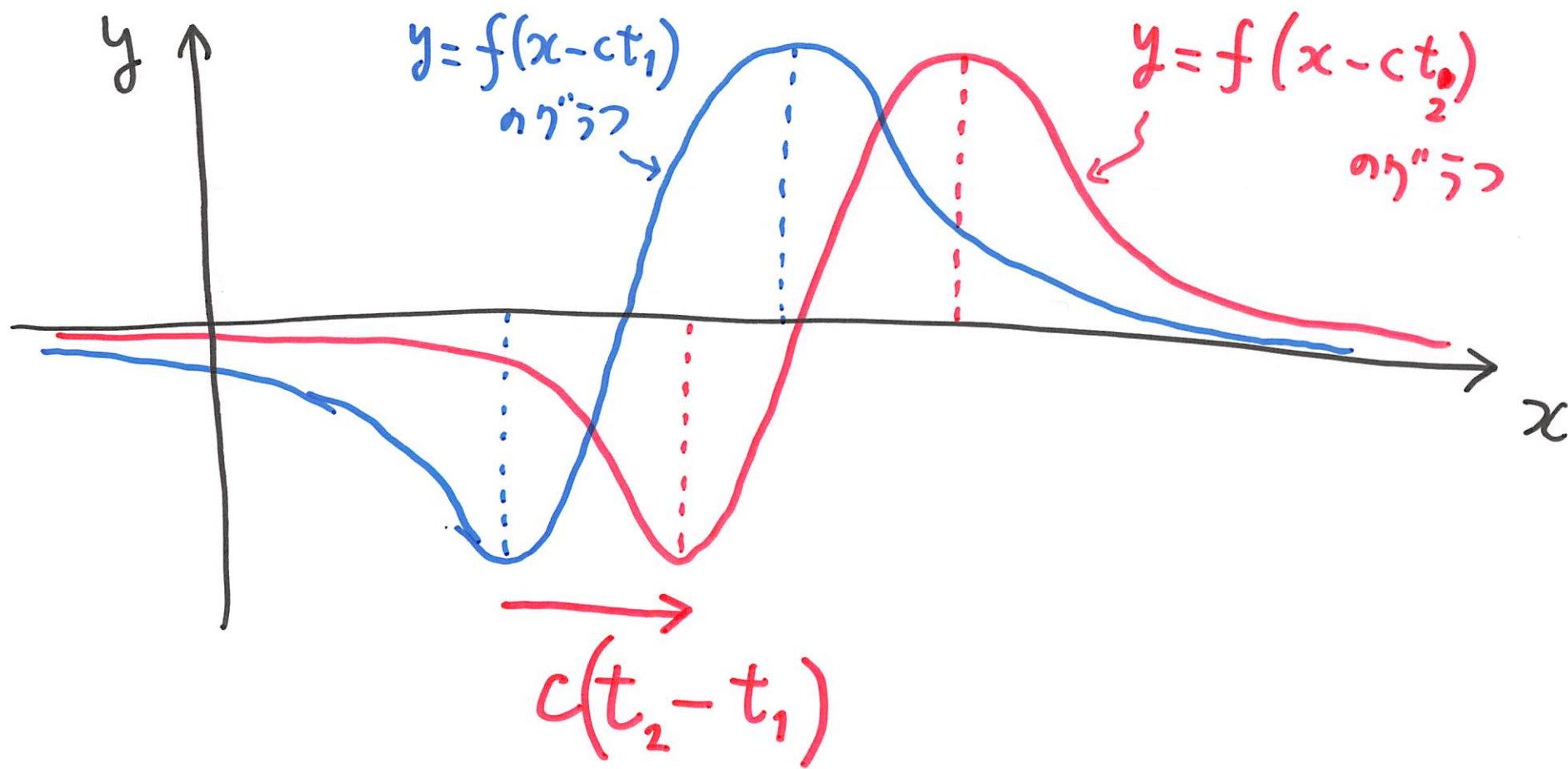
$y = f(x-a)$ のグラフは、

$y = f(x)$ のグラフを x の正の方向に a だけ平行移動
したことになる。



数学的事実

t を時間 (時刻) を表す変数, c を正の定数とすると,
変数 x に対する関数 $y = f(x - ct)$ のグラフは
 x 軸上を速度 c で平行移動する。



数学的事実

2変数関数 $u(x, t)$ が方程式 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ を満たしているならば、

1変数関数 $f(x)$ として $u(x, t) = f(x - ct)$ となる。

(証明) 2変数 ^{ガガイ} $\xi = x - ct$, ^{エ-ダ} $\eta = x + ct$ を導入。 ξ と η は独立変数。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot 1$$
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ t = \frac{1}{2c}(-\xi + \eta) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot (-c) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot c$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ であることは要請しているから、}$$

$$u = f(\xi) = f(x - ct).$$

数学的事実

2変数関数 $v(x, t)$ が方程式 $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t} = 0$

