物理学基礎 II

講義 13 の板書ノート

磁束とガウスの法則，ファラデイの法則

谷村 省吾

磁場の描き表し方.

(1) 磁場ベクトル場

空間の各点 $\mathbb{r}$ における磁場 $\mathbb{B}(\mathbb{r}) = \begin{pmatrix} B_x(\mathbb{r}) \\ B_y(\mathbb{r}) \\ B_z(\mathbb{r}) \end{pmatrix}$ を

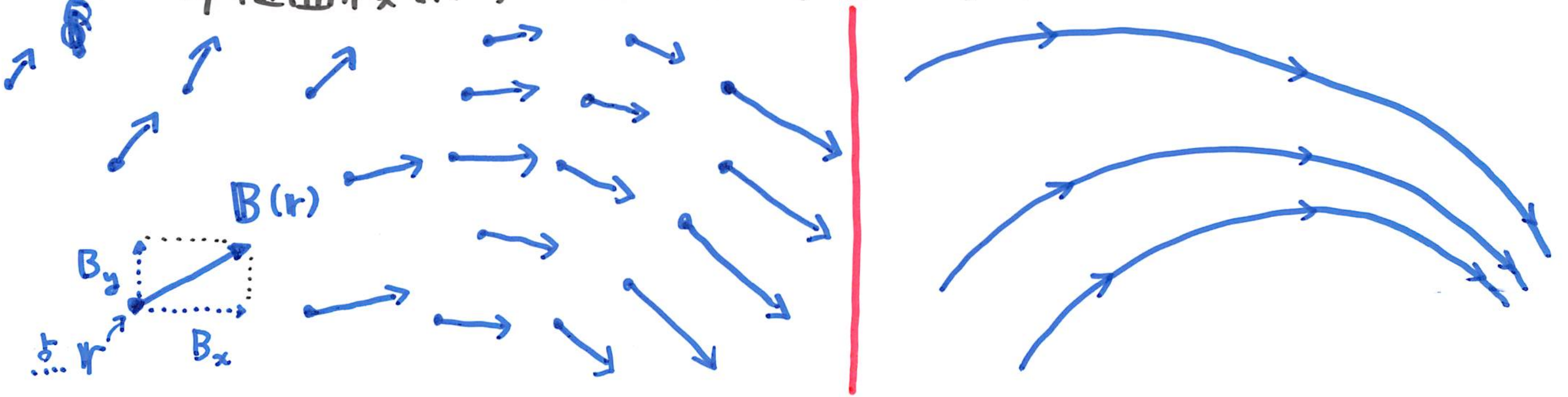
その点を始点とし、$\mathbb{B}$と同じ向きを持ち、

$\|\mathbb{B}\| = \sqrt{(B_x)^2 + (B_y)^2 + (B_z)^2}$ に比例する長さの矢印で表す.

(2) 磁力線 (line of mgagnetic force)

磁場$\mathbb{B}(\mathbb{r})$に沿う曲線に、$\mathbb{B}$と同じ向きの矢印をつける.

単位面積あたりの磁力線の本数が$\|\mathbb{B}\|$に比例するように描く.



磁束 (magnetic flux)

ある面積を貫く磁力線の総量.

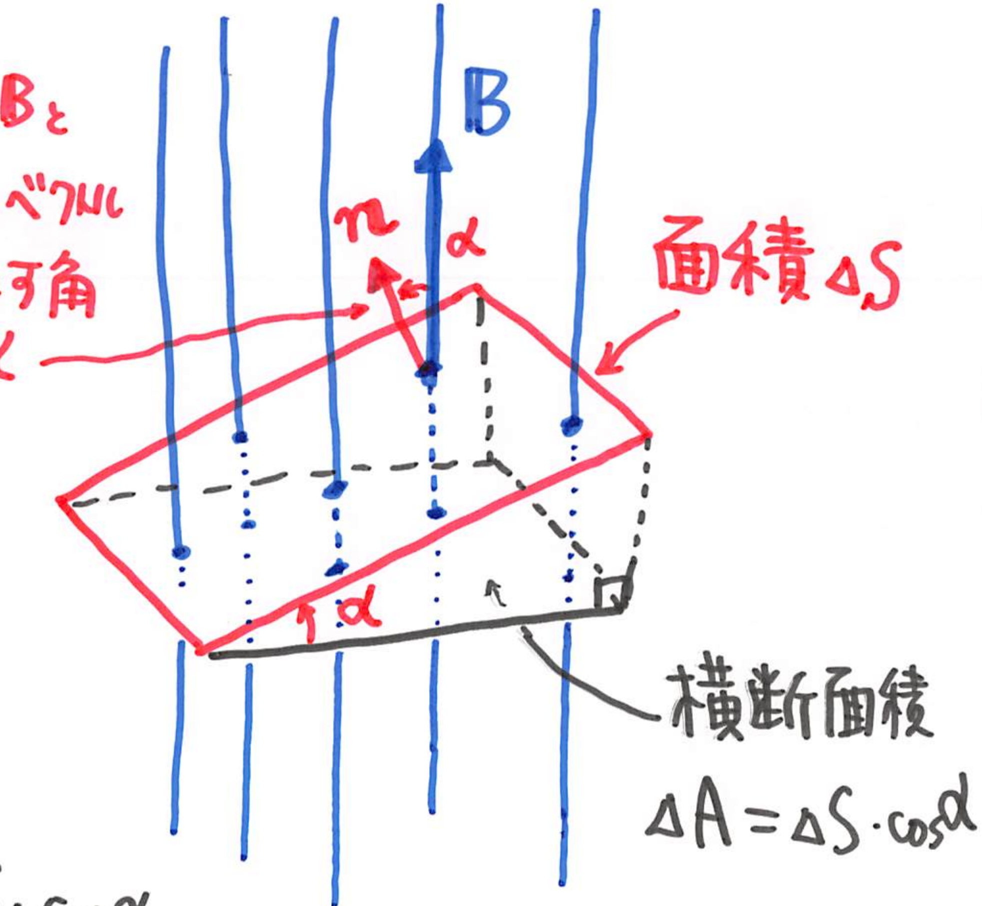
微小面積 ΔS の裏から表に向かう単位法線ベクトル $\mathbf{n}$

が定められているとき、この面積要素を貫く磁束は

$$\Delta \Phi_m = B \cdot \Delta A$$

$$= B \cdot \Delta S \cdot \cos\alpha$$

$$= \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, \Delta S$$



磁束 $\Delta \Phi_m$ の単位

Wb ウェーバ

任意の曲面を貫く磁束

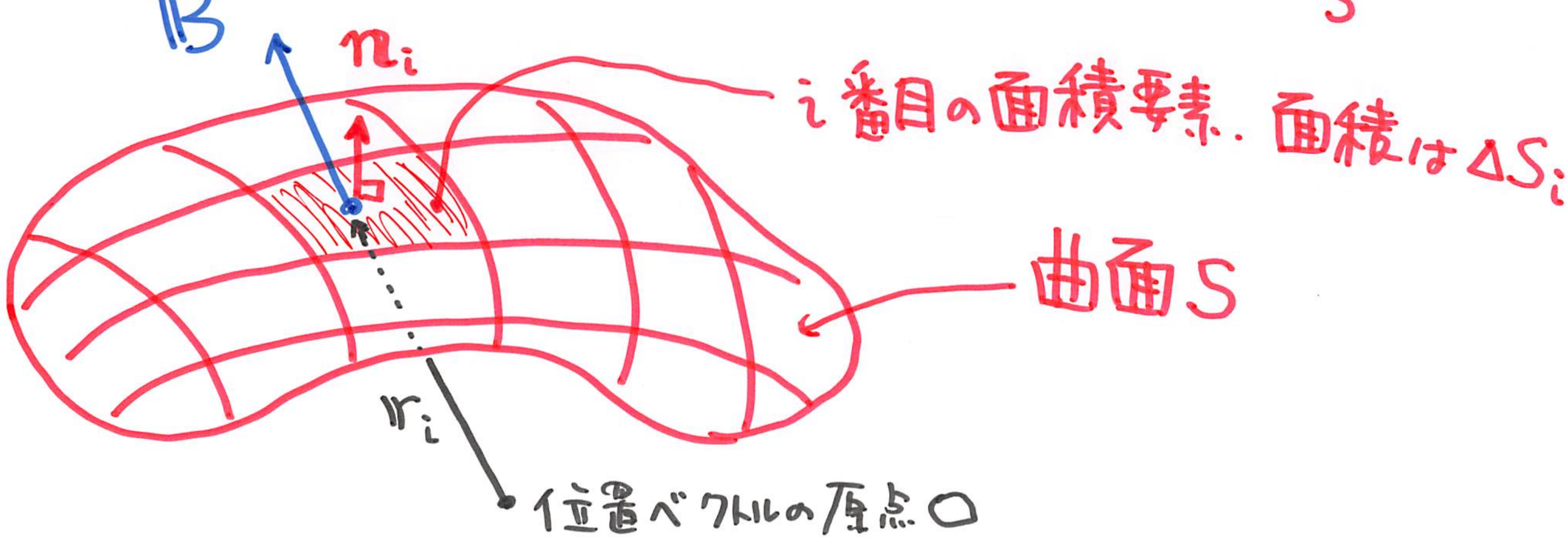
向き付けられた曲面S（S上の各点に裏から表に向かう単位ベクトル$\mathbf{n}$がある）

をN個の面積要素$\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_N$に分割して，

各面積要素を貫く磁束$\Delta \Phi_i = \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i$を求め，

それらの総和$\Phi_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta \Phi_i$を求め，$N \to \infty$の極限をとる．

$$\Phi_m(S) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left\{ \mathbf{B}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i \right\} = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS$$



単位

(磁束) = (磁束密度) × (面積)

$$\Delta \Phi_m = B \cdot \underline{\Delta A}$$

$$\underline{\Delta \Phi_m} = \underline{B} \cdot \underline{n \Delta S}$$

単位は Wb　　T　　m^2

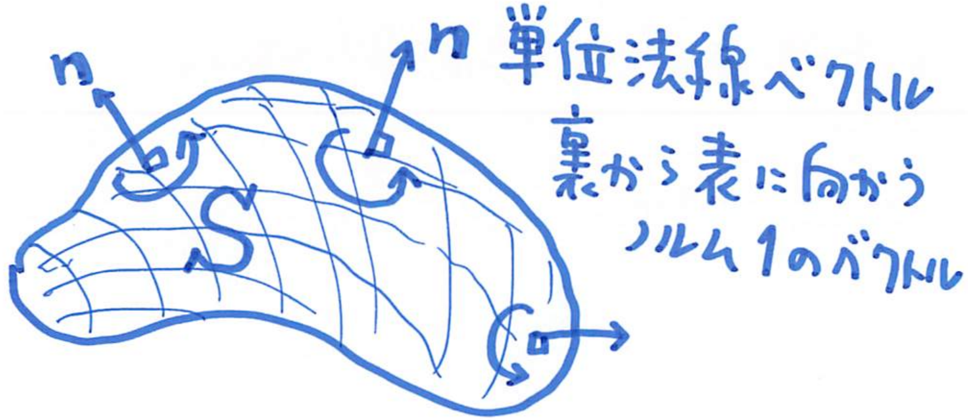
ウェーバ　　テスラ　　平方メートル

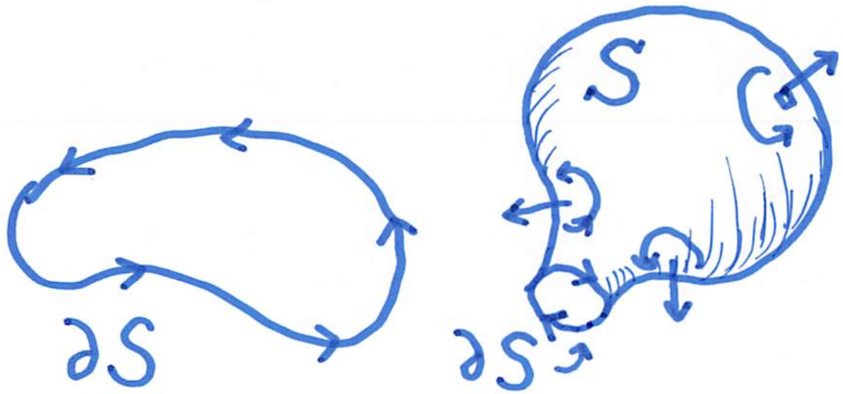
$$1\,Wb = 1\,T \cdot m^2, \quad 1\,T = 1\,Wb \cdot m^{-2}$$

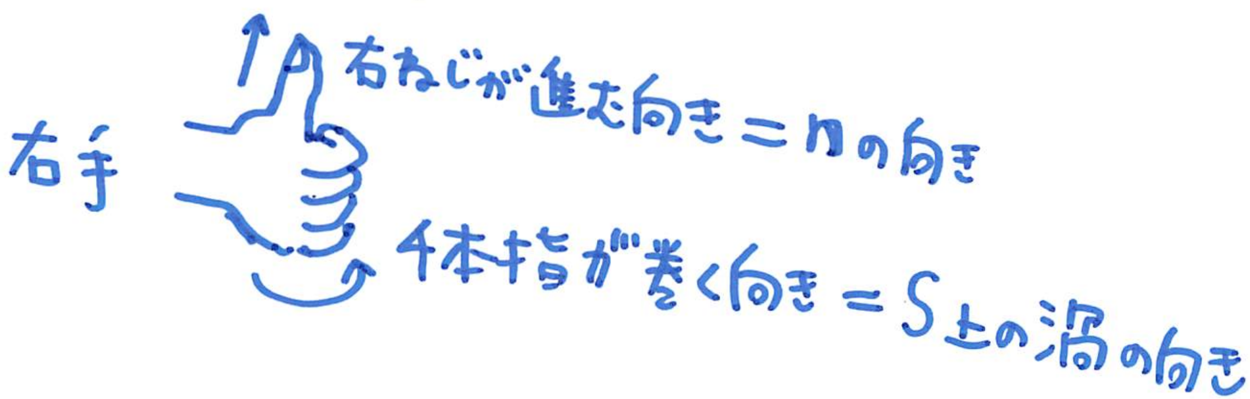
向き付けられた曲面とその境界

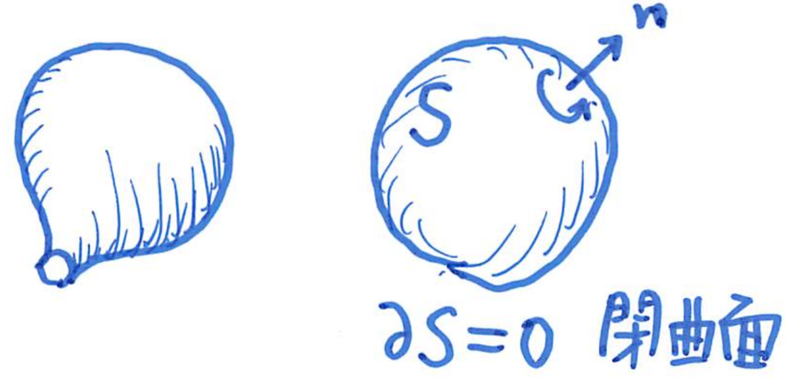
曲面に向きを付ける とは、曲面の表・裏を定めることだが、
さらに裏から表に向かうベクトルに関して右ねじ回転の渦状の向きを定めることとする。

向き付けられた曲面Sの境界(縁)を∂Sと書き、
境界線∂Sには、Sの渦から誘導された向きを付ける。

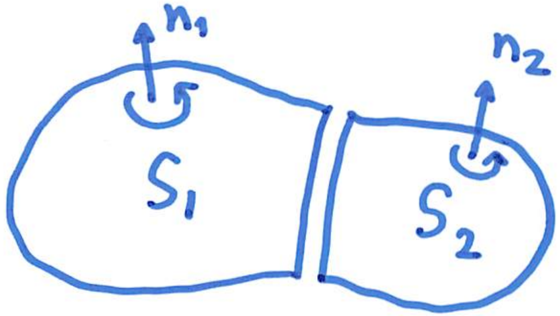


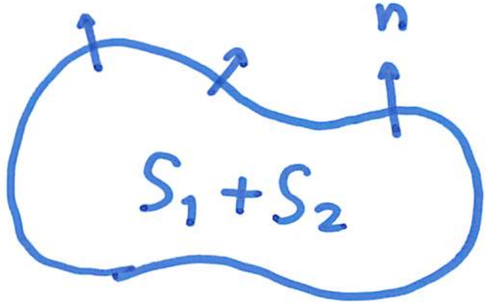




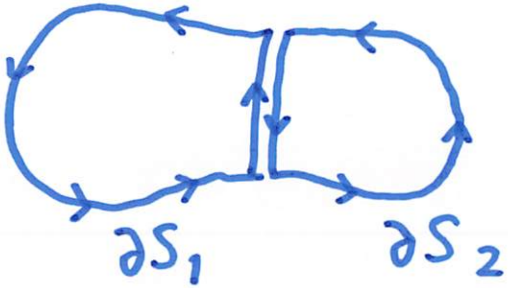


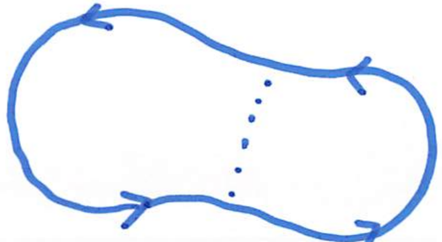
向き付けられた曲面の和





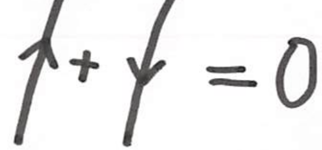
曲面と曲面を"足す"ことができる.