を満たしているならば、

1変数関数 $g(x)$ で $v(x, t) = g(x + ct)$ となる。

電磁場 $E = (E_x, E_y, E_z)$, $B = (B_x, B_y, B_z)$ は、

一般には (x, y, z, t) の関数だが、

(x, t) だけの関数だと仮定すると

マクスウェル方程式は

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (E_y + cB_z) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (E_y + cB_z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (E_y - cB_z) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (E_y - cB_z) = 0 \end{cases}$$

となり、解は

$$\begin{cases} E_y + cB_z = f(x - ct) \\ E_y - cB_z = g(x + ct) \end{cases}$$

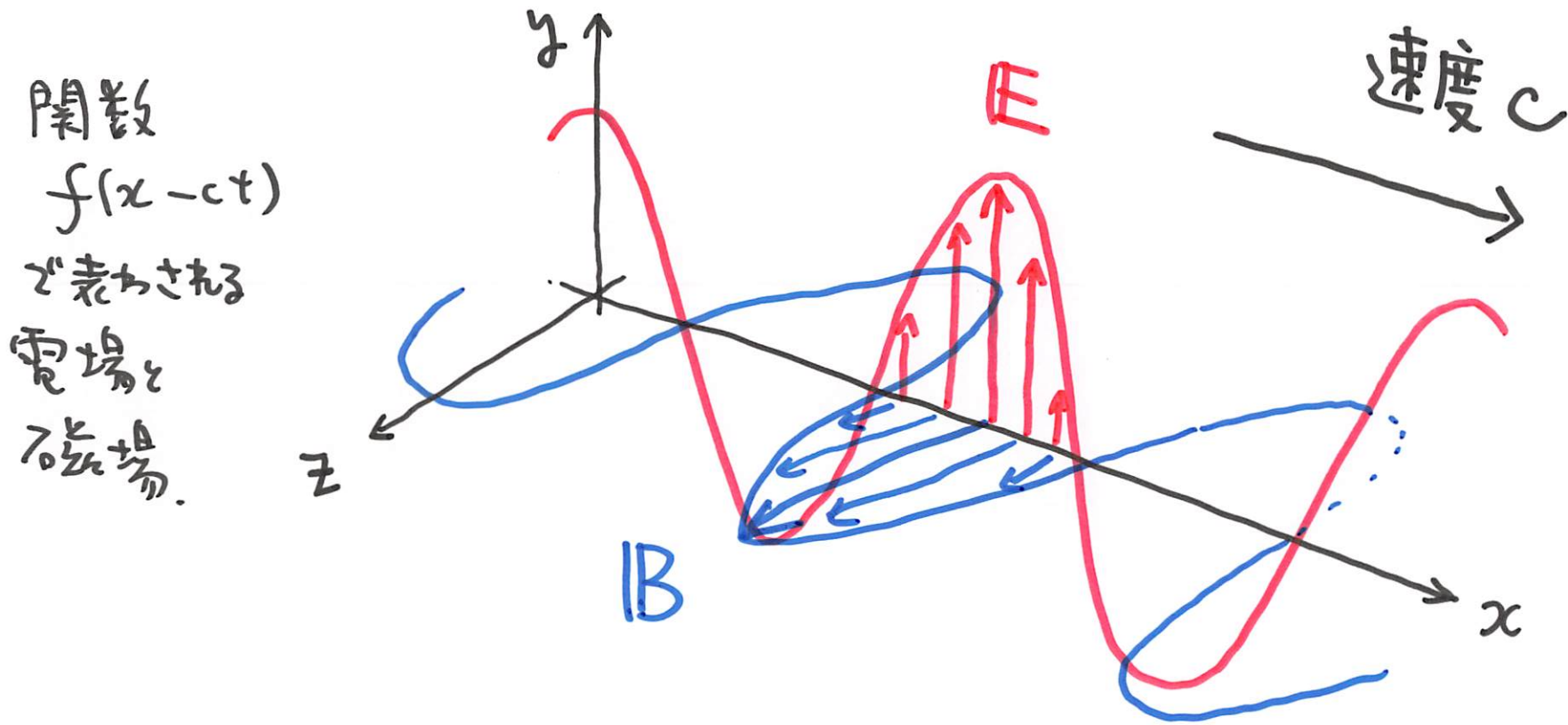
$$c := \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$= 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$= \text{秒速 } 30 \text{ 万 km}$$

真空中のマクスウェル方程式の解 (の一つ)

$$\begin{cases} E_y = \frac{1}{2} \{ f(x-ct) + g(x+ct) \} \\ B_z = \frac{1}{2c} \{ f(x-ct) - g(x+ct) \} \end{cases}$$



電磁波 (electromagnetic wave) 光速で伝わる電場と磁場の波動.