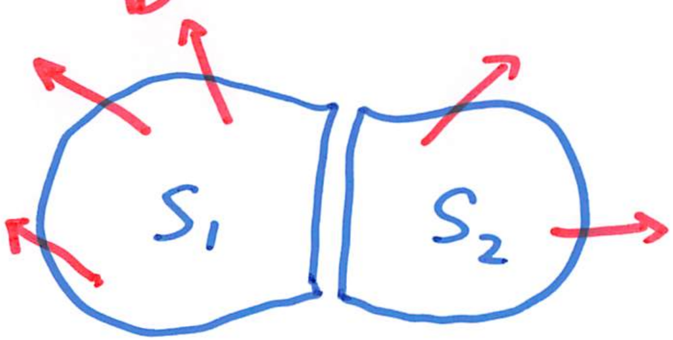




$\partial(S_1+S_2)=\partial S_1+\partial S_2$

逆向きの曲線は"打ち消し合う"

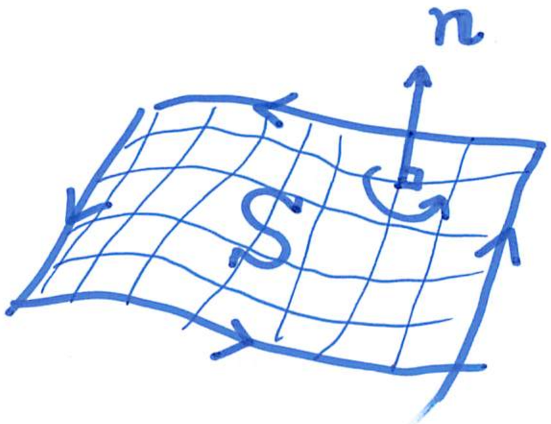


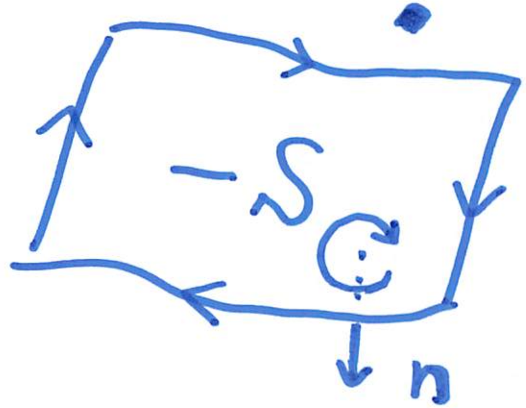


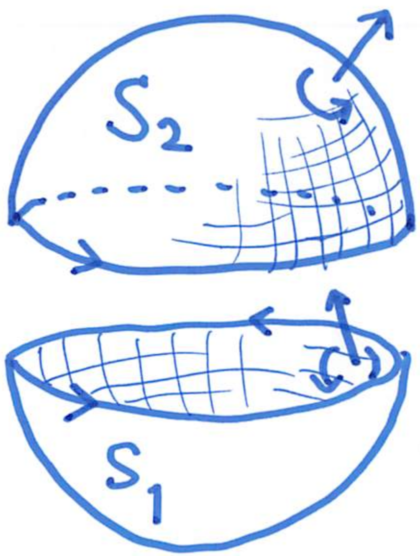
$$\int_{S_1}\mathbb{B}\cdot\mathbf{n}\,dS+\int_{S_2}\mathbb{B}\cdot\mathbf{n}\,dS=\int_{S_1+S_2}\mathbb{B}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

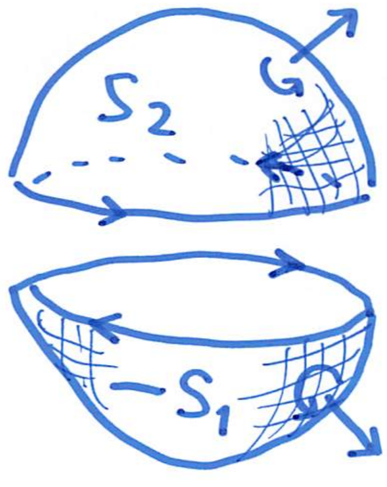
(S_1を貫く磁束) + (S_2を貫く磁束) = (S_1+S_2を貫く磁束)

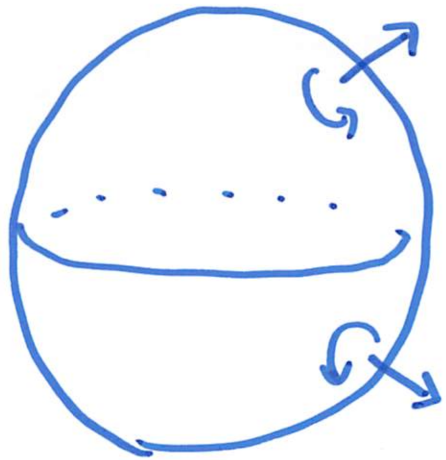
符号（プラス・マイナス）を逆転させた曲面 ＝ 向きを逆向きにした曲面









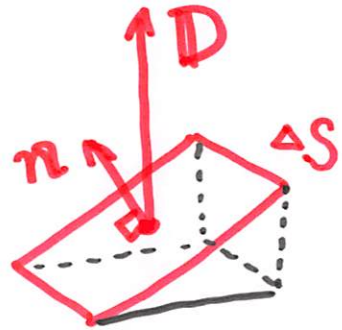


$$S_2 + (-S_1) = S_2 - S_1$$

電束と電場のガウスの法則

電場に関しては，電束密度 $\mathbb{D}=\varepsilon_0\mathbb{E}$（単位は $C\cdot m^{-2}$）で電気力線の密度を表した．

面積要素 ΔS を貫く電束 $\Delta\Phi_e=\mathbb{D}\cdot n\Delta S$

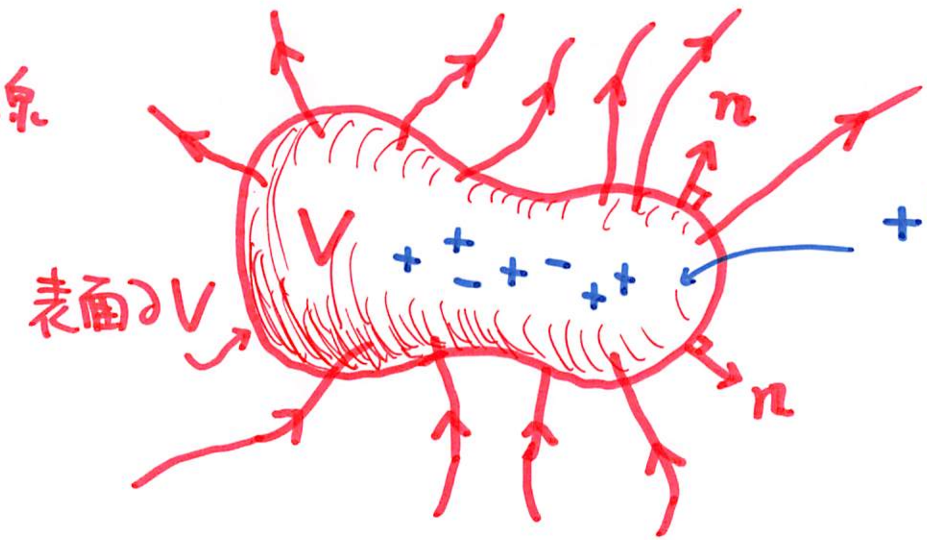


ガウスの法則

（3次元領域 V の表面 ∂V を貫く電束）＝（V 内にある電荷の総量）

$$\int_{\partial V}\mathbb{D}\cdot n\,dS=\int_V \rho\,dV \qquad (\rho:\text{電荷密度})$$

出て行く電気力線
− 入って行く電気力線
の本数
＝ +7 − 4
＝ +3 クーロン

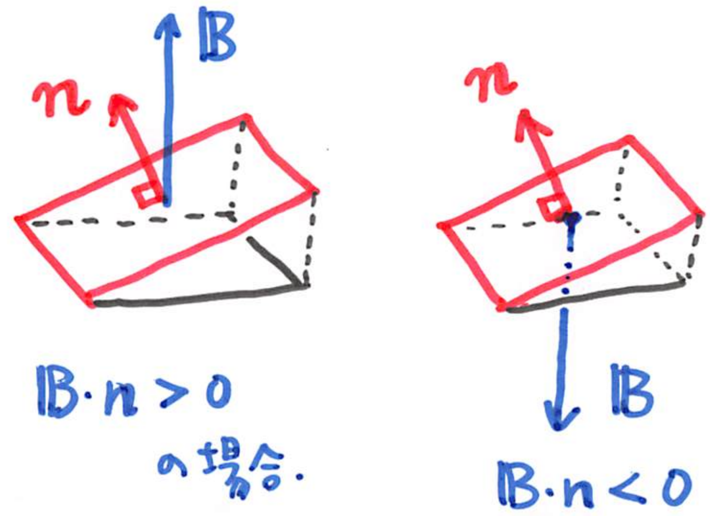


+5 − 2 ＝ +3 クーロン
の電荷が入っている．

磁束と磁場のガウスの法則

磁束密度 $\mathbb{B}$ (単位は $T = Wb\cdot m^{-2}$) で磁力線の密度を表し、

面積要素 ΔS を貫く磁束 $\Delta \Phi_m = \mathbb{B}\cdot n\,\Delta S$

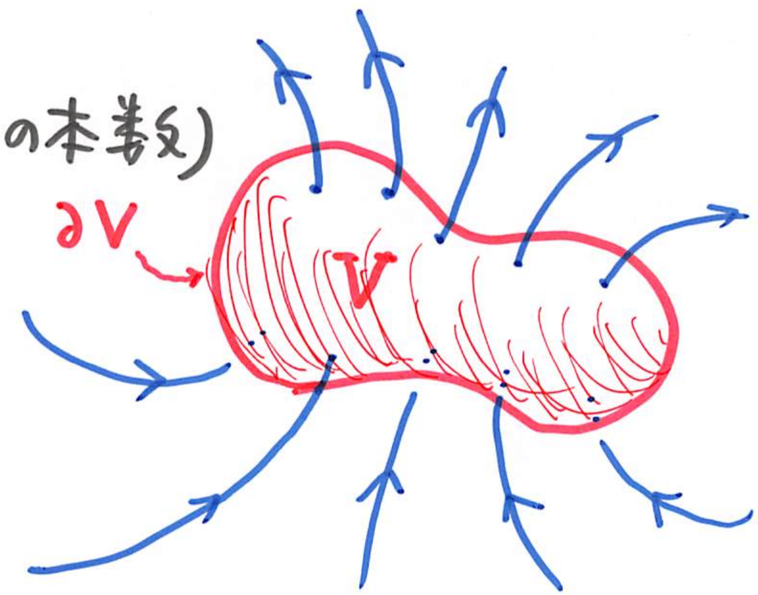


磁場に関しては、
任意の3次元領域Vについて

$$\int_{\partial V} \mathbb{B}\cdot n\, dS = 0$$

つねに(出て行く磁力線の本数)=(入って行く磁力線の本数)

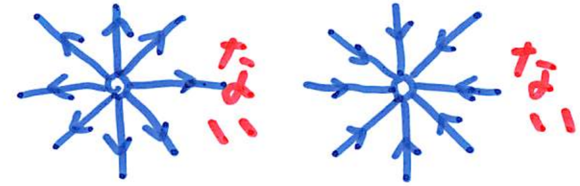
が成り立つ.



(正の磁荷)=(正味の磁力線の湧き出し口)
(負の磁荷)=(　〃　の吸い込み口)

にあたるものはない!!

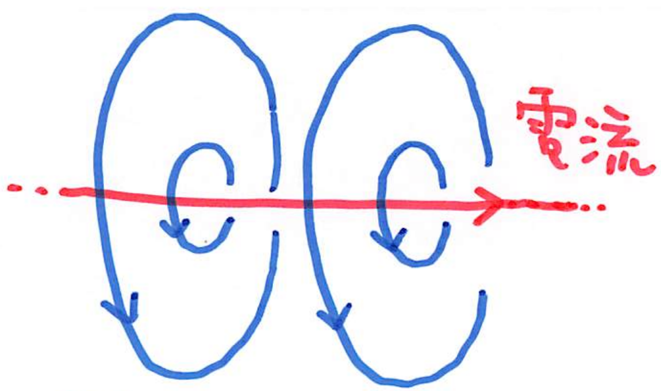
磁力線には湧き出し口・吸い込み口はない。



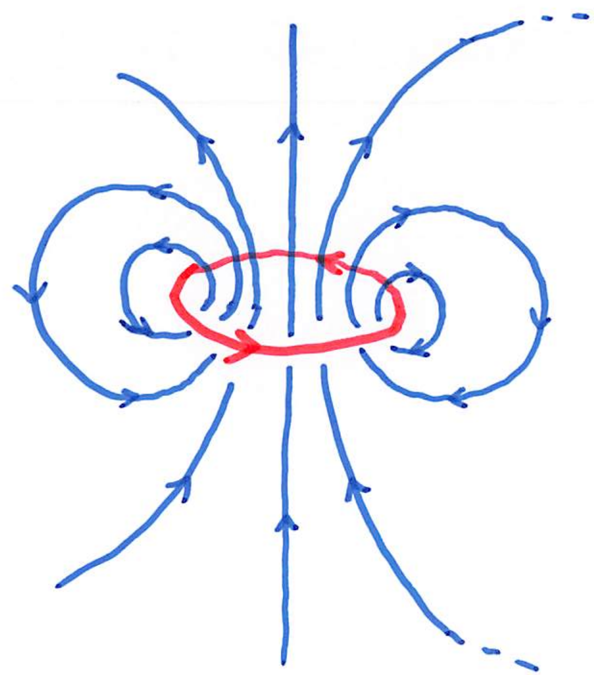
磁力線は途切れない。

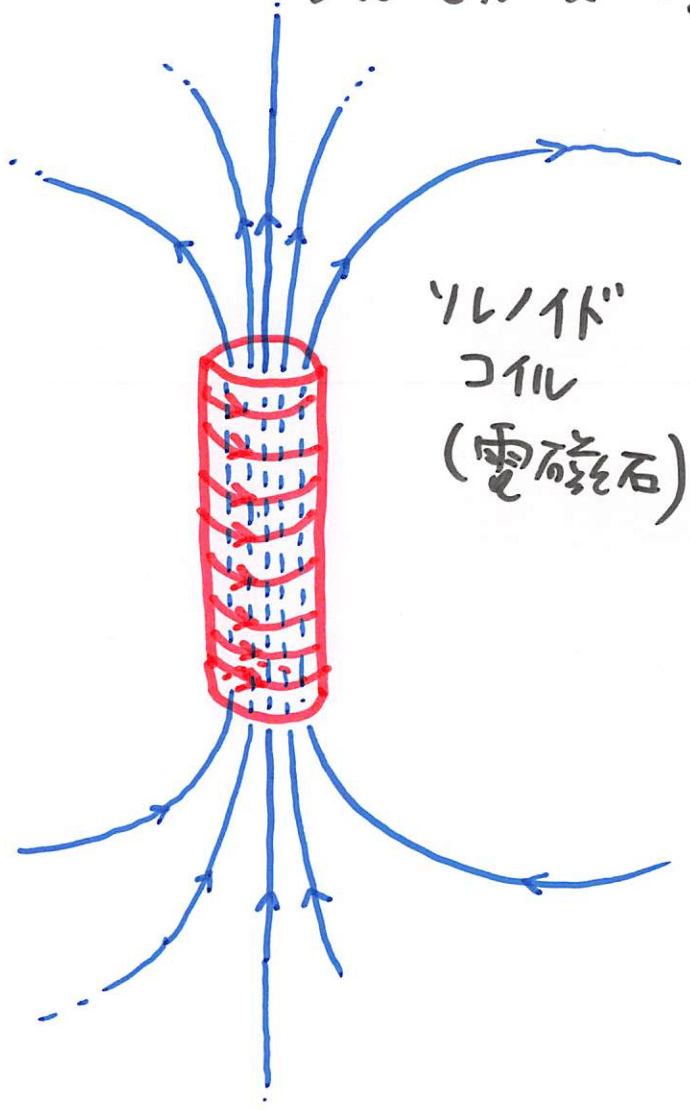
磁力線は環になるか、無限のかなたからやって来て無限のかなたに去って行くかどちらかしかない。

アンペール・ビオ・サバールの法則より
直線電流が作る磁場



環円電流が作る磁力線

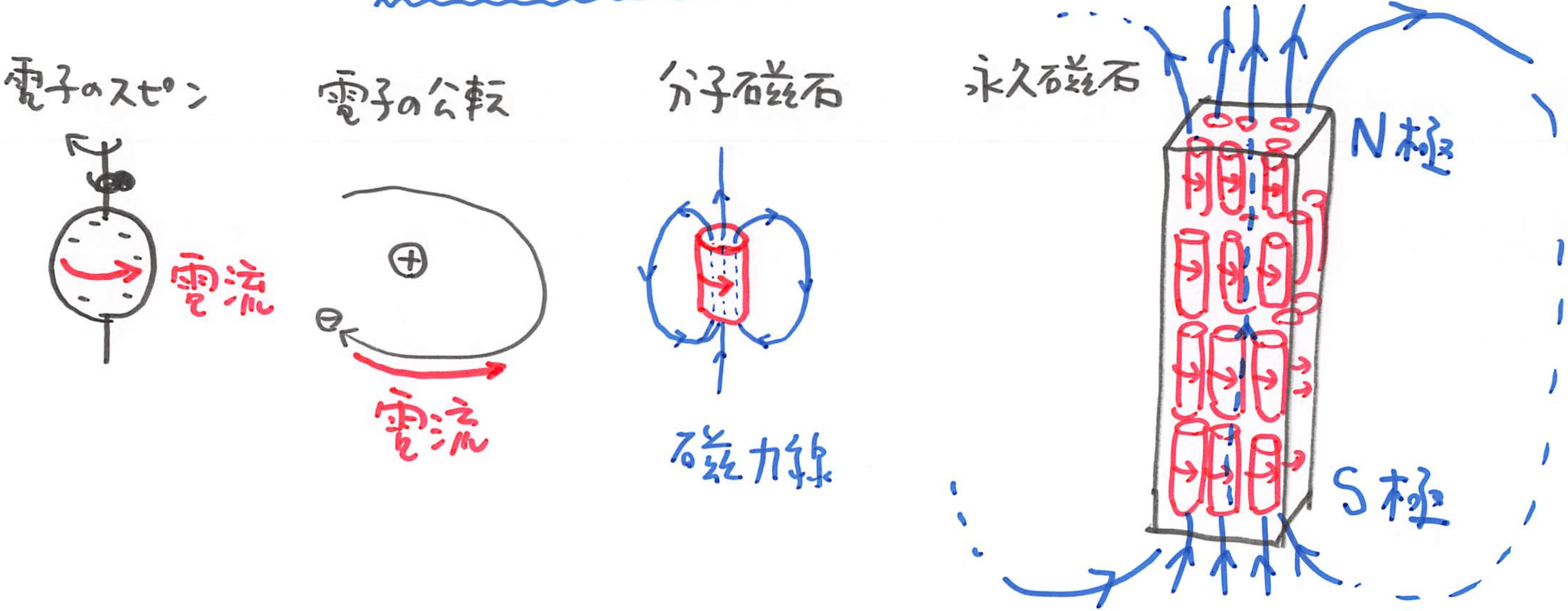




ソレノイドコイル
(電磁石)

普通の磁石（永久磁石）

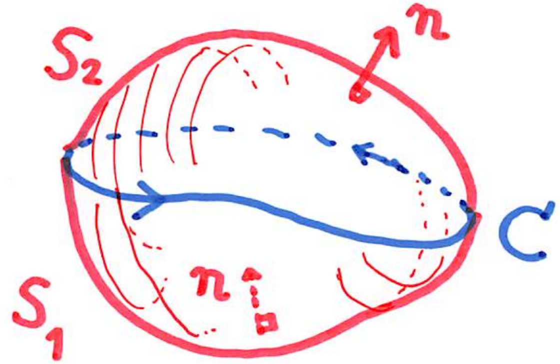
電子の自転運動（スピン）や公転運動が円電流の役割を持ち、
原子スケールの分子磁石になっている。
分子磁石が向きをそろえて集まることによって磁石になる。
この場合も磁力線は途切れることなくつながっている。



閉曲線＝ループ (loop)：始点と終点が一致する曲線

閉曲線 C に対して $C=\partial S$ =（曲面 S の縁）となるような面は一意的ではない。 $C=\partial S_1=\partial S_2$

となるような異なる曲面 S_1, S_2 がある。

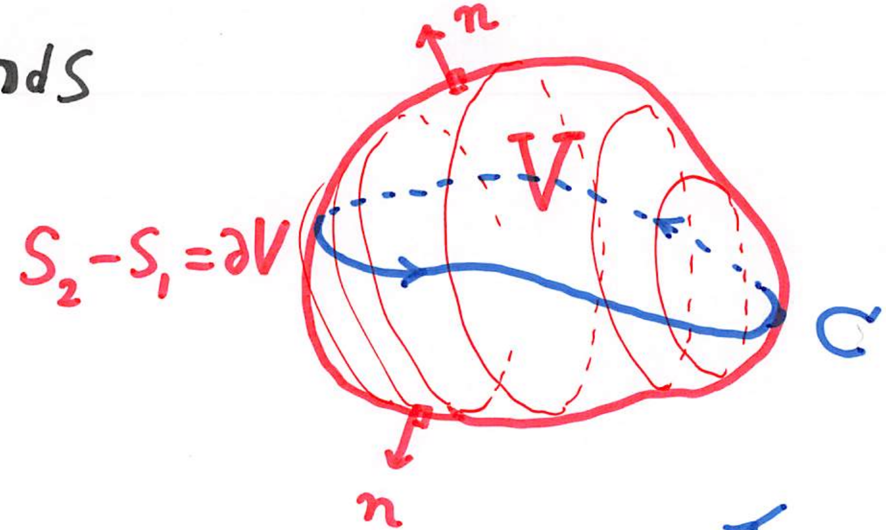


それぞれを貫く磁束を $\Phi_m(S_1)$, $\Phi_m(S_2)$ とすると、

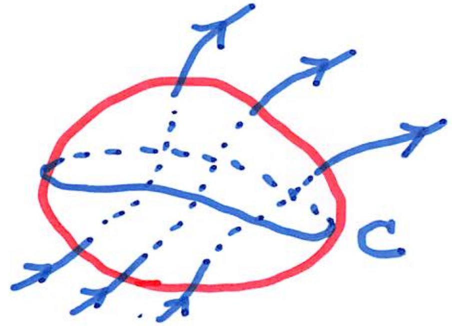
$$\Phi_m(S_2)-\Phi_m(S_1)=\int_{S_2}\mathbb{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS-\int_{S_1}\mathbb{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

$$=\int_{S_2-S_1}\mathbb{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

$$=\int_{\partial V}\mathbb{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=0$$



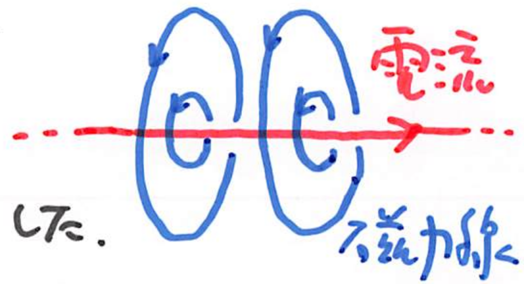
$\therefore\ \Phi_m(S_1)=\Phi_m(S_2)$ =「ループ C で囲まれた磁束」と言ってよい。



ファラデイの電磁誘導の法則 (Faraday's law of induction)

時間変化する磁場は電場を生じる.

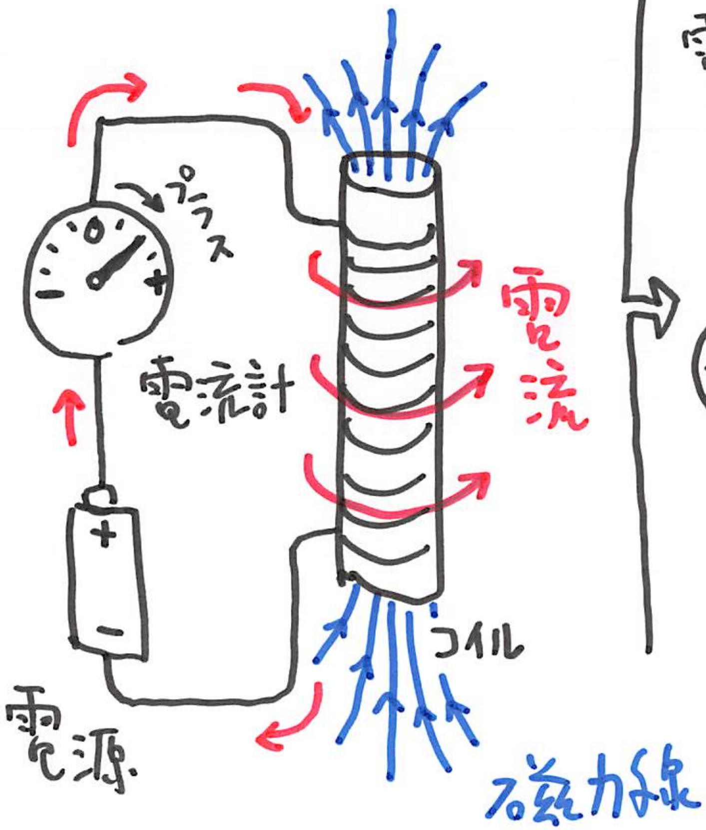
磁場の変化を打ち消そう・妨げようとする向きの電場が生じる.



アンペールは、電流が磁場を生じることを発見した.
ファラデイは、磁場が電流を生じることもあるのではないかと予想して、
実験して、時間変動しない磁場は電流を生じないが、
時間変動する磁場は電場を生み出し、
結果的に電流を生じる
ことを発見した.

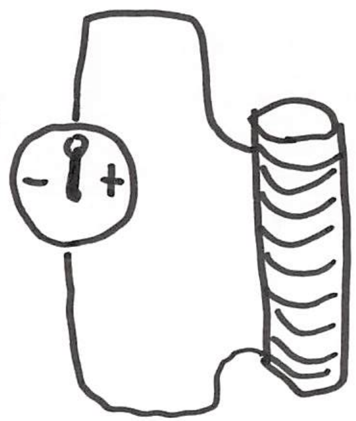
ファラデイの電磁誘導の定性的な説明.

1. ソレノイドコイルに電源をつないで電流を流すと磁場が生じる

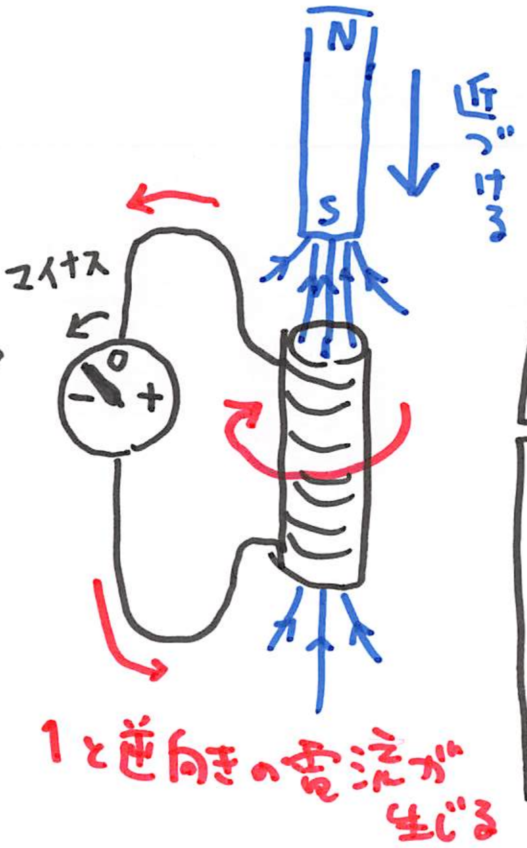


2. 電源を外して電流計だけをつなぐ.

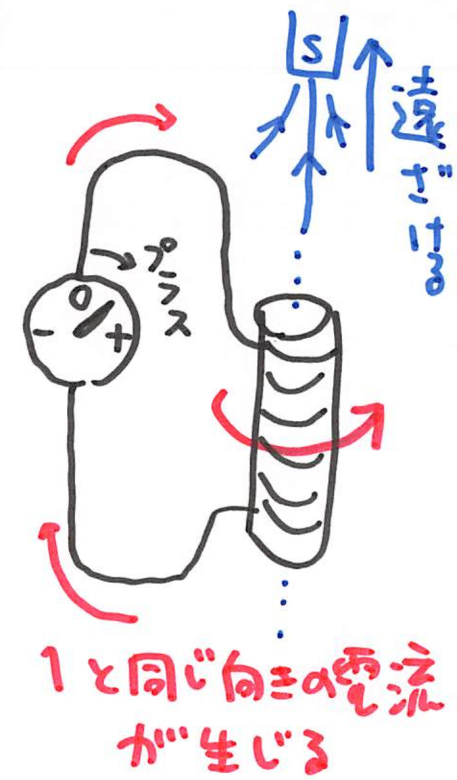
電流計の針はゼロを指している



3. 磁石を近づけて, 1.と同じ向きの磁場がソレノイドコイルに入りこむと, 1とは逆向きに電流が流れる.



4. 磁石を遠ざけて, 1と同じ向きの磁場がソレノイドコイルにおいて弱まると, 1と同じ向きに電流が流れる.



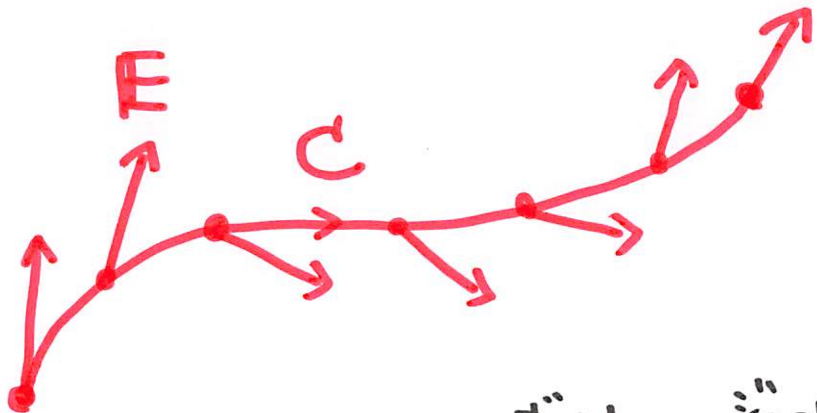
起電力 (electromotive force)

向き付けられた曲線Cに沿う電場の線積分

$$\Psi_e(C) := \int_C \mathbb{E}\cdot d\mathbb{r}$$

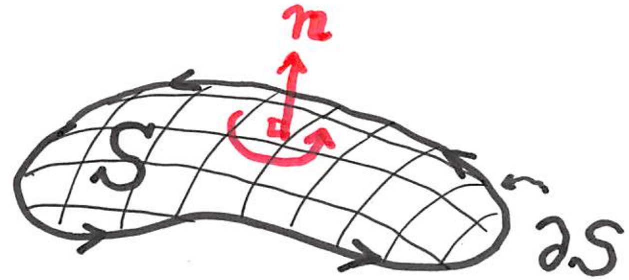
をCに沿う起電力という.

$\Psi_e(C)$ =「曲線Cの始点から終点まで単位電荷が動くときに電場がする仕事」



起電力の単位は V（ボルト）$= J\cdot C^{-1}$（ジュール毎クーロン）.（電位の単位と同じ）

定式化されたファラデイの法則



S：任意の向き付けられた曲面

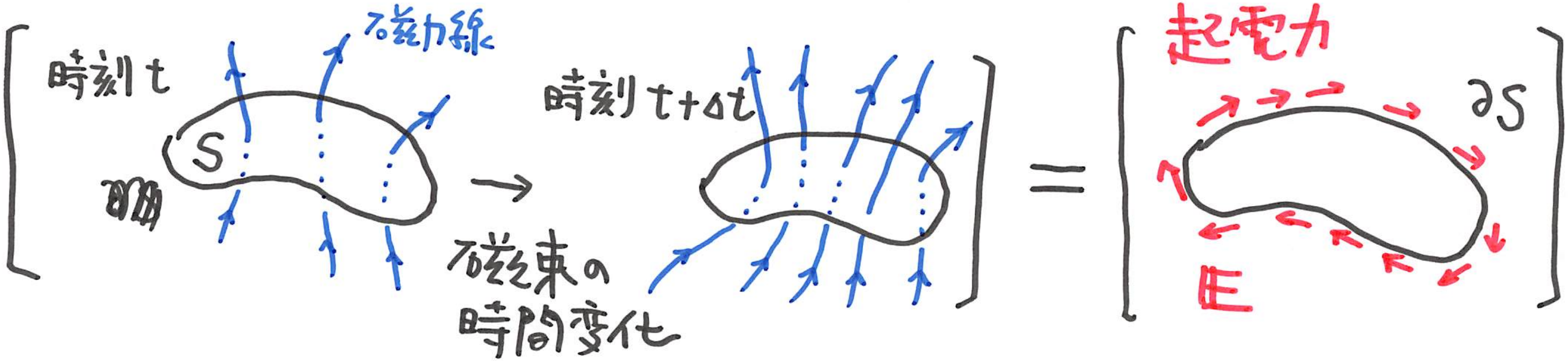
∂S：Sの境界線

S自体は時間的に動かないとする.

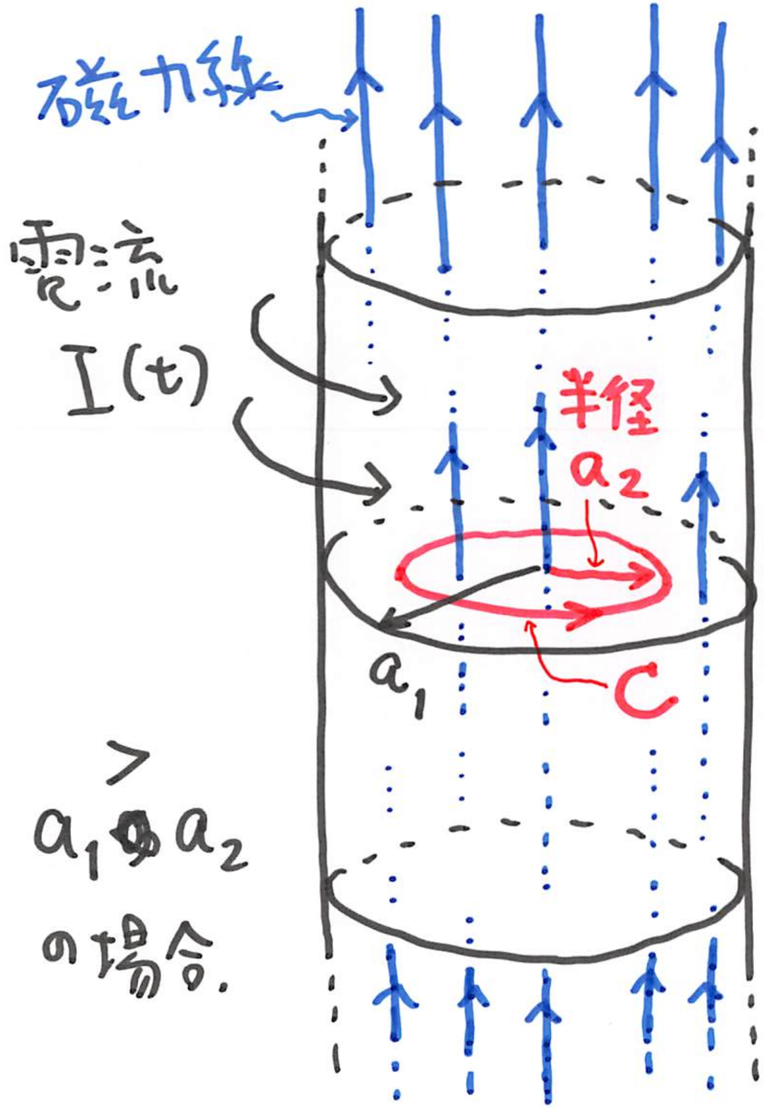
→（時刻tにSを貫く磁束）をtで微分してマイナスを付けたもの

＝時刻tに∂Sに生じる起電力）

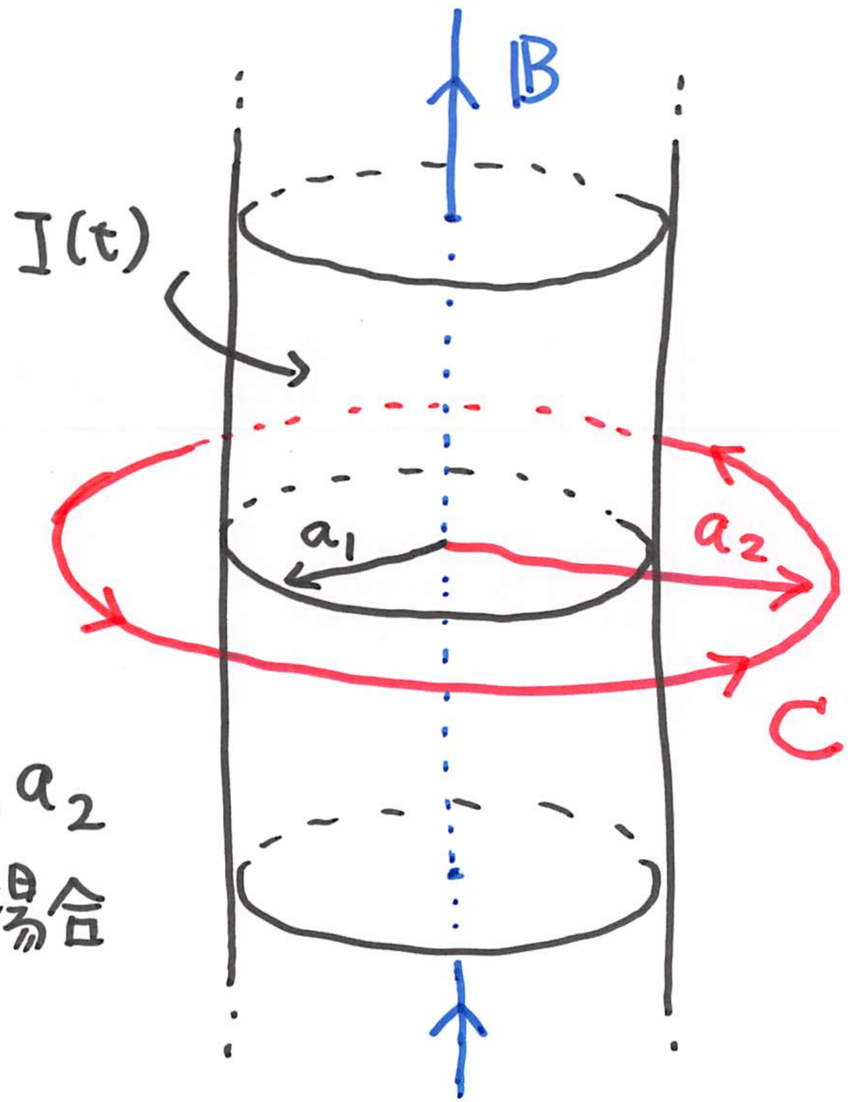
$$-\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_S \mathbb{B}\cdot n\, dS\right\} = \int_{\partial S} \mathbb{E}\cdot dr$$



例題. 半径a_1で無限に長い円筒型のソレノイドコイルに単位長さあたりN回導線が巻いてあり, 時刻tに電流$I(t)$を流す.
円筒と同心の半径a_2の導線円Cに生じる電場を求めよ.



$a_1 > a_2$ の場合.



$a_1 < a_2$ の場合

アンペールの法則を用いて、磁場の大きさは

$$B = \begin{cases} \mu_0 N I & (\text{ソレノイドコイルの内側}) \\ 0 & (\text{外側}) \end{cases}$$

ループCで囲まれた磁束は、

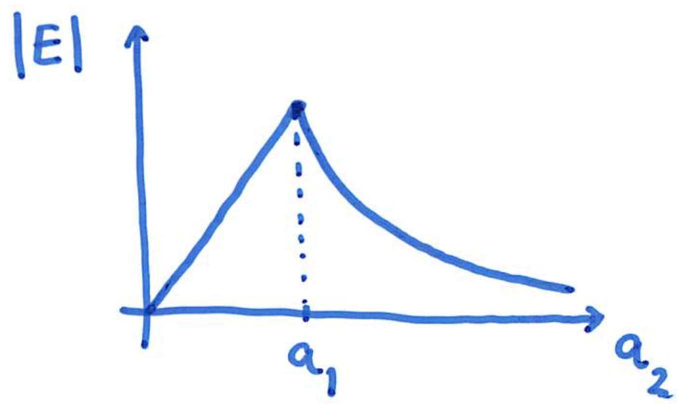
$$\begin{cases} a_1 > a_2 \text{ の場合} & \Phi_m(t) = B \cdot \pi a_2^2 = \mu_0 N I(t) \cdot \pi a_2^2 \\ a_1 < a_2 \text{ の場合} & \Phi_m(t) = B \cdot \pi a_1^2 = \mu_0 N I(t) \cdot \pi a_1^2 \end{cases}$$

ループC上の起電力 Ψ_e と電場 E の関係式は

$$\Psi_e = E \cdot 2\pi a_2 \qquad \therefore \ E = \frac{1}{2\pi a_2} \Psi_e$$

ファラデイの法則 $\Psi_e = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_m$ より、$E = -\frac{1}{2\pi a_2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_m$ となり、

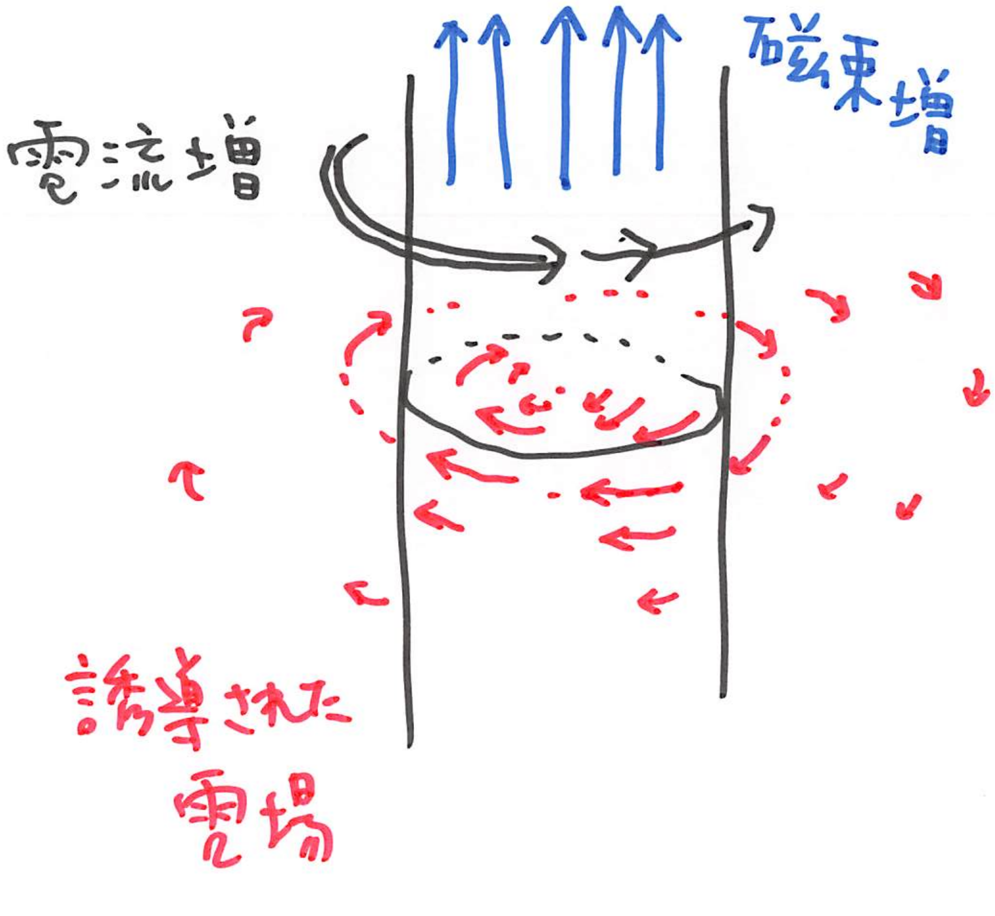
$$\begin{cases} a_1 > a_2 \text{ の場合、} & E = -\frac{1}{2} \mu_0 N a_2 \dot{I}(t) \\ a_1 < a_2 \text{ の場合、} & E = -\frac{a_1^2}{2 a_2} \mu_0 N \dot{I}(t) \end{cases}$$



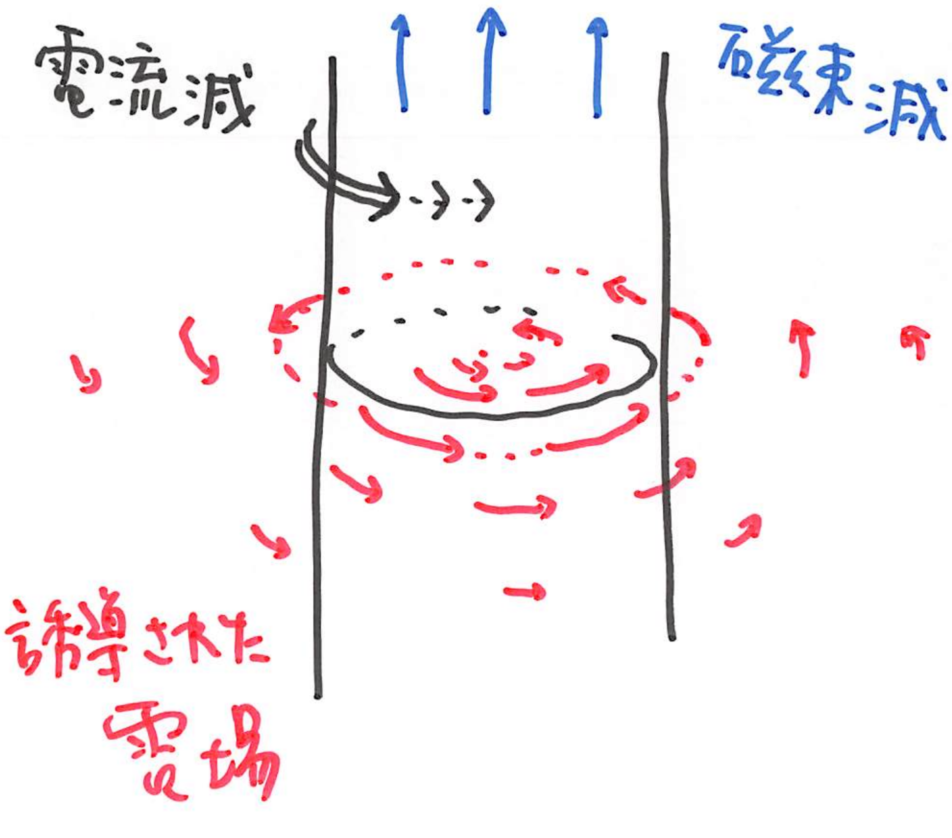
となる。ただし $\dot{I} = \frac{dI}{dt}$ ■

電場の符号は $\dot{I}(t)=\frac{dI}{dt}$ にマイナスがついているので、

電流が増大して $\frac{dI}{dt}>0$ となると、
磁場が強くなり、
逆向きに電場が生じる。

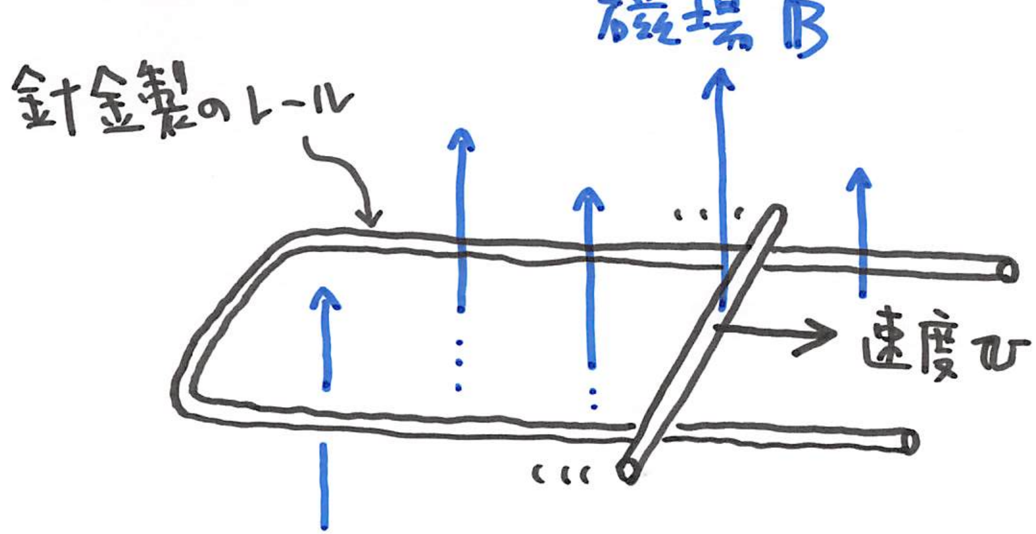


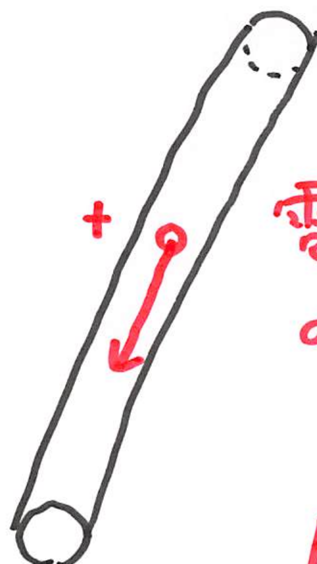
電流が減少して $\frac{dI}{dt}<0$ となると、
磁場が弱くなり、
順方向に電場が生じる。



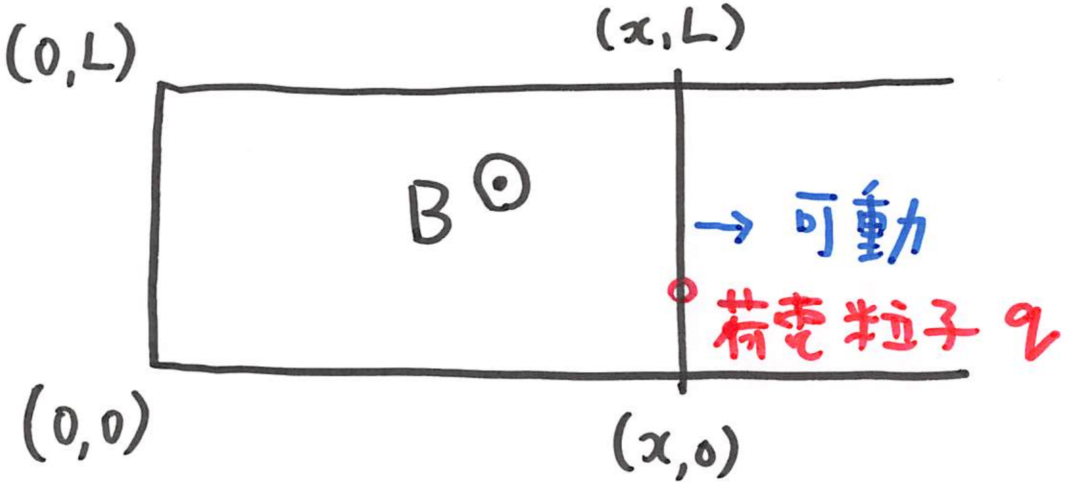
レンツの法則（Lenz' law）← ローレンツ力の法則の特殊バージョン

時間的に変動しない磁場中で
電流が流れていない導線を磁場を垂直に横切るように
動かすと、導線中の荷電粒子（電子）も導線と一緒に動いて
磁場からローレンツ力を受けて、結果的に導線に沿って電流
が流れ出し、あたかも導線に沿う起電力が生じたように
見える現象のこと。





電荷 q $(q>0)$
の荷電粒子が
受けるローレンツ力
$\mathbb{F} = q v \times \mathbb{B}$



ローレンツ力
$F = qE_{mikake}$

長方形の面積 $S = Lx$

長方形を貫く磁束 $\Phi_m = BS = BLx$

磁束の時間変化 $\dfrac{d\Phi_m}{dt} = BL\dfrac{dx}{dt} = BLv$

荷電粒子が受ける力 $F = qvB = qE_{mikake}$ ← 向きを気にせず（プラス・マイナス）に書いている。

で「見かけの電場」$E_{mikake} = E_m$ を定めると、$E_m = vB$

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = vBL = E_m L = \text{見かけの起電力}.$$

形の上ではファラデイの法則と同じ.

定式化されたレンツの法則

真の電場はなく、時間的に変動しない磁場 $\mathbb{B}$ があり、ループ C_t が時刻 t に依存して変動している。
C_t の一点に注目して、この点が速度 $\mathbb{v} = \frac{d\mathbb{s}}{dt}$ で動くと、ローレンツ力 $\mathbb{F} = q\mathbb{v} \times \mathbb{B} = q\mathbb{E}_m$ により見かけの電場 $\mathbb{E}_m$ を定める。C_t を縁とする曲面を S_t とする。このとき以下が成り立つ：

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{S_t} \mathbb{B}\cdot\mathbb{n}\,dS\right\} = \int_{C_t} \mathbb{E}_m \cdot d\mathbb{r}$$